2023 北京门头沟高三一模

数　　学

2023．4

考生须知	1．本试卷答案共 12 页，共 3 道大题，21 个小题．满分 150 分．考试时间 120 分钟． 2．在试卷和答题卡上准确填写学校和姓名，并将考试编号填写（或条形码粘贴）在答题卡相应位置处． 3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答． 4．考试结束，将试卷、答题卡和草稿纸一并交回．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

（1）已知集合 $A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$B=\{x||x|>2\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{-4,-3,3,4\}$　　（B）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

（C）$\{-2,-1,0,1,2\}$　　（D）$[-2,2]$

（2）复数 $z=(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})$，则 $|z|=$

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$\sqrt{10}$

（C）2　　（D）3

（3）双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，则其渐近线方程为

（A）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（B）$y=\pm\sqrt{3}x$

（C）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$　　（D）$y=\pm 2x$

（4）中国古代数学著作《九章算术》是人类科学史上应用数学的最早巅峰.书里记载了这样一个问题“今有女子善织，日自倍，五日织五尺.问日织几何？”译文是“今有一女子很会织布，每日加倍增长，5 天共织 5 尺，问每日各织布多少尺？”，则该女子第二天织布

（A）$\dfrac{5}{31}$尺　　（B）$\dfrac{10}{31}$尺

（C）$\dfrac{15}{16}$尺　　（D）$\dfrac{5}{16}$尺

（5）若点 M 是圆 $C:x^2+y^2-4x=0$ 上的任一点，直线 $l:x+y+2=0$ 与 x 轴、y 轴分别相交于 A、B 两点，则 $\angle MAB$ 的最小值为

（A）$\frac{\pi}{12}$　　　　（B）$\frac{\pi}{4}$

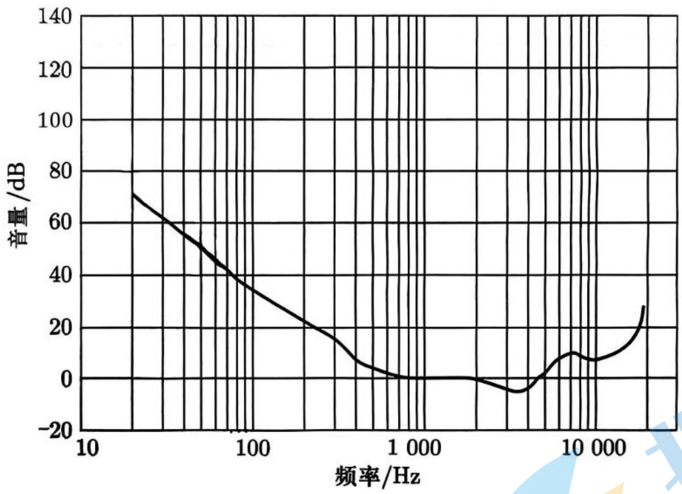
（C）$\frac{\pi}{3}$　　　　（D）$\frac{\pi}{6}$

（6）在平面直角坐标系中，角 α 与 β 的顶点在原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边构成一条直线，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos(\alpha+\beta)=$

（A）1　　　　（B）$\frac{1}{3}$

（C）$-\frac{1}{3}$　　　　（D）-1

（7）在声学中，音量被定义为：$L_p=20\lg\frac{p}{p_0}$，其中 L_p 是音量（单位为 dB），p_0 是基准声压为 $2\times10^{-5}\,p_a$，p 是实际声音压强.人耳能听到的最小音量称为听觉下限阈值.经过研究表明，人耳对于不同频率的声音有不同的听觉下限阈值，如下图所示，其中 240Hz 对应的听觉下限阈值为 20 dB，1000 Hz 对应的听觉下限阈值为 0 dB，则下列结论正确的是



（A）音量同为 20 dB 的声音，$30\sim100\,Hz$ 的低频比 $1000\sim10000\,Hz$ 的高频更容易被人们听到.

（B） 听觉下限阈值随声音频率的增大而减小.

