

2022 北京门头沟高三一模

数 学

2022. 3

考 生 须 知	1. 本试卷共 6 页, 共 3 道大题, 21 个小题. 满分 150 分. 考试时间 120 分钟. 2. 在试卷和答题卡上准确填写学校和姓名, 并将考试编号填写 (或条形码粘贴) 在答题卡相应位置处. 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上, 在试卷上作答无效. 选择题、作图题用 2B 铅笔作答, 其它试题用黑色字迹签字笔作答. 4. 考试结束, 将试卷、答题卡和草稿纸一并交回.
------------------	---

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

- (1) 已知集合 $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x | x^2 < 9\}$, 则 $A \cap B =$
- (A) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (B) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
(C) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (D) $(-3, 3)$
- (2) 复数 $z = (-1+i)(2+i)$ 对应的点在复平面内的
- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限
- (3) 函数 $f(x)$ 的图像与函数 $y = \log_2 x$ 的图像关于 y 轴对称, 则 $f(-2) =$
- (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$
(C) 4 (D) 1
- (4) 若点 $M(1,1)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是
- (A) $x - y - 2 = 0$ (B) $x + y - 2 = 0$
(C) $x - y = 0$ (D) $x + y = 0$
- (5) 已知抛物线 $y^2 = 8x$, O 为坐标原点, 过其焦点的直线 l 与抛物线相交于 A, B 两点, 且 $|AB| = 10$, 则 AB 中点 M 到 y 轴的距离为
- (A) 2 (B) 3
(C) 5 (D) 6
- (6) 已知 $a = \log_3 2$, $b = 2^{0.1}$, $c = \frac{1}{3}$, 则
- (A) $c < a < b$ (B) $a < c < b$
(C) $c < b < a$ (D) $a < b < c$
- (7) “角 α, β 的终边关于原点 O 对称”是“ $\cos(\alpha - \beta) = -1$ ”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 已知 D 是边长为 2 的正 $\triangle ABC$ 边 BC 上的动点, 则 $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ 的取值范围是

- (A) $[\sqrt{3}, 4]$ (B) $[\sqrt{3}, 2]$
(C) $[0, 2]$ (D) $[2, 4]$

(9) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的切线, 交双曲线右支于 M , 若 $\angle F_1 M F_2 = \frac{\pi}{4}$, 则 C 的渐近线方程为

- (A) $y = \pm\sqrt{3}x$ (B) $y = \pm\sqrt{2}x$
(C) $y = \pm 2x$ (D) $y = \pm\sqrt{5}x$

(10) 新型冠状病毒肺炎 (COVID-19) 严重影响了人类正常的经济与社会发展. 我国政府对此给予了高度重视, 采取了各种防范与控制措施, 举国上下团结一心, 疫情得到了有效控制. 人类与病毒的斗争将是长期的, 有必要研究它们的传播规律, 做到有效预防与控制, 防患于未然. 已知某地区爆发某种传染病, 当地卫生部门于 4 月 20 日起开始监控每日感染人数, 若该传染病在当地的传播模型为 $i(t) = \frac{2500}{1 + 9e^{-0.2t}}$ ($i(t)$ 表示自 4 月 20 日开始 t (单位: 天) 时刻累计感染人数, $i(t)$ 的导数 $i'(t)$ 表示 t 时刻的新增病例数, $\ln 9 \approx 2.1972$), 根据该模型推测该地区新增病例数达到顶峰的日期所在的时间段为

- (A) 4 月 30 日~5 月 2 日 (B) 5 月 3 日~5 月 5 日
(C) 5 月 6 日~5 月 8 日 (D) 5 月 9 日~5 月 11 日

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分.)

(11) 在 $(2x^2 - 1)^5$ 的展开式中, x^4 的系数为____. (用数字作答)

(12) 下表记录了某地区一年之内的月降水量.

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月降水量/mm	58	48	53	46	56	56	51	71	56	53	64	66

根据上述统计表, 该地区月降水量的中位数是____; 80% 分位数是____.

(13) 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 2$, $AB = 2\sqrt{3}$, $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\angle B =$ ____; D 为 BC 的中点, 则 AD 的长为____.

(14) 请举出一个各项均为正数且公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$, 使得它的前 n 项和 S_n 满足: 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 也是等差数列, 则 $a_n =$ ____.

