梅州市高三总复习质检（2023.4）

数学参考答案与评分意见

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	A	D	D	B	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9	10	11	12
AD	ABD	BC	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -3　　14. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　15. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　16. 0.053 ，$\dfrac{18}{53}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）因为数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是公比为2的等比数列，且$a_2-a_1=2-1=1$，…………………1 分

所以$a_{n+1}-a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$，…………………2 分

当$n\geq 2$时，

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots+2+1+1=2^{n-1}.$$ …………………3 分

又$a_1=1$也满足上式，…………………4 分

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$. …………………5 分

（2）因为$b_n=\dfrac{2n+1}{3^n}\bullet a_n=\dfrac{2n+1}{2}\bullet\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，…………………6 分

则$b_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2}\bullet\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$，…………………7 分

则有 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2n+3}{2n+1}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4n+6}{6n+3}\ (n\ge 1,n\in Z)$，

当 $n=1$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$，则有 $a_1<a_2$， …………………8 分

当 $n\ge 2$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则有 $a_2>a_3>a_4>\cdots$， …………………9 分

故数列 $\{b_n\}$ 中的最大项为 b_2，等于 $\dfrac{10}{9}$. …………………10 分

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）在 $Rt\ \triangle ACD$ 中，$AD=AC\cos\dfrac{\pi}{4}=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. …………………1 分

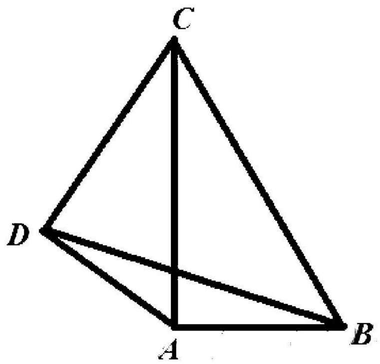
在 $\triangle ABD$ 中，因为 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{4}$，由余弦定理得，

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\dfrac{3\pi}{4}$

$=3+2-2\bullet\sqrt{3}\bullet\sqrt{2}(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ …………………3 分

$=5+2\sqrt{3}$

因此 $BD=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. …………………5 分



（2） 在 $Rt\ \triangle ACD$ 中，$AD=AC\cos\theta=2\cos\theta$. …………………6 分

在 $\triangle ABD$ 中，因为 $\angle BAD=\theta+\dfrac{\pi}{2}$，由余弦定理得，

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$

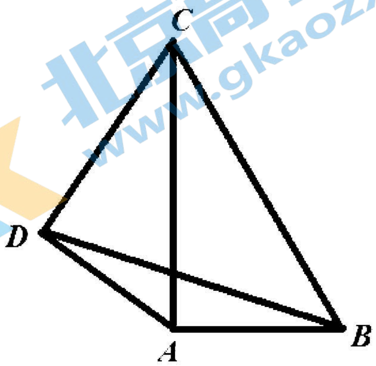
$=3+4\cos^2\theta-2\bullet\sqrt{3}\bullet 2\cos\theta\bullet(-\sin\theta)$ …………………7 分

$=3+4\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin 2\theta$

$=2\sqrt{3}\sin 2\theta+4\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+3$

$=2\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos 2\theta+5$ …………………8 分

$=4\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+5$， …………………9 分



所以 $BD=\sqrt{4\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+5}$. …………………10 分

所以当 $2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 时， …………………11 分

BD 最长，$BD_{\max}=\sqrt{4+5}=3$. …………………12 分

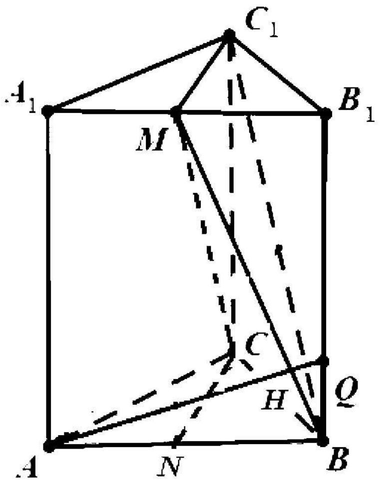
19. （本小题满分 12 分）

解：（1）在正棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为点 M 为 A_1B_1 的中点，

所以 $C_1M\perp A_1B_1$， …………………1 分

又因为 $A_1A\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp C_1M$， …………………2 分

而 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，故 $C_1M\perp$ 平面 AA_1B_1B，