（C） 240Hz 的听觉下限阈值的实际声压为 $0.002Pa$.

（D） 240Hz 的听觉下限阈值的实际声压为1000Hz 的听觉下限阈值实际声压的10 倍.

（8） 已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，则“$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线”是“$|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant||\vec{a}|-|\vec{b}||$”的

（A） 充分不必要条件　　　　（B）必要不充分条件

（C） 充要条件　　　　（D）即不充分也不必要条件

（9）已知函数 $f(x)=e^x$，若存在 $x_0\in[-1,2]$ 使得 $f(t)=x_0+f(x_0)-t$ 恒成立，则 $b=f(x_0)-t$ 的取值范围

（A） $[0,\frac{1}{e}+1]$　　　　（B）$[\frac{1}{e}+1,e^2-2]$

（C） $[1,\frac{1}{e}+1]$　　　　　　　　（D）$[1,e^2-2]$

（10）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}a_n^2$.

① 数列 $\{a_n\}$ 每一项 a_n 都满足 $0<a_n\leqslant 1\,(n\in\mathbf{N}^*)$

② 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n<2$；

③ 数列 $\{a_n\}$ 每一项 a_n 都满足 $a_n\leqslant\frac{2}{n+1}$ 成立;

④ 数列 $\{a_n\}$ 每一项 a_n 都满足 $a_n\geqslant(\frac{1}{2})^{n-1}\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

其中，所有正确结论的序号是

（A）①③　　　　　　（B） ②④

（C）①③④　　　　　（D） ①②④

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分.）

（11）在 $(2x^2-1)^6$ 的展开式中，x^2 的系数为______.（用数字作答）

（12）在边长为 4 的正 $\triangle ABC$ 中，点 P 是边 BC 上的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=$______.

（13）同一种产品由甲、乙、丙三个厂商供应．由长期的经验知，三家产品的正品率分别为 0.95、0.90、0.80，甲、乙、丙三家产品数占比例为 2 : 3 : 5，将三家产品混合在一起．从中任取一件，求此产品为正品的概率______.

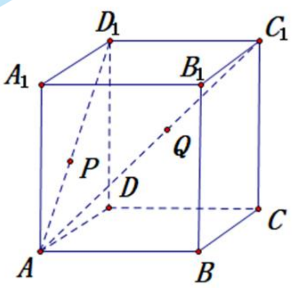
（14）设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})\,(\omega>0)$.

①给出一个 ω 的值，使得 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 后得到的函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称，$\omega=$_____；

②若 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有两个零点，则 ω 的取值范围是______.

（15）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为1，已知点 P，Q 分别是线段 AD_1，AC_1 上的动点(不含端点).

其中所有正确结论的序号是_______.



① PQ 与 B_1C 垂直；

②直线 PQ 与直线 CD 不可能平行;

③二面角 $P-AC-Q$ 不可能为定值;

④则 $|PQ|+|QC|$ 的最小值是 $\frac{4}{3}$.

其中所有正确结论的序号是_______.

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明.）

（16）（本小题满分 12 分）

已知在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\sqrt{3}b\cos A-a\sin B=0$. D是AB的中点，$AC=2$，$CD=2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求$\angle A$的大小；

（Ⅱ）求a的值.

（17）（本小题满分13分）

周末李梦提出和父亲、母亲、弟弟进行羽毛球比赛，李梦与他们三人各进行一场比赛，共进行三场比赛，而且三场比赛相互独立. 根据李梦最近分别与父亲、母亲、弟弟比赛的情况，得到如下统计表：

	父亲	母亲	弟弟
比赛的次数	50	60	40
李梦获胜的次数	10	30	32

以上表中的频率作为概率，求解下列问题.

（Ⅰ）如果按照第一场与与父亲比赛、第二场与母亲比赛、第三场与弟弟比赛的顺序进行比赛.

