2018-2019 学年北京市十一学校高二（上）期中数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，共 30.0 分）

1. 椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦距为（　　）

A. 10　　B. 5　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{7}$

2. 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，那么它的焦点到渐近线的距离为（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 4

3. 函数 $f(x)=1-x+x^2$，则函数 $y=f(x)$ 在 $x=3$ 处的瞬时变化率为（　　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 8

4. 直线 l：$x=my+2$ 与圆 M：$(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 相切，则 m 的值为（　　）

A. 1 或 −6　　B. 1 或 −7　　C. −1 或 7　　D. 1 或 $-\frac{1}{7}$

5. 若双曲线的顶点为椭圆$x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 长轴的端点，且双曲线的离心率与该椭圆的离心率的积为 1，则双曲线的方程是（　　）

A. $x^2-y^2=1$　　B. $y^2-x^2=1$　　C. $x^2-y^2=2$　　D. $y^2-x^2=2$

6. 设双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率是 3，则其渐近线的方程为（　　）

A. $x\pm 2\sqrt{2}y=0$　　B. $2\sqrt{2}x\pm y=0$　　C. $x\pm 8y=0$　　D. $8x\pm y=0$

7. 已知曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 右焦点为 F，P 为双曲线左支点上一点，点 A（0，$\sqrt{2}$），则△APF 周长的最小值为（　　）

A. $4(1+\sqrt{2})$　　B. $4+\sqrt{2}$　　C. $2(\sqrt{2}+\sqrt{6})$　　D. $\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

8. 已知圆 M：$x^2+y^2-2ay=0$（$a>0$）截直线 $x+y=0$ 所得线段的长度是 $2\sqrt{2}$，则圆 M 与圆 N：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的位置关系是（　　）

A. 内切　　B. 相交　　C. 外切　　D. 相离

9. 已知曲线 C_1：$|y|-x=2$ 与曲线 C_2：$\lambda x^2+y^2=4$ 恰好有两个不同的公共点，则实数λ的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]\cup[0,1)$　　B. $(-1,1]$

C. $[-1,1)$　　D. $[-1,0]\cup(1,+\infty)$

10. 点 P 在曲线 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，若存在过 P 的直线交曲线 C 于 A 点，交直线 l：$x=4$ 于 B 点，满足$|PA|=|PB|$或$|PA|=|AB|$，则称点 P 为"H 点"，那么下列结论正确的是（　　）

A. 曲线 C 上的所有点都是"H 点"

B. 曲线 C 上仅有有限个点是"H 点"

C. 曲线 C 上的所有点都不是"H 点"

D. 曲线 C 上有无穷多个点(但不是所有的点)是"H 点"

二、填空题（本大题共 8 小题，共 24.0 分）

11. 由直线 $y=x+3$ 上的点向圆 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 引切线，则切线长的最小值为______.

12. 过点（1，2）且与 $y^2=4x$ 有且只有一个公共点的直线方程为______.

13. 点 P 是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点，F_1，F_2 分别是椭圆的左、右焦点，若$|PF_1||PF_2|=12$，则$\angle F_1PF_2$ 的大小______.

14. 已知点 P（x，y）是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的动点，则 $2x+4y$ 的取值范围是______.

15. 已知直线 $y=\frac{x}{2}$与双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）交于两点，则该双曲线的离心率的取值范围是______.

16. 已知点 M（m，0），$m>0$ 和抛物线 C：$y^2=4x$．过 C 的焦点 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，若$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，且$|\overrightarrow{MF}|=|\overrightarrow{MA}|$，则 $m=$______.

17. 设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）和圆 O：$x^2+y^2=b^2$，若椭圆 C 上存在点 P，使得过点 P 引圆 O 的两条切线，切点分别为 A，B，满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则椭圆的离心率的取值范围是______.

18. 曲线 C 为到两定点 M（-2，0），N（2，0）距离的乘积为常数 16 的动点 P 的轨迹，以下结论中，正确的为______（把你认为正确的序号都填在横线上）
①曲线 C 一定经过原点；
②曲线 C 关于 x 轴对称，但不关于 y 轴对称；
③△MPN的面积不大于 8；
④曲线 C 在一个面积为 60 的矩形范围内．

三、解答题（本大题共 4 小题，共 46.0 分）

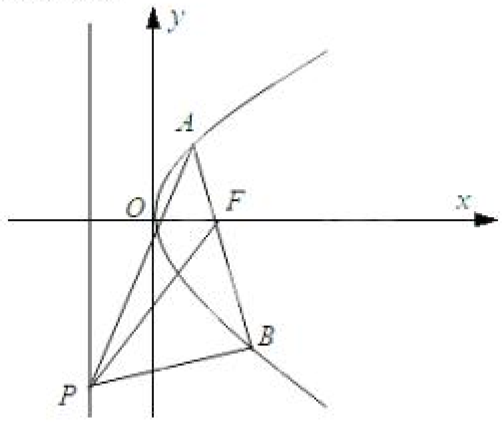
19. 已知点 P（2，2），圆 C：$x^2+y^2-8y=0$，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 M，O 为坐标原点．
（1）求 M的轨迹方程；
（2）当$|OP|=|OM|$时，求 l 的方程及△POM的面积．

20. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，长轴长为 $2\sqrt{3}$，F 为椭圆的右焦点．
（1）求椭圆 C 的方程；
（2）已知点 A（3，0），P 是椭圆上的点，求$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}$的最小值；
（3）点 M是以长轴为直径的圆 O 上一点，圆 O 在点 M处的切线交直线 $x=3$ 于点 N；求证：过点 M 且垂直于 ON的直线 l 过定点．

21、已知抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上点 M（3，m）到焦点 F 的距离为4．

（Ⅰ）求抛物线方程；

（Ⅱ）点 P 为准线上任意一点，AB 为抛物线上过焦点的任意一条弦，设直线 PA，PB，PF 的斜率为 k_1，k_2，k_3，问是否存在实数λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$ 恒成立．若存在，请求出λ的值；若不存在，请说明理由．

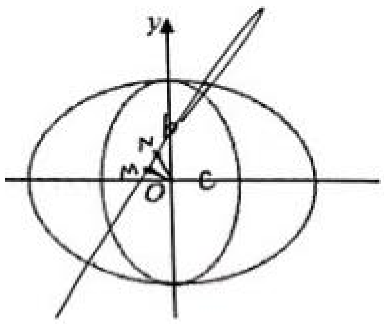


22、如图，曲线Γ由两个椭圆 T_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）和椭圆 T_2：$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1$（$b>c>0$）组成，当 a，b，c 成等比数列时，称曲线Γ为"猫眼曲线"

（1）若猫眼曲线Γ过点 M（0，$-\sqrt{3}$）），且 a，b，c 的公比为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求猫眼曲线Γ的方程；

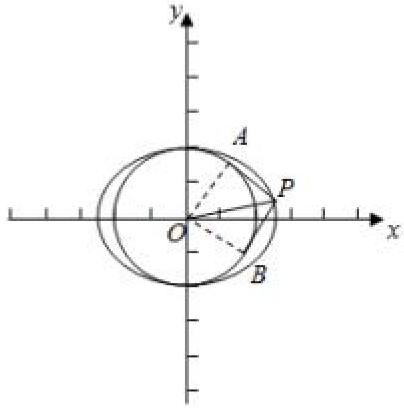
（2）对（1）中求出的猫眼曲线Γ，任意作一条斜率为 k（$k\neq0$）且不过原点的直线与椭圆 T_1，T_2 均相交，交椭圆 T_1 所得弦的中点为 M，交椭圆 T_2 所得弦的中点为 N，设 O 为坐标原直线 OM，ON 的斜率分别为 k_{OM}，k_{ON}，求证$\frac{k_{OM}}{k_{ON}}$为定值；

（3）已知 t_1 的长轴长是 4，T_2 的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，斜率为$\sqrt{2}$的直线 1 为椭圆 T_2 的切线交椭圆 T_1 于点 A，B，N 为椭圆 T_1 上的任意一点（点 N 与点 A，B 不重合），求△ABN 面积的最大值．



17.【答案】$[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

【解析】



解：由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 可得∠APB=90°，
由圆的切线质可得|PA|=|PB|，
∠OAP=∠OBP=∠APB=90°，且|OA|=|OB|=b，
则四边形 OABP 是正方形，$|OP|=\sqrt{2}b$，
$\therefore |OP|^2=2b^2\le a^2$，$\therefore a^2\le 2c^2$，
$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{1}{2}$，即 e 的范围为$[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.
故答案为：$[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$.
由题意可得∠APB=90°，运用圆的切线性质，可得四边形 OABP 是正方形，$|OP|=\sqrt{2}b$，又$|OP|^2=2b^2\le a^2$，由此能求出椭圆离心率 e 的取值范围.
本题考查椭圆的离心率的范围，注意运用圆的切线性质和椭圆上的点与原点的距离的范围，考查运算能力，属于中档题.

18.【答案】②

【解析】

解：设 P(x, y)，则 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=16$，
①，(0, 0)代入，方程不成立，即曲线 C 一定经过原点，不正确；
②，以-x 代替 x，-y 代替 y，方程成立，即曲线 C 关于 x、y 轴对称，不正确；
③，x=0，$y=\pm 2\sqrt{3}$，△MPN 的最大面积$=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}<8$，故正确;，
④令 y=0，可得 $x=\pm 2\sqrt{5}$，曲线 C 在一个面积为 $4\sqrt{3}\times 4\sqrt{5}=16\sqrt{15}$的矩形范围内，不正确.
故答案为：②.
设 P(x, y)，则 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}=16$，
对选项分别进行判断，即可得出结论.
本题考查轨迹方程，考查曲线的性质，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

20.【答案】解：（1）由长轴长为$2\sqrt{3}$，且离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

可得$a=\sqrt{3}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$a^2-b^2=c^2$，解得$b=\sqrt{2}$，$c=1$.