过点 A 作 $AQ\perp BM$ 交 BB_1 于点 Q，

则有 $AQ\perp BM$， $AQ\perp C_1M$，且 $BM\cap C_1M=M$，

得 $AQ\perp$ 平面 BC_1M，

即点 Q 即为所要找的点． ………………3 分

易得：$\triangle ABQ\backsim\triangle BB_1M$，………………4 分

因此 $\dfrac{BQ}{B_1M}=\dfrac{AB}{BB_1}$，即有 $\dfrac{BQ}{1}=\dfrac{2}{4}$，

于是 $BQ=\dfrac{1}{2}$，所以 $B_1Q=B_1B-BQ=4-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$， …………………5 分

因此 $\dfrac{B_1Q}{QB}=7$． …………………6 分

（2）法一：连接 C 与 AB 的中点 N，易知 CN // 平面 BC_1M， …………………7 分

点 C 到平面 BC_1M 的距离 h_C 等于点 N 到平面 BC_1M 的距离 h_N， ………………8 分

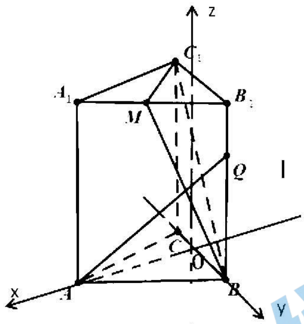
又 N 为 AB 之中点，点 N 到平面 BC_1M 的距离 h_N 等于点 A 到平面 BC_1M 的距离 h_A 的一半，

而由（1）知，当 $BQ=\dfrac{1}{2}$ 时，$AQ\perp$ 平面 BC_1M， …………………10 分

设 $AQ\cap BM=H$，则 $h_A=AH=AB\cos\angle BAQ=2\times\dfrac{2}{\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{17}}$， …………11 分

因此 $h_C=h_N=\dfrac{1}{2}h_A=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$． …………………12 分

法二：



取BC中点O,以OA, OB所在直线分别为x,y轴，过O作平面ABC垂线为z轴建立空间直角坐标系。 …………………………1分

（1）设$Q(0,1,t)(0<t<4)$, $A(\sqrt{3},0,0)$, $B(0,1,0)$, $C_1(0,-1,4)$, $M(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},4)$

所以$\overrightarrow{AQ}=(-\sqrt{3},1,t).\overrightarrow{C_1B}=(0,2,-4),\overrightarrow{C_1M}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$, ………………2分

设面BC_1M法向量$\vec{n}=(x,y,z)$.

则令$\vec{n}\bullet\overrightarrow{C_1B}=2y-4z=0$, ………………3分

$\vec{n}\bullet\overrightarrow{C_1M}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0$, ………………4分

解得$\vec{n}=(-2\sqrt{3},2,1)$, ………………5分

使AQ // 平面BC_1M, 即$\overrightarrow{AQ}$ // $\vec{n}$,

令$\overrightarrow{AQ}=\lambda\vec{n}$, 即$(-\sqrt{3},1,t)=\lambda(-2\sqrt{3},2,1)$, ………………6分

解得$\lambda=\frac{1}{2},t=\frac{1}{2}$. ………………7分

所以当$\frac{B_1Q}{BQ}=\frac{4-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=7$时，$AQ\perp$平面$BC_1M$. ………………8分

（2）$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,4)$, 设点$C$到平面$BC_1M$的距离为$d_c$. ………………9分

$d_c=\frac{|\vec{n}\bullet\overrightarrow{CC_1}|}{|\vec{n}|}=\frac{4}{\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$. ………………11分

所以点C到平面BC_1M的距离为$\frac{4\sqrt{17}}{17}$. ……………12分

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）补全的 2×2 列联表如下：

	一般	激动	总计
男性	30	90	120
女性	25	55	80
总计	55	145	200

……………………2 分

零假设为 H_0：性别与对活动的观感程度相互独立．……………………3 分

根据表中数据，计算得到

$$\chi^2=\frac{200\times(30\times55-90\times25)^2}{55\times145\times120\times80}=\frac{300}{319}<1<2.706,$$ ……………………4 分

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此我们可以认为 H_0 成立，即认为对该场活动活动的观感程度与性别无关．……………………5 分

（2）设一次摸球摸出 2 个红球的事件为 A，摸出 1 个红球的事件为 B，没摸出红球的事件为 C，

则 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$，$P(C)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，……………………7 分

由题意，X 可取 200，150，100，50，0．

$P(X=200)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$；$P(X=150)=2\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{25}$，

$P(X=100)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{25}$；$P(X=50)=2\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{25}$，