（i）求李梦连胜三场的概率；

（ii）如果李梦胜一场得1分，负一场得0分，设李梦的得分为X，求X的分布列与期望；

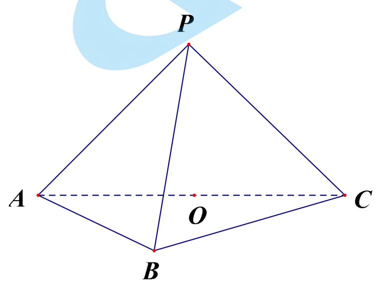
（Ⅱ）记“与父亲、母亲、弟弟三场比赛中李梦连胜二场”的概率为p，此概率p与父亲、母亲、弟弟出场的顺序是否有关？如果有关，什么样的出场顺序此概率p最大（不必计算）？如果无关，请给出简要说明 .

（18）（本小题满分15分）如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB=BC=2$，$PA=PB=PC=2$，O为AC的中点.

（Ⅰ）证明：$PB\perp AC$

（Ⅱ）再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角$B-PC-A$的余弦值及点A到平面BPC的距离.

① $AC=2\sqrt{2}$　　　② $PO\perp BC$



（19）（本小题满分15分）

已知$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(x+1)+ax\ (a\in \mathrm{R})$.

（Ⅰ）当$a=2$时，求函数$f(x)$在$(0,0)$处的切线方程；

（Ⅱ）求证: $\frac{1}{2}x^2+x\geqslant \ln(x+1)$ ；

（III）若 $f(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

（20）（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，长轴的左端点为 $A(-2,0)$.

（Ⅰ）求 C 的方程;

（Ⅱ）过椭圆 C 的右焦点的任一直线 l 与椭圆 C 分别相交于 M,N 两点，且 AM，AN 与直线 $x=4$，分别相交于 D,E 两点，求证：以 DE 为直径的圆恒过 x 轴上定点，并求出定点.

21.（本题满分 15 分）

已知集合 $M=\{\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n\}\ (n\geq3)$．若对于集合 M 的任意 k 元子集 A， A 中必有 4 个元素的和为 -1，则称这样的正整数 k 为“好数”，所有好数的最小值记作 $g(M)$.

（I）当 $n=3$，即集合 $M=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$.

（i）写出 M 的一个子集 B，且 B 中存在 4 个元素的和为 -1；

(ii) 写出 M 的一个 5 元子集 C，使得 C 中任意 4 个元素的和大于 -1；

（II）证明： $g(M)>n+2$；

（III）证明： $g(M)=n+3$.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

（1）解：A；易得 A

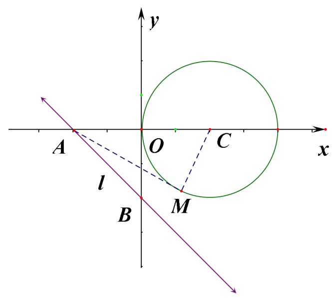
（2）解：B；$z=-3+\mathrm{i}\Rightarrow|z|=\sqrt{10}$，也可直接计算 $|z|=|-1+i||2+i|=\sqrt{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}$

（3）解：C；由题意得：$\dfrac{c}{a}=2\Rightarrow b^2=3a^2\Rightarrow y=\pm\dfrac{a}{b}x\Rightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

（4）解：B；设第一天织布为 a_1 尺，公比为 q，则 $q=2$，$5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}\Rightarrow a_1=\dfrac{5}{31}$ $a_2=\dfrac{10}{31}$

（5）解：A；由题意可知，$\angle CAB=\dfrac{\pi}{4}$，若 $\angle MAB$ 最小，则 AM 应是圆 C 的切线，$|AC|=4,|MC|=2\Rightarrow\angle CAM=\dfrac{\pi}{6}$

所以最小值为 $(\angle MAB)_{\min}=\angle CAB-\angle CAM=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}$



（6）解：C；由题意得：$\beta=\alpha+\pi\Rightarrow\sin\beta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，若

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\cos\beta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

或 $$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$$

（7）解答：D；音量为 20 dB，$30\sim100Hz$ 的低频下限阈值比 $1000\sim10000Hz$ 的高频下限阈值要大，所以更不容易被人们听到，故 A 错误；B 显然错误；根据音量公式，计算得 $p_{240\mathrm{Hz}}=2\times10^{-4}\mathrm{Pa}$，故 C 错误；计算得 $p_{1000\mathrm{Hz}}=2\times10^{-5}\mathrm{Pa}$，前者为后者的 10 倍，D 正确.

（8）解：B；$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线但反向，显然 “$|\vec{a}-\vec{b}|\le\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$” 不成立；

“$|\vec{a}-\vec{b}|\le\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|$” 成立，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同，可推出它们共线。 也可利用数量积推理

$|\vec{a}-\vec{b}|\le\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right|\Leftrightarrow-2\vec{a}\cdot\vec{b}\le-2|\vec{a}||\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}\ge|\vec{a}||\vec{b}|\Rightarrow$ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同

（9）解：设 $h(x)=f(x)+x=\mathrm{e}^x+x\Rightarrow h(x)$，则递增，由题意 $f(t)+t=f(x_0)+x_0\Rightarrow h(t)=h(x_0)\Rightarrow t=x_0$，

则 $b=f(x_0)-x_0$，设 $m(x)=\mathrm{e}^x-x$ $x\in[-1,2]\Rightarrow m'(x)=\mathrm{e}^x-1=0\Rightarrow x=0$，$m(x)$ 在 $[-1,0]$ 递减，在 $[0,2]$ 上递增，$m(x)_{\min}=m(0)=1$，$m(x)_{\max}=\mathrm{e}^2-2$，D 正确

（10）解：C；① $a_{n+1}=a_n(1-\frac{1}{2}a_n), 0<a_1\le 1\Rightarrow a_2=a_1(1-\frac{1}{2}a_1)\Rightarrow 0<a_2<1$，由递推得 $0<a_n\le 1$，①正确；

② $a_1=1,a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{3}{8},a_4=\frac{3}{8}(1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{8})>\frac{1}{8}\Rightarrow S_4>2$，所以②不正确

③ $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n(2-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2-a_n}\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2-a_n}>\frac{1}{2}$，叠加得：

$\frac{1}{a_{n+1}}>\frac{n}{2}+1\Rightarrow\frac{1}{a_{n+1}}>\frac{n+2}{2}\Rightarrow a_{n+1}<\frac{2}{n+2}\Rightarrow a_n<\frac{2}{n+1}(n\ge 2, n\in N^*)$，③正确；

④ $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}a_n^2\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{2}a_n\ge\frac{1}{2}$，叠乘：$a_{n+1}\ge(\frac{1}{2})^n\Rightarrow a_n\ge(\frac{1}{2})^{n-1}$，④正确；

正确结论 C

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分.）

（11）解：-12；由二项式定理的通项公式得：$T_{r+1}=C_6^r2^{6-r}(-1)^rx^{12-2r}\Rightarrow 12-2r=2\Rightarrow r=5$

（12）解：由向量数量积的几何意义得：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=3\times4=12$

（13）解:设甲工厂产品数为 $2n$,乙工厂产品数为 $3n$,丙工厂产品数为 $5n$ 则共有产品数为女生为 $10n$,设从中任取一件此产品为正品这一事件为 A ,则

$$P(A)=\frac{0.95\times2n+0.9\times3n+0.8\times5n}{10n}=0.86$$

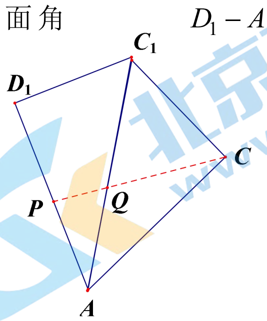
（14）解：$\omega=2$；$-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=k\pi\Rightarrow\omega=2-k$；$(\frac{5}{3},\frac{8}{3}]$；$2\pi<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\le3\pi\Rightarrow\frac{5}{3}<\omega\le\frac{8}{3}\Rightarrow(\frac{5}{3},\frac{8}{3}]$