则椭圆的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$；

（2）设P（m，n），则$2m^2+3n^2=6$．$-\sqrt{3}\le m\le\sqrt{3}$

又A（3，0），F（1，0）

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}=(3-m,-n)\cdot(1-m,-n)=(3-m)(1-m)+n^2=m^2+n^2-4m+3=\frac{1}{3}m^2-4m+5$

$\therefore$当$m=-\sqrt{3}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PF}$的最小值$4\sqrt{3}+6$；

（3）证明：由题意知，圆O的方程为$x^2+y^2=3$.

设N（3，t），M（x_0，y_0），$x_0^2+y_0^2=3$.

由$|ON|^2=3+|MN|^2$，得$3^2+t^2=3+(x_0-3)^2+(y_0-t)^2$，

即$9+t_2=3+x_0^2-6x_0+9+y_0^2-2ty_0+t^2$，

因为$x_0^2+y_0^2=3$，所以$3x_0+y_0t-3=0$.

当$t=0$时，$x_0=1$，直线l的方程为$x=1$，直线l过椭圆C的右焦点F（1，0）.

当$t\neq0$时，直线MN的方程为，

即$ty-ty_0=-3x+3x_0$，即$ty=-3(x-1)$，直线l过椭圆C的右焦点F（1，0）.

综上所述，直线l过椭圆C的右焦点F（1，0）.

21.【答案】解：（Ⅰ）抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点为（$\frac{p}{2}$，0），准线为 $x=-\frac{p}{2}$，

由抛物线的定义可知：$4=3+\frac{p}{2}$，$p=2$

∴抛物线方程为 $y^2=4x$；

（Ⅱ）由于抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 为（1，0），准线为 $x=-1$，

设直线 AB：$x=my+1$，与 $y^2=4x$ 联立，消去 x，整理得：

$y^2-4my-4=0$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），P（-1，t），有 $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-4 \end{cases}$

易知 $k_3=-\frac{t}{2}$，而 $k_1+k_2=\frac{y_1-t}{x_1+1}+\frac{y_2-t}{x_2+1}$

$=\frac{(x_2+1)(y_1-t)+(x_1+1)(y_2-t)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{(\frac{y_2^2}{4}+1)(y_1-t)+(\frac{y_1^2}{4}+1)(y_2-t)}{(\frac{y_1^2}{4}+1)(\frac{y_2^2}{4}+1)}$

$=\frac{-t(4m^2+4)}{4m^2+4}=-t=2k_3$

∴存在实数 $\lambda=2$，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$ 恒成立．

22.【答案】解：（1）由题意知，$b=\sqrt{3}$，$\frac{\ }{a}=\frac{\ }{b}=\frac{\ }{3}$，

$\therefore a=3$，$c=1$，

$\therefore T_1$：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$，$\therefore T_2$：$\frac{y^2}{3}+x^2=1$；

（2）证明：设斜率为 k 的直线交椭圆 T_1 于点 C（x_1，y_1），D（x_2，y_2），

线段 CD 中点 M（x_0，y_0），

$\therefore x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，

由$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{3}=1$，

相减得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{9}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{3}=0$，

$\because k$ 存在且 $k\neq0$，

$\therefore x_1\neq x_2$，且 $x_0\neq0$，

$\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{3}$，

即 $k\cdot k_{OM}=-\frac{1}{3}$；

同理，$k\cdot k_{ON}=-3$；

$\therefore \frac{k_{OM}}{k_{ON}}=\frac{1}{9}$；

（3）设直线 l 的方程为 $y=\sqrt{2}x+m$，

联立方程得$\begin{cases} y=\sqrt{2}x+m \\ \frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{c^2}=1 \end{cases}$，

化简得，（b^2+2c^2）$x^2+2\sqrt{2}mc^2x+m^2c^2-b^2c^2=0$，

由△=0 化简得 $m^2=b^2+2c^2$，

l_1：$y=\sqrt{2}x+\sqrt{b^2+2c^2}$，

联立方程得$\begin{cases} y=\sqrt{2}x+m \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases}$，

化简得（b^2+2a^2）$x^2+2\sqrt{2}ma^2x+m^2a^2-b^2a^2=0$，

由△=0 得 $m^2=b^2+2a^2$，

l_2：$y=\sqrt{2}x-\sqrt{b^2+2a^2}$，

两平行线间距离$d=\frac{\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{b^2+2a^2}}{\sqrt{3}}$，

$\therefore |AB|=\frac{2\sqrt{3}ab\sqrt{2a^2-2c^2}}{b^2+2a^2}$，

$\therefore$△ABN的面积最大值为$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{ab\sqrt{2a^2-2c^2}(\sqrt{b^2+2c^2}+\sqrt{b^2+2a^2})}{b^2+2a^2}$.

T_1的长轴长是 4，T_2的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $a=2$，$b=\sqrt{2}c$，

由 a，b，c 成等比数列可得 $b^2=ac$，

可得 $a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{2}$，

则△ABN面积的最大值 $S=\frac{2\sqrt{3}(2+\sqrt{10})}{5}$.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao