首都师大附中2023—2024学年第一学期期中练习

高 一 数 学

命题人：高一数学备课组　审核人：高一数学备课组

第Ⅰ卷（共50分）

一、选择题（本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．已知集合 $A=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid x^2-3x<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1\}$　　B．$\{1,2\}$

C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{-1,0,1,2\}$

2．下列各组函数表示同一函数的是（　　）

A．$f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　B．$f(x)=1$，$g(x)=x^0$

C．$f(x)=\begin{cases}x,x\geq 0,\\-x,x<0,\end{cases}$ $g(x)=|x|$　　D．$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

3．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x\leq 1,\\ \dfrac{1}{x-1},x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(-2))=$（　　）．

A．8　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$-\dfrac{3}{4}$　　D．$-\dfrac{10}{9}$

4．“$x<3$”是“$|x-1|<2$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

5．“$\exists x\in\mathbf{N}$，$x-1<0$”的否定为（　　）

A．$\exists x\in\mathbf{N}$，$x-1\geq 0$　　B．$\exists x\notin\mathbf{N}$，$x-1\geq 0$

C．$\forall x\notin\mathbf{N}$，$x-1\geq 0$　　D．$\forall x\in\mathbf{N}$，$x-1\geq 0$

6．对于实数 a,b,c，下列说法正确的是（　　）．

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

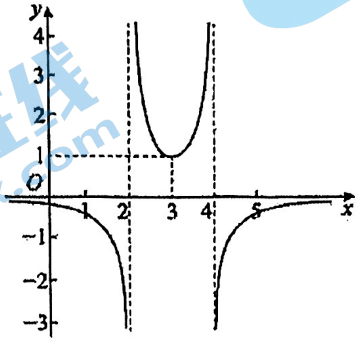
A. 若 $a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

B. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$

C. 若 $a>0>b$，则 $ab<a^2$

D. 若 $c>a>b$，则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ 的部分图象如图所示，则 $a+b+c=$（　　）.



A. -6　　B. 6　　C. -3　　D. 3

8. 定义在 **R** 上的偶函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$（$x_1\neq x_2$），都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，且 $f(3)=0$，则不等式 $xf(x)>0$ 的解集是（　　）.

A. $(-3,0)$

B. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

D. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

9. 命题"$\forall x\in[1,2]$，$2ax+\frac{11}{x}\geq 0$"为真命题的一个充分不必要条件是（　　）.

A. $a\geq -1$　　B. $a\geq -2$　　C. $a\geq -3$　　D. $a\geq -4$

10. 对实数 a，b，定义运算"◎"：$a◎b=\begin{cases}a,(a-b\leq 1),\\ b,(a-b>1).\end{cases}$ 设函数 $f(x)=(x^2-2)◎(x-x^2)$，$x\in\mathbf{R}$. 若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有 3 个公共点，则实数 c 的取值范围是（　　）.

A. $(-2,-1]$

B. $(-\infty,-2]\cup(-1,-\frac{3}{4})$

C. $(-\frac{3}{4},+\infty)$

D. $(-1,+\infty)$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

第Ⅱ卷（共 70 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

11．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$ 的定义域是____________.

12．已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数．当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=x-x^4$，

$f(1)=$________；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=$____________.

13．运货卡车以每小时 x 千米的速度匀速行驶 130 千米，按交通法规限制 $50\le x\le 100$（单位：千米/时）．假设汽油的价格是每升 6 元，而汽车每小时耗油 $\left(6+\dfrac{x^2}{360}\right)$ 升，司机的工资是每小时 24 元．则这次行车的总费用最低为__________元.

14．若关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $\{x\,|\,x<1\}$，则关于 x 的不等式 $\dfrac{ax+b}{x-2}>0$ 的解集为__________.

15．下列四个命题:

①若 $a>b>0$，$a>m>0$，则 $\dfrac{b-m}{a-m}<\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$；

②函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$ 的最小值是 3；

③已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=1$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值是 4；

④已知正实数 x，y 满足 $xy+2x+y=4$，则 $x+y$ 的最小值为 $2\sqrt{6}-3$.