（15）解:①：$\begin{cases}B_1C\perp BC_1\\B_1C\perp AB\\AB\cap BC_1\end{cases}\Rightarrow B_1C\perp$ 平面ABC_1D_1 $PQ\subset ABC_1D_1\Rightarrow PQ\perp B_1C$. ①正确；

②：$CD//ABC_1D_1$，可得：过 CD 的平面与平面 ABC_1D_1 相交，与直线 AD_1,AC_1 相交于 P,Q，则直线 $PQ//CD$，②错

③：二面角 $P-AC-Q$ 就是平面ACD_1 与平面 ACC_1 所成的二面角 D_1-AC-C_1，所以③错

④：把平面 ACC_1 与平面 AC_1D_1 在同一平面上；



设 $\angle CAC_1=\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha<\frac{\pi}{4}$

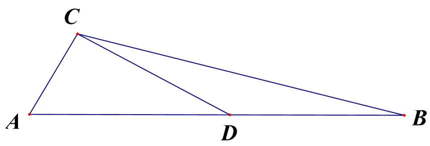
则

$$\angle D_1AC=2\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow P\in\text{线段}AD_1,\sin2\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow|CP|=|AC|\times\sin2\alpha=\frac{4}{3}$$

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明.）

（16）解：（Ⅰ）由 $\sqrt{3}b\cos A-a\sin B=0$ 得：$\sqrt{3}\sin B\cos A+\sin A\sin B=0\Rightarrow\sqrt{3}\cos A-\sin A=0$

$\tan A=\sqrt{3}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$



（Ⅱ）由余弦定理得：

$12=4+AD^2-2AD\times 2\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow AD^2-2AD-8=0$

解得：$AD=4$，则 $AB=8$，由余弦定理得：$BC^2=4+64-2\times 2\times 8\cos\frac{\pi}{3}=52\Rightarrow BC=2\sqrt{13}$

（17）解：（Ⅰ）设李梦连胜三场这一事件为 A，则 $P(A)=0.2\times 0.5\times 0.8=0.08$

（Ⅱ）X 可取 0，1，2，3，则：$P(X=0)=0.8\times 0.5\times 0.2=0.08$

$P(X=1)=(1-0.2)\times(1-0.5)\times 0.8+(1-0.2)\times 0.5\times(1-0.8)+0.2\times(1-0.5)\times(1-0.8)=0.42$

$P(X=2)=(1-0.2)\times 0.5\times 0.8+0.2\times(1-0.5)\times 0.8+0.2\times 0.5\times(1-0.8)=0.42$

$P(X=3)=0.2\times 0.5\times 0.8=0.08$

期望：$EX=0\times 0.08+1\times 0.42+2\times 0.42+3\times 0.08=1.5$

（Ⅲ）有关；李梦第二场与弟弟比赛的概率 p 最大 。计算如下：

①设父亲在第二场为 A，李梦赢的概率为 $P(A)=0.2[0.5\times(1-0.8)+(1-0.5)\times 0.8]=0.25$；

②设母亲在第二场为 B，李梦赢的概率为 $P(B)=0.5[0.2\times(1-0.8)+(1-0.2)\times 0.8]=0.34$；

③设弟弟在第二场为 C，李梦赢的概率为 $P(C)=0.8[(1-0.2)\times 0.5+0.2\times(1-0.5)]=0.4$；

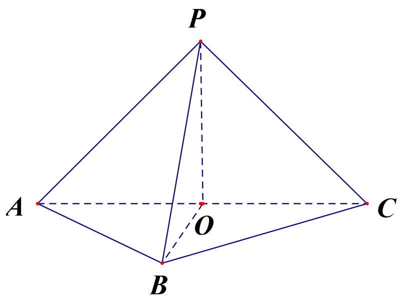
弟弟在第二场比赛 .

