顺义区 2023 届高三第二次统练

数学试卷

考生须知	1. 本试卷共 5 页，共两部分，21 道小题，满分 150 分．考试时间 120 分钟。 2. 在答题卡上准确填写学校、姓名、班级和教育 ID 号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{x\mid -2<x<2\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$　(B) $\{x\mid 0<x<2\}$　(C) $\{x\mid -2<x\leqslant 0\}$　(D) $\{x\mid 2<x<3\}$

(2) 若圆 $(x-1)^2+y^2=4$ 与 y 轴交于 A,B 两点，则 $|AB|=$

(A) 2　(B) 4　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{3}$

(3) 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y=\cos x$　(B) $y=e^{|x|}$　(C) $y=\lg x$　(D) $y=\dfrac{1}{x}$

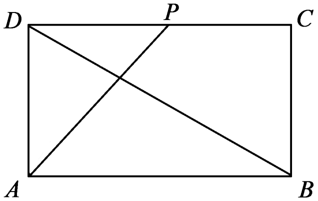
(4) 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线过双曲线 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$ 的一个焦点，则 $p=$

(A) 1　(B) 2　(C) 4　(D) 8

(5) 已知函数 $f(x)=\log_2(x+1)-x$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是

(A) $(1,+\infty)$　(B) $(0,+\infty)$　(C) $(0,1)$　(D) $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

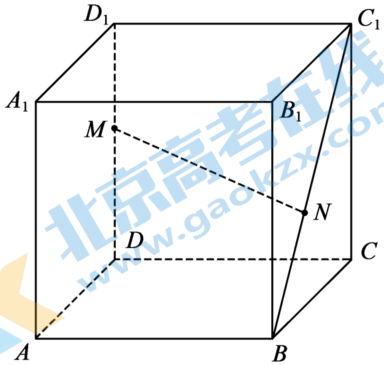
(6) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AD=1$，点 P 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DB}=$



(A) 0　(B) $\dfrac{3}{2}$

(C) $\sqrt{3}$　(D) $2\sqrt{3}$

(7)在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M,N 分别是棱 DD_1 和线段 BC_1 上的动点,则满足与 DD_1 垂直的直线 MN



(A)有且仅有 1 条

(B)有且仅有 2 条

(C)有且仅有 3 条

(D)有无数条

(8)在平面直角坐标系 xOy 中,角 α 与角 β 均以 Ox 为始边,它们的终边关于 x 轴对称.若 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,则 $\cos(\alpha-\beta)=$

(A)1　　(B)$\dfrac{3}{5}$　　(C)$\dfrac{4}{5}$　　(D)0

(9)已知$\{a_n\}$是无穷等差数列,其前项和为 S_n,则“$\{a_n\}$为递增数列”是“存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使得 $S_n>0$”的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(10)2022 年足球世界杯在卡塔尔举行,32 支参赛队通过抽签分为八个小组. 每个小组分别有 4 支球队,共打 6 场比赛,每支球队都必须和同组其他 3 支球队进行且只进行一场比赛. 小组赛积分规则为:胜 1 场积 3 分,平 1 场积 1 分,负 1 场积 0 分,每个小组积分前两名的球队出线. 若小组赛结束后,同一小组的甲、乙两支球队分别积 6 分和 5 分,则

(A)甲、乙两队一定都出线　　(B)甲队一定出线,乙队可能未出线

(C)甲、乙两队都可能未出线　　(D)甲、乙两支球队至少有一支未出线

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 道小题,每题 5 分。共 25 分,把答案填在答题卡上。

(11)若复数 $z=\dfrac{1+2i}{i}$,则$|z|=$________.

(12)在$(2-x)^4$ 的展开式中,x^3 的系数为________.

(13)设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$,其前 n 和为 S_n,且 $a_1=\dfrac{1}{2}$,$a_3=2$,则 $a_5=$________;

$S_5=$________.

(14)能说明“若 $f(x)\leqslant f(2)$ 对任意的 $x\in[0,2]$ 都成立,则 $f(x)$ 在$[0,2]$上单调递增”为假命题的一个函数是________.

(15) 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_{2023}$ 均为正数，并且 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_{2023}}=1$，给出下列四个结论：

① $x_1,x_2,\cdots,x_{2023}$ 中小于 1 的数最多只有一个；

② $x_1,x_2,\cdots,x_{2023}$ 中小于 2 的数最多只有两个；

③ $x_1,x_2,\cdots,x_{2023}$ 中最大的数不小于 2022；

④ $x_1,x_2,\cdots,x_{2023}$ 中最小的数不小于 $\frac{1}{2023}$.

其中所有正确结论的序号为________.

三、解答题共 6 道题，共 85 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

(16)（本小题 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a=6$，$\sin A=\frac{3}{2}\sin B$.

（Ⅰ）求 b；

（Ⅱ）在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$\angle B=\frac{2\pi}{3}$；

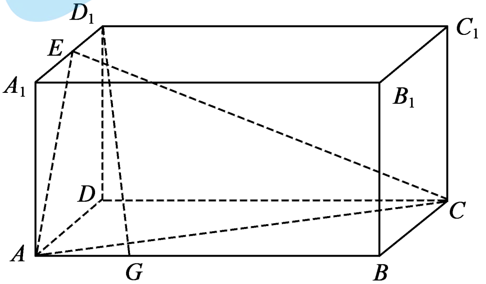
条件②：BC 边上中线的长为 $\sqrt{17}$；

条件③：$\sin B=\sin 2A$.