其中所有正确命题的序号是____________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 50 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16．（本小题 8 分）设集合 $A=\{x\,|\,-2\le x\le 5\}$，$B=\{x\,|\,m-1\le x\le 2m+1\}$.

（Ⅰ）若 $m=3$ 时，求 $A\cap B$，$(\complement_{\mathrm{R}}A)\cup B$；

（Ⅱ）若 $B\subseteq A$，求 m 的取值范围.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

17.（本小题 8 分）已知函数 $f\left(x\right)=x^2-\left(a+b\right)x+2a$.

（I）若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\left\{x\middle|1<x<2\right\}$，求 $a-b$ 的值；

（II）当 $b=2$ 时，解关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>0$.

18.（本小题 12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{4-x^2}$ 是定义在 $\left(-2,2\right)$ 上的奇函数，且 $f\left(1\right)=\dfrac{2}{3}$.

（I）求实数 a 和 b 的值；

（II）判断函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上的单调性，并用单调性的定义证明你的结论；

（III）若 $f\left(t^2-1\right)+f\left(1-t\right)<0$，求 t 的取值范围.

19.（本小题 10 分）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，并且满足下列条件：

① $f(-1)=1$；②对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$；③当 $x>0$ 时，$f(x)<0$.

（I）求 $f\left(0\right),f\left(2\right)$ 的值；

（II）证明：$f\left(x\right)$ 为奇函数；

（III）解关于 x 的不等式 $f\left(x^2+2x\right)-f\left(2-x\right)>-2$.

20.（本小题 12 分）对于函数 $f(x)$，若存在实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 的“不动点”.

（I）设函数 $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$，求 $f(x)$ 的不动点；

（II）设函数 $f(x)=ax^2+(b+1)x+b-2(a\neq 0)$. 若对于任意的实数 b，函数 $f(x)$ 恒有两相异的不动点，求实数 a 的取值范围；

（III）设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上. 证明：若 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点，则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

首都师大附中 2023－2024 学年第一学期期中练习

高 一 数 学 答 案

1-5 BCBBD　6-10　CCCAA

11．$[-3,0)\cup(0,3]$

12．-2，$-x-x^4$

13．260

【详解】设所用时间为$t=\frac{130}{x}(h)$，

则由题意知$y=\frac{130}{x}\times6\times\left(6+\frac{x^2}{360}\right)+24\times\frac{130}{x}$，$x\in[50,100]$．

所以这次行车总费用 y 关于 x 的表达式是$y=\frac{7800}{x}+\frac{13x}{6}$，$x\in[50,100]$

$y=\frac{7800}{x}+\frac{13x}{6}\geq2\sqrt{\frac{7800}{x}\cdot\frac{13x}{6}}=2\sqrt{\frac{7800}{x}\cdot\frac{13x}{6}}=260$，

当且仅当$\frac{7800}{x}=\frac{13x}{6}$，即$x=60$时等号成立.

故当$x=60$千米/时，这次行车的总费用最低，最低费用的值为260元.

故答案为：260.

14．$\{x|-1<x<2\}$

【详解】因为关于x的不等式$ax-b>0$的解集为$\{x|x<1\}$，

所以关于x的方程$ax-b=0$的根为$x=1$且$a<0$，所以$a-b=0$，即$b=a$．

故不等式$\frac{ax+b}{x-2}>0$，即$\frac{ax+a}{x-2}>0$，等价于$\frac{x+1}{x-2}<0$，等价于$(x+1)(x-2)<0$，解得$-1<x<2$，