（18）解：（Ⅰ）连结 PO，OB

$AB=BC\Rightarrow OB\perp AC$；同理得：$PO\perp AC$

$PO\cap OB=O$；$AC\perp$ 平面POB

得：$AC\perp PB$



（Ⅱ）选择①

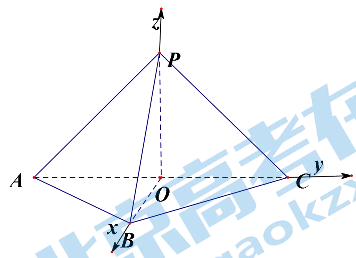
由题意得：$AB^2+BC^2=AC^2\Rightarrow AB\perp BC$，同理得：$PA\perp PC$，

则 $OP=OB=\sqrt{2}$，$PO^2+OB^2=PB^2$

得：$PO\perp OB$，由(Ⅰ)可得：$PO\perp AC$

$OB\cap AC=O$，$PO\perp$ 平面ABC

所以，OB,OC,OP 两两垂直，建立如图所示坐标系



则 $B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0),P(0,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},0-\sqrt{2})$

$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}_1=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}_1=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_1=(1,1,1)$，

平面 PAC 的法向量 $\vec{n}_2=(1,0,0)$，可得：$\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

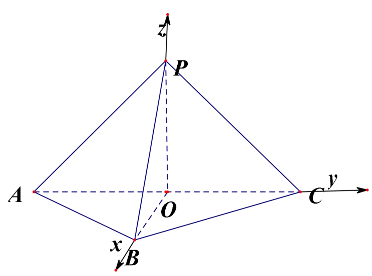
$A(0,-\sqrt{2},0)\Rightarrow\overrightarrow{PA}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，点 A 到平面 BPC 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

（Ⅱ）选择②

由（Ⅰ）得：$PO\perp AC,PO\perp BC$，可得：$PO\perp$ 平面ABC，由题意 $PA=PB=PC$

则 $BO=AO=CO$，可得$\triangle ABC$ 为直角三角形，$AB=BC=2\Rightarrow OB=OC=OA=\sqrt{2}$

OB,OC,OP 两两垂直，建立如图所示坐标系



则 $B(\sqrt{2},0,0),C(0,\sqrt{2},0),P(0,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{2},0-\sqrt{2})$

$\overrightarrow{PC}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}_1=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}_1=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}_1=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}_1=(1,1,1)$，

平面 PAC 的法向量 $\vec{n}_2=(1,0,0)$，可得：$\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$A(0,-\sqrt{2},0)\Rightarrow\overrightarrow{PA}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，点 A 到平面 BPC 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{n}_1|}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

（19）解：（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f'(x)=x-\frac{1}{x+1}+2\Rightarrow f'(0)=1$，$f(0)=0$ 切线方程为：$y=x$

（Ⅱ）设 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\ln(x+1)\Rightarrow g'(x)=x+1-\frac{1}{x+1}=\frac{x(x+2)}{x+1}$，

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值 $g(0)=0$	单调递增

$g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上减，在 $(0,+\infty)$ 上增，$g(x)_{\min}=g(0)=0$，所以 $g(x)\geq g(0)=0$.

（Ⅲ）**①当 $a\geq 1$ 时**

方法一：由（Ⅱ）得 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2-(\frac{1}{2}x^2+x)+ax=(a-1)x\geqslant 0$

方法二：由（Ⅱ）得 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)+x\geqslant 0$

方法三：$f'(x)=x-\frac{1}{x+1}+a\Rightarrow f'(0)=a-1\geq 0$，设 $m(x)=f'(x)=x-\frac{1}{x+1}+a\Rightarrow m'(x)=1+\frac{1}{(x+1)^2}>0$，

可得：$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上增，

则 $f'(x)>f'(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上增，$f(x)\geq f(0)=0$；