(15) 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 2 的菱形, 且 $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, $PD = AD$, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, F ,

O 分别是 PA , BD 的中点,

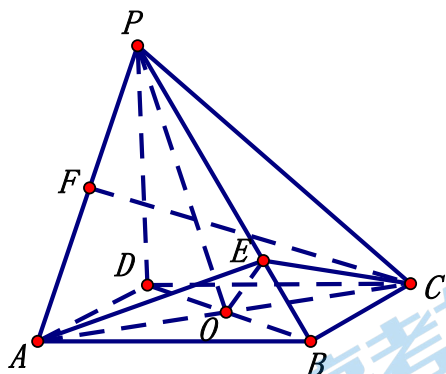
E 是线段 PB 上的动点, 给出下列四个结论:

- ① $AC \perp OE$;
② $FC = PO$;

③直线 PO 与底面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

④ $\triangle AEC$ 面积的取值范围是 $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{15}]$.

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明。）

(16)（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $x = \frac{\pi}{6}$ 是函数 $f(x)$ 的对称轴, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 上单调.

(I) 从条件①、条件②、条件③中选一个作为已知, 使得 $f(x)$ 的解析式存在, 并求出其解析式;

条件①: 函数 $f(x)$ 的图像经过点 $A(0, \frac{1}{2})$;

条件②: $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 是 $f(x)$ 的对称中心;

条件③: $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 是 $f(x)$ 的对称中心.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第 (I) 问得 0 分; 如果选择多个符合要求的条件分别解答, 按第一个解答计分.

(II) 根据 (I) 中确定的 $f(x)$, 求函数 $y = f(x)$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的值域.

(17)（本小题满分 13 分）

第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 4 日在北京、张家口盛大开幕. 为保障本届冬奥会顺利运行, 共招募约 2.7 万人参与赛会志愿服务. 赛会共设对外联络服务、竞赛运行服务、媒体运行与转播服务、场馆运行服务、市场开发服务、人力资源服务、技术运行服务、文化展示服务、赛会综合服务、安保服务、交通服务、其他共 12 类志愿服务.

(I) 甲、乙两名志愿者被随机分配到不同类志愿服务中, 每人只参加一类志愿服务. 已知甲被分配到对外联络服务, 求乙被分配到场馆运行服务的概率是多少?

(II) 已知来自某中学的每名志愿者被分配到文化展示服务类的概率是 $\frac{1}{10}$, 设来自该中学的 2 名志愿者被分配到文化展示服务类的人数为 ξ , 求 ξ 的分布列与期望.

(III) 2.7 万名志愿者中，18-35 岁人群占比达到 95%，为了解志愿者对某一活动方案是否支持，通过分层抽样获得如下数据：

	18-35 岁人群		其它人群	
	支持	不支持	支持	不支持
方案	90 人	5 人	1 人	4 人

假设所有志愿者对活动方案是否支持相互独立。

将志愿者支持方案的概率估计值记为 p_0 ，去掉其它人群志愿者，支持方案的概率估计值记为 p_1 ，试比较 p_0 与 p_1 的大小。（结论不要求证明）

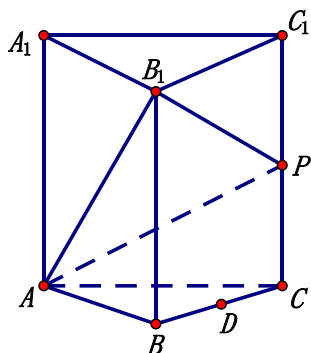
(18) (本小题满分 15 分)

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB = AA_1 = 2$ ，

D ， P 分别是 BC ， CC_1 的中点。

(I) 在侧棱 BB_1 上作出点 F ，满足 $DF \parallel$ 平面 AB_1P ，并给出证明；

(II) 求二面角 B_1-AP-C_1 的余弦值及点 B 到平面 AB_1P 的距离。



(19) (本小题满分 15 分)

已知 $f(x) = k \sin x + 2x$.

(I) 当 $k = 2$ 时，判断函数 $f(x)$ 零点的个数；

(II) 求证: $-\sin x + 2x > \ln(x+1)$ ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$);

(III) 若 $f(x) > \ln(x+1)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立, 求 k 的最小值.

(20) (本小题满分 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 长轴的右端点为 $A(2, 0)$.