因此不等式$\frac{ax+b}{x-2}>0$的解集为$\{x|-1<x<2\}$．

故答案为：$\{x|-1<x<2\}$

15．①③④

【详解】解：对于①，$\because a>b>0$，$a>m>0$．

$\therefore a-b>0$，$a+m>0$，$a-m>0$，$\therefore(a-b)m>0$，

$\therefore(a-b)m=a(b+m)-b(a+m)>0$，$(a-b)m=b(a-m)-a(b-m)>0$

$\therefore a(b+m)>b(a+m)$同除$a(a+m)$得$\frac{(b+m)}{(a+m)}>\frac{b}{a}$

$\therefore b(a-m)>a(b-m)$同除$a(a-m)$得$\frac{b}{a}>\frac{(b-m)}{(a-m)}$

综上得$\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$，故①正确；

对于②，$f(x)=x+\frac{4}{x+1}$则$f(-2)=-2+\frac{4}{-2+1}=-6$，故②错误；

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/　获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

对于④，正实数 x，y 满足 $xy+2x+y=4$，则 $y=\dfrac{4-2x}{x+1}$，$x\in(0,2)$

所以 $x+y=x+\dfrac{4-2x}{x+1}=x+\dfrac{6}{x+1}-2=x+1+\dfrac{6}{x+1}-3\geq 2\sqrt{(x+1)\times\dfrac{6}{x+1}}-3=2\sqrt{6}-3$

当且仅当 $x+1=\dfrac{6}{x+1}$ 即 $x=\sqrt{6}-1$ 取等号，故④正确；

故答案为:①③④

16. (I) $A\cap B=\{x|2\leq x\leq 5\}$；$(\complement_R A)\cup B=\{x|x<-2$ 或 $x\geq 2\}$；(I) $(-\infty,-2)\cup[-1,2]$

【详解】(I) 当 $m=3$ 时，$B=\{x|2\leq x\leq 7\}$，

$A\cap B=\{x|2\leq x\leq 5\}$，$\complement_R A=\{x|x<-2$ 或 $x>5\}$，$(\complement_R A)\cup B=\{x|x<-2$ 或 $x\geq 2\}$；

(II) 若 $B=\varnothing$，$m-1>2m+1$，则 $m<-2$，若 $B\neq\varnothing$，$\begin{cases}m-1\leq 2m+1\\m-1\geq -2\\2m+1\leq 5\end{cases}$

解得：$-1\leq m\leq 2$，

综上可知，$m\in(-\infty,-2)\cup[-1,2]$

17. (I) $a-b=-1$ (II)答案见解析

【详解】(I) 由题意可知，关于 x 的不等式 $x^2-(a+b)x+2a<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，

所以关于 x 的方程 $x^2-(a+b)x+2a=0$ 的两个根为 1 和 2，所以 $\begin{cases}a+b=3\\2a=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$，则 $a-b=-1$.

(II) 由条件可知，$x^2-(a+2)x+2a>0$，即 $(x-a)(x-2)>0$，

对应的二次函数与x轴交点分别为 $x_1=2, x_2=a$

当 $a<2$ 时，解得 $x<a$ 或 $x>2$；

当 $a=2$ 时，解得 $x\neq 2$；

当 $a>2$ 时，解得 $x<2$ 或 $x>a$.

综上可知，当 $a<2$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x<a$ 或 $x>2\}$；

当 $a=2$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x\neq 2\}$；

当 $a>2$ 时，原不等式的解集为 $\{x|x<2$ 或 $x>a\}$

18. (I) $a=2$，$b=0$；(II)函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上是增函数；证明见解析；(III) $0<t<1$

【详解】(I) 由函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的奇函数，所以 $f(0)=\dfrac{b}{4}=0$ 得 $b=0$，

又因为 $f(1)=\dfrac{a}{4-1}=\dfrac{2}{3}$，所以 $a=2$，

经检验，当 $a=2$，$b=0$ 时，$f(x)$ 是奇函数，

所以 $a=2$，$b=0$

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

（II）由（I）可知 $f(x)=\dfrac{2x}{4-x^2}$，任取 $-2<x_1<x_2<2$

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1}{4-x_1^2}-\dfrac{2x_2}{4-x_2^2}=\dfrac{2x_1(4-x_2^2)-2x_2(4-x_1^2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$

$$=2\cdot\frac{4(x_1-x_2)+(x_1^2x_2-x_1x_2^2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}=2\cdot\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2+4)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$$

因为 $-2<x_1<x_2<2$，所以，$x_1-x_2<0,4-x_1^2>0,4-x_2^2>0,x_1x_2+4>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上是增函数.