②当 $a<1$ 时，$f'(0)=a-1<0$，$m(x)=f'(x)\Rightarrow m'(x)=1+\frac{1}{(x+1)^2}>0$，$f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上增，**方法一：**

$f'(x)=\frac{x^2+(a+1)x+a-1}{x+1}=0$ 得 $x_1=\frac{-(a+1)+\sqrt{(a+1)^2-4(a-1)}}{2}$，则 $f'(x)$ 在 $[0,x_1)$ 上 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 在 $[0,x_1)$ 上减，$f(x)<f(0)=0$，$f(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 不恒成立，不合题意。

方法二：$f'(1-a)=1-a-\frac{1}{2-a}+a=\frac{1-a}{2-a}>0$，由零点存在定理得：$\exists t, f'(t)=0$，

则 $f'(x)$ 在 $[0,t)$ 上 $f'(x)<0$，得 $f(x)$ 在 $[0,t)$ 上减，$f(x)<f(0)=0$，$f(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 不恒成立，不合题意。

综上所述，当 $a\geq 1$，$f(x)\geq 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立.

（20）　解：（Ⅰ）$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a=2$，得 $b=\sqrt{3}$，C 的方程：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（Ⅱ）

方法一： 设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$ $\begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

由韦达定理得： $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$， $y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$

$AM: y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2) \Rightarrow D(4,\frac{6y_1}{x_1+2})$，同理得： $AN: y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2) \Rightarrow E(4,\frac{6y_2}{x_2+2})$

设 x 轴上一点 $P(t,0)$，则 $\overrightarrow{PD}=(4-t,\frac{6y_1}{x_1+2})$，同理得: $\overrightarrow{PE}=(4-t,\frac{6y_2}{x_2+2})$

则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(4-t,\frac{6y_1}{x_1+2})\cdot(4-t,\frac{6y_2}{x_2+2})=(4-t)^2+\frac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$(x_1+2)(x_2+2)=(my_1+3)(my_2+3)$

由韦达定理代入得：

$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(4-t)^2+\frac{36y_1y_2}{(my_1+3)(my_2+3)}=(4-t)^2+\frac{36\times(-9)}{-9m^2-18m^2+27m^2+36}=(4-t)^2-9=0$

得： $t-4=\pm3 \Rightarrow t=1$ 或 $t=7$，二定点分别为 $P(1,0)$， $Q(7,0)$.

方法二： ①当直线 MN 的斜率不存在时，直线 MN 的直线方程： $x=1$，

联立得： $\begin{cases} x=1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow M(1,\frac{3}{2}), N(1,-\frac{3}{2})$， $AM: y=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow D(4,3)$，同理得： $E(4,-3)$

以 DE 为直径的圆过 x 轴上定点（1，0）（7，0）

②当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的直线方程： $y=k(x-1)$，

联立得： $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，由得： $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$

则直线 $AM: y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2) \Rightarrow D(4,\frac{6y_1}{x_1+2})$，同理得： $E(4,\frac{6y_2}{x_2+2})$，

设 x 轴上一点 $P(t,0)$，则 $\overrightarrow{PD}=(4-t,\frac{6y_1}{x_1+2})$，同理得: $\overrightarrow{PE}=(4-t,\frac{6y_2}{x_2+2})$

则 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(4-t,\frac{6y_1}{x_1+2})\cdot(4-t,\frac{6y_2}{x_2+2})=(4-t)^2+\frac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$y_1y_2=k^2[(x_1-1)(x_2-1)]=\frac{-9k^2}{3+4k^2}$，由韦达定理代入得：

$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(4-t)^2+\frac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=(4-t)^2+\frac{36\times\frac{-9k^2}{3+4k^2}}{\frac{36k^2}{3+4k^2}}=(4-t)^2-9=0$

得： $t-4=\pm3 \Rightarrow t=1$ 或 $t=7$，二定点分别为 $P(1,0)$， $Q(7,0)$.