$P(X=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$，……………………9 分

所以 X 的分布列为

X	200	150	100	50	0
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{25}$

……………………10 分

随机变量 X 的数学期望：

$E(X)=200\times\frac{1}{25}+150\times\frac{6}{25}+100\times\frac{11}{25}+50\times\frac{6}{25}+0\times\frac{1}{25}=100$．……………………12 分

21. （本小题满分 12 分）

解：（1）因为 $|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，得 $c=\sqrt{3}$， ……………………1 分

又因为经过点 $A(\sqrt{3},2)$，

故 $2a=|AF_1|-|AF_2|$

$=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2+(2-0)^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(2-0)^2}$

$=4-2=2$， ……………………2 分

得 $b^2=c^2-a^2=2$， ……………………3 分

所以 E 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$． ……………………4 分

（2）证明：．设 $H(x,y)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$．

则 $x_1^2-\dfrac{y_1^2}{2}=1$，$x_2^2-\dfrac{y_2^2}{2}=1$，即 $y_1^2=2(x_1^2-1)$①，$y_2^2=2(x_2^2-1)$②． ……………5 分

设 $\dfrac{|PM|}{|PN|}=\dfrac{|MH|}{|HN|}=\lambda$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PN}\\ \overrightarrow{MH}=\lambda\overrightarrow{HN}\end{cases}(\lambda\neq1)$，

即 $\begin{cases}(x_1-2,y_1-1)=\lambda(x_2-2,y_2-1)\\ (x-x_1,y-y_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y)\end{cases}$． ……………………6 分

整理得 $\begin{cases}x_1-\lambda x_2=2(1-\lambda)\\ y_1-\lambda y_2=1-\lambda\\ x_1+\lambda x_2=(1+\lambda)x\\ y_1+\lambda y_2=(1+\lambda)y\end{cases}$， ……………………7 分

所以 $x_1^2-\lambda^2x_2^2=2(1-\lambda^2)x$③，$y_1^2-\lambda^2y_2^2=(1-\lambda^2)y$④． ……………………8 分

将①②代入④，得 $2\left[x_1^2-\lambda^2x_2^2-(1-\lambda^2)\right]=(1-\lambda^2)y$⑤． ……………………9 分

将③代入⑤，得 $2\left[(1-\lambda^2)2x-(1-\lambda^2)\right]=(1-\lambda^2)y$， ……………………10 分

即 $4x-2=y$． ……………………11 分

所以点 H 恒在定直线 $4x-y-2=0$ 上． ……………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=e^{x-1}-\ln x$，函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=e^{x-1}-\dfrac{1}{x}$， ………………1 分

因为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(1)=0$. ………………2 分

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$. ………………3 分

（2）设 $g(x)=2f(x+1)-\cos x$，$x\in[0,\pi]$.

则 $g(x)=2e^{x}-2a\ln(x+1)-\cos x$， ………………4 分

所以 $g'(x)=2e^{x}-\dfrac{2a}{x+1}+\sin x$. ………………5 分

①当 $a\le 0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

所以 $g(x)\ge g(0)=2e^{0}-2a\ln 1-\cos 0=1$，满足题意. ………………6 分

②$a>0$ 时，设 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=2e^{x}+\dfrac{2a}{(x+1)^2}+\cos x>0$.

所以 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，即 $g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增. ………………7 分

因为 $g'(0)=2e^{0}-2a+\sin 0=2-2a$. ………………8分

（i）当 $0<a\le 1$ 时，$g'(x)\ge g'(0)=2-2a\ge 0$，$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

所以 $g(x)\ge g(0)=2e^{0}-2a\ln 1-\cos 0=1$，满足题意. ………………9 分

（ii）当 $g'(\pi)=2e^{\pi}-\dfrac{2a}{\pi+1}+\sin\pi\le 0$，即 $a\ge(\pi+1)e^{\pi}$ 时，

对任意的 $x\in[0,\pi]$，$g'(x)\le 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，

此时 $g(x)<g(0)=2e^{0}-2a\ln 1-\cos 0=1$，不合题意. ………………10 分

（iii）当$1<a<(\pi+1)e^{\pi}$时，

因为$g'(x)$在$[0,\pi]$上单调递增. 且$g'(0)g'(\pi)=(2-2a)\left(2e^{\pi}-\dfrac{2a}{\pi+1}\right)<0$，

所以$\exists x_0\in[0,\pi]$，使$g'(x_0)=0$，

且当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)$单调递减.

此时$g(x)<g(0)=2e^{0}-2a\ln 1-\cos 0=1$，不合题意. ....11 分

综上，实数a的取值范围为$(-\infty,1]$. ....12 分