（III）由函数 $f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的奇函数且 $f(t^2-1)+f(1-t)<0$，

则 $f(t^2-1)<-f(1-t)=f(t-1)$，

所以 $\begin{cases}-2<t^2-1<2且-2<t-1<2\\ t^2-1<t-1\end{cases}$，解得 $0<t<1$，

所以 t 的取值范围是 $(0,1)$

19．(Ⅰ)0, -2；(Ⅱ)证明略；(Ⅲ) $(-4,1)$

【详解】

（I）令 $x=y=0$，有 $f(0)=0$；

令 $x=1$，$y=-1$，有 $f(1)=-1$，

令 $x=1$，$y=1$，有 $f(2)=-2$

（II）由题意函数 $f(x)$ 的定义域为 R，定义域关于原点对称，

令 $x=y=0$，则 $f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$，故 $f(0)=0$.

令 $y=-x$，则 $f(x-x)=f(x)+f(-x)=0$，故 $f(-x)=-f(x)$

故 $f(x)$ 为奇函数.

（III）任取 $x_1,x_2\in R$，且 $x_1>x_2$.

由题意 $x_1-x_2>0$，$f(x_1-x_2)<0$，

$f(x_1)=f(x_1-x_2+x_2)=f(x_1-x_2)+f(x_2)$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

又 $x_1>x_2$，故 $f(x)$ 在 R 上为减函数.

因为 $f(-1)=1$，所以 $f(1)=-1$，$f(2)=f(1+1)=-1-1=-2$，

故 $f(x^2+2x)-f(2-x)>-2$ 即 $f(x^2+2x)+f(x-2)=f(x^2+2x+x-2)>f(2)$，

即 $x^2+2x+x-2<2$，化简可得 $x^2+3x-4<0$，

解得 $x\in(-4,1)$.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

20.(Ⅰ)-1和2；(Ⅱ)(0，2)；(Ⅲ) 略

【详解】(Ⅰ) 由 $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}=x$.

得 $x^2-x-2=0$， 解得 $x=-1$ 或 $x=2$，

所以 $f\left(x\right)$ 的不动点为-1和2.

(Ⅱ) 由 $f\left(x\right)=x$ 得 $ax^2+bx+b-2=0$，由已知此方程有两个相异实数根，

$\Delta_x>0$ 恒成立，即 $b^2-4a\left(b-2\right)>0$ 对任意实数 b 恒成立，

所以 $\Delta_{b'}=16a^2-32a<0$，

所以 $0<a<2$，即实数 a 的取值范围是（0，2）.

(Ⅲ) 首先证明"若函数 $f\left(f\left(x\right)\right)$ 存在唯一的不动点 x_0，则 x_0 也是 $f(x)$ 的不动点"，

假设 $f(x_0)=x_1\neq x_0$，则 $f\left(f(x_1)\right)=f\left(f\left(f(x_0)\right)\right)=f\left(x_0\right)=x_1$，与 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点矛盾.

所以 x_0 也是 $f(x)$ 的不动点.

再证明"若函数 $f\left(f\left(x\right)\right)$ 存在唯一的不动点 x_0，则 x_0 也是 $f(x)$ 唯一的不动点"，

假设存在实数 a,b，使得 $f(a)=a,f(b)=b,$ 则 $f\left(f(a)\right)=f\left(a\right)=a,f\left(f(b)\right)=f\left(b\right)=b$

由 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点知 $a=b$，即 $f(x)$ 不动点唯一.

综上，若 $f(f(x))$ 存在唯一的不动点，则 $f(x)$ 也存在唯一的不动点.

进入北京高考在线网站：http://www.gaokzx.com/ 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！