以 DE 为直径的圆过 x 轴上定点（1，0）（7，0）

方法三：

①当直线 MN 的斜率不存在时，直线 MN 的直线方程： $x=1$，

联立得： $\begin{cases} x=1 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow M(1,\frac{3}{2}), N(1,-\frac{3}{2})$， $AM: y=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow D(4,3)$，同理得： $E(4,-3)$

以 DE 为直径的圆过 x 轴上定点（1，0）（7，0）

②当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的直线方程：$y=k(x-1)$，

联立得：$\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，由得：$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$

则直线 $AM: y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2) \Rightarrow D(4,\dfrac{6y_1}{x_1+2})$，同理得：$E(4,\dfrac{6y_2}{x_2+2})$，

由①可得 $P(1,0)$ 或 $P(7,0)$

若 $P(1,0)$ 时，则 $\overrightarrow{PD}=(3,\dfrac{6y_1}{x_1+2})$，同理得: $\overrightarrow{PE}=(3,\dfrac{6y_2}{x_2+2})$ $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(3,\dfrac{6y_1}{x_1+2})\cdot(3,\dfrac{6y_2}{x_2+2})=9+\dfrac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$y_1y_2=k^2[(x_1-1)(x_2-1)]=\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}$，由韦达定理代入得：$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=9+\dfrac{36\times\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}}{\dfrac{36k^2}{3+4k^2}}=9-9=0$

若 $P(7,0)$ 时，$\overrightarrow{PD}=(3,\dfrac{6y_1}{x_1+2})$，同理得: $\overrightarrow{PE}=(3,\dfrac{6y_2}{x_2+2})$ $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=(3,\dfrac{6y_1}{x_1+2})\cdot(3,\dfrac{6y_2}{x_2+2})=9+\dfrac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$y_1y_2=k^2[(x_1-1)(x_2-1)]=\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}$，由韦达定理代入得：$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}=9+\dfrac{36\times\dfrac{-9k^2}{3+4k^2}}{\dfrac{36k^2}{3+4k^2}}=9-9=0$

21.解：（I）（i）开放性题目，这样的集合不止一个；$B=\{-3,-2,-1,1,2\} \Rightarrow -3+(-1)+1+2=-1$.

（ii）$C=\{-2,-1,1,2,3\}$.

（II）取集合 M 的 $n+2$ 元子集 $A=\{-2,-1,1,2,\cdots,n\}$，则它最小 4 个元素的和为 $-2+(-1)+1+2=0>-1$，所以，对于任意的 $n+2$ 元子集，不一定存在 4 个元素的和等于 -1，所以 $g(M)>n+2$.

（III）由（II）可知，$k\geqslant n+3$.

当 $k=n+3$ 时，把集合 M 的元素按和为 -1 分组，得：

$M=\{\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n\}=\{-n,n-1\}\cup\{-n+1,n-2\}\cup\{-n+2,n-3\}\cup\cdots\cup\{-2,1\}\cup\{-1,n\}$

易得，A 中至少有 2 个二元子集满足 $X_a=\{a,-a-1\}, X_b=\{b,-b-1\}\quad(-n\le a<b\le -2)$.

若把集合 M 的元素按和为 0 分组，得：

$M=\{\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n\}=\{-n,n\}\cup\{-n+1,n-1\}\cup\{-n+2,n-2\}\cdots\cup\{-1,1\}$.

易得，A 中至少有 3 个二元子集满足 $Y_c=\{c,-c\}, Y_d=\{d,-d\}, Y_e=\{e,-e\}$.

而集合 $Y_c,Y_d\ Y_e$ 两两互不相交，X_a 与 $Y_c,Y_d\ Y_e$ 中每一个至多有一个公共元素，所以，$Y_c,Y_d\ Y_e$ 中必有一个与 X_a 没有公共元素，不妨设 $X_a\cap Y_c=\phi$，则 $X_a\cup Y_c$ 的 4 个元素就是 A 的 4 个互异元素，而这 4 个元素的和为 -1.

所以 $g(M)=n+3$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〃精益求精、专业严谨〃的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。