(I) 求 C 的方程;

(II) 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 分别相交于 M, N 两点, 且 $AM \perp AN$, 点 A 不在直线 l 上,

(i) 试证明直线 l 过一定点, 并求出此定点;

(ii) 从点 A 作 $AD \perp MN$ 垂足为 D , 点 $B(\frac{8}{5}, 2)$, 写出 $|BD|$ 的最小值 (结论不要求证明).

(21) (本小题满分 15 分)

素数又称质数, 是指在大于 1 的自然数中, 除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数. 早在 2000 多年前, 欧几里德就在《几何原本》中证明了素数是无限的. 在这之后, 数学家们不断地探索素数的规律与性质, 并取得了显著成果. 中国数学家陈景润证明了“ $1+2$ ”, 即“表达偶数为一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和”, 成为了哥德巴赫猜想研究上的里程碑, 在国际数学界引起了轰动. 如何筛选出素数、判断一个数是否为素数, 是古老的、基本的, 但至今仍受到人们重视的问题. 最早的素数筛选法由古希腊的数学家提出. 1934 年, 一名印度数学家发明了一种素数筛选法, 他构造了一个数表 A , 具体构造的方法如下:

A 中位于第 i 行第 j 列的数记为 a_{ij} , 首项为 $3i+1$ 且公差为 $2i+1$ 的等差数列的第 j 项恰好为 a_{ij} , 其中 $i=1, 2, \dots$;
 $j=1, 2, \dots$.

请同学们阅读以上材料, 回答下列问题:

(I) 求 a_{53} ;

(II) 证明: $a_{ij} = a_{ji}$;

(III) 证明: ①若 s 在 A 中, 则 $2s+1$ 不是素数;

②若 s 不在 A 中, 则 $2s+1$ 是素数.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

(1) 解：C；

(2) 解：B； $z = -3 + i \Rightarrow (-3, 1)$ 对应的点在第二象限

(3) 解：D；法一：由题意可知， $y = \log_2 2 = 1$ ， $f(-2) = 1$

法二：由题意可得： $f(x) = \log_2(-x)$ ， $f(-2) = 1$

(4) 解：C；由题意可知， $k_{MC} = -1 \Rightarrow k_{AB} = 1 \Rightarrow x - y = 0$

(5) 解：B；设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $M(x, y)$ ，由抛物线定义得： $x_1 + x_2 = |AB| - 4 = 6$ ， $x = 3$

(6) 解：A； $b = 2^{0.1} > 2^0 = 1 > \log_3 3 > \log_3 2 = a > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = c$

(7) 解：C；由题意得： $\alpha - \beta = 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$ ， $\cos(\alpha - \beta) = \cos \pi = -1$ ，反之，若 $\cos(\alpha - \beta) = -1$ ，则 $\alpha - \beta = 2k\pi + \pi$ ，角 α, β 的终边关于原点 O 对称

(8) 解：D；法一：由数量积的几何意义可知，取值范围是 $[2, 4]$

法二：坐标法可得同样结论。

法三：用几何运算也可以得到同样结论

(9) $y = \pm\sqrt{5}x$

解：B；由题意得： $|F_1B| = 2b$ ， $|BM| = 2a$ ， $|MF_2| = 2\sqrt{2}a$ ，

由双曲线定义得： $2b + 2a - 2\sqrt{2}a = 2a \Rightarrow b = \sqrt{2}a$

(10) 解：A； $i(t) = \frac{2500}{1 + 9e^{-0.2t}}$ ，求导得： $i'(t) = \frac{4500 \times e^{-0.2t}}{(1 + 9e^{-0.2t})^2} = \frac{4500}{81e^{-0.2t} + 18 + \frac{1}{e^{-0.2t}}}$ ，根据基本不等式得：

$0.2t = \ln 9 \Rightarrow t \approx 11$ ，选 A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分。）

(11) 解：-40；由二项式定理的通项公式得： $T_{r+1} = C_5^r 2^{5-r} (-1)^r x^{10-2r} \Rightarrow 10 - 2r = 4 \Rightarrow r = 3$

(12) 解：56，64；数据按从小到大排序得：46，48，51，53，53，56，56，56，58，64，66，71，它的中位数为 56； $80\% \times 12 = 9.6$ ，第 10 个数是 64

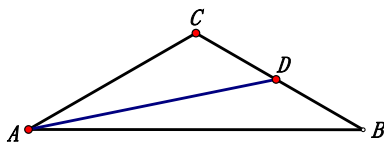
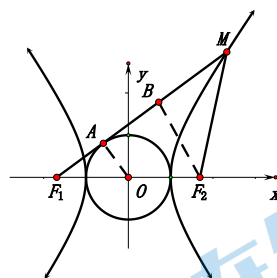
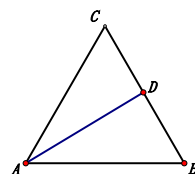
(13) 解：由正弦定理得： $\angle B = \frac{\pi}{6}$ ；

由余弦定理得： $AD = \sqrt{7}$ 。

(14) 解：开放性问题， $a_n = 2n - 1$ ，等

(15) 解：①④； $\frac{AC \perp BD}{AC \perp PD}$ 得： $AC \perp$ 平面 PBD ①正确；计算可得 $PO = \sqrt{5}$ ， $CF = 2\sqrt{2}$ ②不正确；

由线面角定义知， $\angle POD$ 就是直线 PO 与底面 $ABCD$ 所成的角， $\sin \angle POD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③不正确；



由 $AC \perp$ 平面 PBD 得, $AC \perp OE$, $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot OE = \sqrt{3} \times OE$, $|OE|_{\max} = \sqrt{5}$, 当 $PB \perp OE$ 时 $|OE|$ 最小,

$$|OE|_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ④正确.}$$

三、解答题 (本大题共 6 小题, 满分 85 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明.)

(16) 解: (I) 由题意得: $\frac{\pi}{6}\omega + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ 上单调, $\frac{T}{2} \geq \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega \leq 2$.

若选①: $\sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$, $\omega = 6k + 2$, 得 $\omega = 2$, 符合题意, 得: $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

若选③: 法一: $\frac{5\pi}{12}\omega + \varphi = m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, 可得 $\frac{\pi}{4}\omega = (m-k)\pi - \frac{\pi}{2}$, 即 $\omega = 4(m-k) - 2$,

可得 $\omega = 2$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 符合题意, 得: $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

法二: 若直接解出 $\frac{T}{4} = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega = 2$, 符合题意, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 符合题意, 得: $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$.

(II) 由 (I) 得 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$, $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$,

所以函数 $y = f(x)$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 的值域为 $[-\frac{1}{2}, 1]$.

(17) 解: (I) 在甲分配到对外联络服务的条件下, 乙被分配到场馆运行服务这一事件为 B ,

$$P(B) = \frac{1}{11}$$

(II) ξ 可取 0, 1, 2

$$P(\xi = 0) = (1 - \frac{1}{10})^2 = \frac{81}{100}; \quad P(\xi = 1) = C_2^1 (1 - \frac{1}{10}) \times \frac{1}{10} = \frac{18}{100}; \quad P(\xi = 2) = C_2^2 (\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{100}$$

ξ	0	1	2
P	$\frac{81}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{1}{100}$

$$E\xi = 2 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{50} \quad \text{(III) } p_1 > p_0$$

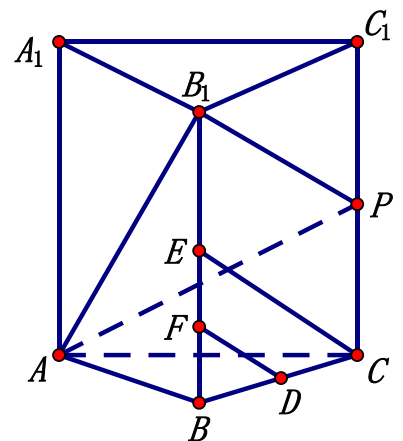
(18) 解: (I) 设 BB_1 的中点为 E , BE 的中点为 F ,

则 $EC \parallel B_1P$, $DF \parallel EC$, 则 $DF \parallel B_1P$,

$DF \not\subset$ 平面 AB_1P , $DF \parallel$ 平面 AB_1P .

(II) 设 O 是边 AC 的中点, Z 是 A_1C_1 的中点,

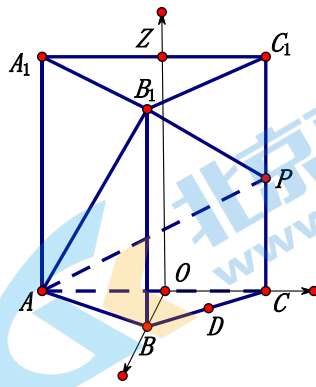
则 $OZ \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 为正三角形,



所以, $OB \perp AC$, OB , OC , OZ 两两垂直,

建立如图所示坐标系 $O-XYZ$.

则 $A(0, -1, 0)$, $B_1(\sqrt{3}, 0, 2)$, $P(0, 1, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 1)$,
 $\overrightarrow{AB_1} = (\sqrt{3}, 1, 2)$, 设平面 AB_1P 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,



$$\text{则} \begin{cases} 2y + z = 0 \\ \sqrt{3}x + y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, 1, -2),$$

平面 C_1AP 的法向量为 $\vec{n}_2 = (1, 0, 0)$,

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

所以二面角 B_1-AP-C_1 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

$$\overrightarrow{BB_1} = (0, 0, 2), \text{ 设点 } B \text{ 到平面 } AB_1P \text{ 的距离为 } d, \text{ 则 } d = \frac{|\overrightarrow{BB_1} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|} = \sqrt{2}.$$

(19) 解: (I) 当 $k=2$ 时, $f'(x) = 2\cos x + 2 \geq 0$, $f(x) = 2\sin x + 2x$ 单调递增, $f(0) = 0$, $f(x)$ 只有一个零点 $x=0$;

(II) 设 $g(x) = 2x - \sin x - \ln(x+1) \Rightarrow g'(x) = 2 - \cos x - \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow g(x)$ 增, $g(x) > g(0) = 0$.

(III) 解法一: 当 $k \geq -1$ 时, 由 (II) 得 $f(x) \geq -\sin x + 2x > \ln(x+1)$, 恒成立.

当 $k < -1$ 时, 设 $h(x) = f(x) - \ln(x+1) \Rightarrow h'(x) = 2 + k\cos x - \frac{1}{x+1} \Rightarrow h''(x) = -k\sin x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$.

$h'(x)$ 增, $h'(0) = k+1 < 0$, $h'(\frac{\pi}{2}) = 2 - \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} > 0$ 由零点定理, $h'(x_0) = 0$, 所以

$h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上减, $h(x_0) < h(0) = 0$ 不恒成立, 所以 k 的最小值为 -1 .

解法二: 设 $h(x) = f(x) - \ln(x+1) \Rightarrow h'(x) = 2 + k\cos x - \frac{1}{x+1}$.

① 当 $k \geq -1$ 时, $h'(x) = k\cos x + 2 - \frac{1}{x+1} > 0$, $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 增, $h(x) > h(0) = 0$, $f(x) > \ln(x+1)$ 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立.

② 当 $k < -1$ 时, 设 $h(x) = f(x) - \ln(x+1) \Rightarrow h'(x) = 2 + k\cos x - \frac{1}{x+1} \Rightarrow h''(x) = -k\sin x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$.

$h'(x)$ 增, $h'(0) = k+1 < 0$, $h'(\frac{\pi}{2}) = 2 - \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} > 0$ 由零点定理, $h'(x_0) = 0$, 所以

$h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上减, $h(x_0) < h(0) = 0$ 不恒成立, 所以 k 的最小值为 -1 .

(20) 解: (I) $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a=2$, 得 $b=1$, C 的方程: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(II)

2022 北京高三各区一模试题下载

北京高考资讯公众号搜集整理了【**2022 北京各区高三一模试题&答案**】，想要获取试题资料，关注公众号，点击菜单栏【**高三一模**】—【**一模试题**】，即可**免费获取**全部一模试题及答案，欢迎大家下载练习！

还有更多**一模排名**等信息，考后持续更新！



微信搜一搜

北京高考资讯

A screenshot of the WeChat public account interface for '北京高考资讯'. On the left is a vertical menu with options: '一模试题' (highlighted with a red box), '二模试题', '高考真题', '期末试题', and '各省热门试题'. To the right of the menu is a QR code with the text '识别二维码查看下载 北京各区一模试题&答案'. At the bottom is a navigation bar with three items: '高三一模' (highlighted with a red box), '热门资讯', and '福利资料'. On the right side of the screenshot is a promotional graphic with an orange background. It features a cartoon student sitting at a desk with books, writing. Text bubbles around the student say '这里有最新热门试题' and '考后最快更新分享'.