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(17)（本小题 13 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$AD=AA_1=2$，E 是 A_1D_1 的中点，平面 ACE 与棱 C_1D_1 相交于点 F.



（Ⅰ）求证：点 F 为 C_1D_1 的中点；

（Ⅱ）若点 G 为棱 AB 上一点，且 $D_1G\perp AC$，求点 G 到平面 ACE 的距离.

(18)(本小题 14 分)

精彩纷呈的春节档电影丰富了人们的节日文化生活,春节小长假期间大批观众走进电影院. 某电影院统计了 2023 年正月初一放映的四部影片的上座率,整理得到如下数据:

影片	排片场次	上座率(%)
A	12	36 42 45 50 57 62 68 73 80 85 88 94
B	10	35 40 46 52 65 65 78 84 90 95
C	9	35 38 47 55 60 65 73 82 85
D	9	34 37 46 54 60 64 72 81 84

(Ⅰ)从以上所有排片场次中随机选取 1 场,求该场的上座率大于 70%的概率;

(Ⅱ)假设每场影片的上座率相互独立. 从影片 A,B,C 的以上排片场次中各随机抽取 1 场,求这 3 场中至少有 2 场上座率大于 70%的概率;

(Ⅲ)将影片 C 和影片 D 在该电影院正月初一的上座率的方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2,试比较 s_1^2 和 s_2^2 的大小.(结论不要求证明)

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=x^2+\cos x$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的最大值和最小值;

(Ⅲ)设 $g(x)=f'(x)$,证明:对任意的 $s>t$,有 $g(s)-g(t)<3s-3t$.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(0,2)$ 和 $B(0,-2)$,且 $a=\sqrt{2}b$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)过点 $D(0,1)$ 斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 M,N,直线 MA,NB 分别交直线 $y=t(-2<t<2)$ 于点 P,Q. 若 $|DP|=|DQ|$,求 t 的值.

(21)(本小题 15 分)

已知实数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geqslant 3)$,定义 $\varphi(A)=\{a_ia_j|a_i,a_j\in A,i\neq j\}$.

(Ⅰ)若 $A=\{-2,0,1,2\}$,求 $\varphi(A)$;

(Ⅱ)若 $\varphi(A)=\{0,-6,-8,-12,12,18,24\}$,求集合 A;

(Ⅲ)若 A 中的元素个数为 9,求 $\varphi(A)$ 的元素个数的最小值.

顺义区 2023 届高三第二次统数学试卷参考答案

一、选择题 ADBCC　BDBAA

二、填空题

（11）$\sqrt{5}$　（12）-8　（13）8，$\dfrac{31}{2}$

（14）$f(x)=(x-1)^2$（答案不唯一）

（15）①②③（答对一个得 2 分，答对两个得 3 分，全部答对得 5 分，有错误不给分）

三、解答题

（16）(本小题 13 分)

解：（Ⅰ）因为 $\sin A=\dfrac{3}{2}\sin B$，

在△ABC 中，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，……2 分

可得：$a=\dfrac{3}{2}b$，……3 分

又因为 $a=6$，

所以 $b=4$．……5 分

（Ⅱ）选择条件①　按公式酌情给分，最高 4 分；

选择条件②

设 BC 边上的中线为 AD，则 $AD=\sqrt{17}$，$CD=3$，……6 分

在△ACD 中，由余弦定理得：

$$\cos C=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2\cdot AC\cdot CD}=\frac{4^2+3^2-\left(\sqrt{17}\right)^2}{2\times4\times3}=\frac{1}{3},$$ ……9 分

因为 $\cos C=\dfrac{1}{3}$，$C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，……11 分

所以△ABC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times6\times4\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=8\sqrt{2}$．……13 分

选择条件③

方法 1：

由题设，因为 $\sin 2A=2\sin A\cos A$，所以 $\sin B=2\sin A\cos A$，……6 分

因为 $\sin A=\dfrac{3}{2}\sin B$，所以 $\sin B=3\sin B\cos A$

因为 $B\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin B\neq0$，……7 分

所以 $\cos A=\dfrac{1}{3}$，……8 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 可得：……9 分

$36=16+c^2-2\times4\times c\times\frac{1}{3}$,

整理得 $3c^2-8c-60=0$，解得 $c=6$或$-\frac{10}{3}$（舍），……………………………………10 分

因为 $\cos A=\frac{1}{3}$， $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，………………11 分

所以△ ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=8\sqrt{2}$. ………………13 分

方法 2：由题设，因为 $\sin 2A=2\sin A\cos A$，所以 $\sin B=2\sin A\cos A$，……………6 分

因为 $\sin A=\frac{3}{2}\sin B$，所以 $\sin B=3\sin B\cos A$

在△ ABC 中，因为 $b<a$，所以 $B<A$，即 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B\neq0$，……7 分

所以 $\cos A=\frac{1}{3}$，……………………………………………………………………8 分

因为 $\cos A=\frac{1}{3}$， $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sin B=\frac{2}{3}\sin A=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$， ……………………………………………9 分

所以 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{7}{9}$， ……………………………………………………10 分

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{7}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

…………………………………………………………………………………………11 分

所以△ ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=8\sqrt{2}$. ………………13 分

方法 3：因为 $\sin B=\sin 2A$ 且 $B\in(0,\pi)$， $2A\in(0,2\pi)$

所以 $B+2A=\pi$ 或 $B=2A$， ……………………………………………………………7 分

因为 $b<a$，所以 $B+2A=\pi$， …………………………………………………………8 分

又因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $A=C$ 即 $a=c=6$， ……………………………………………………………………9 分

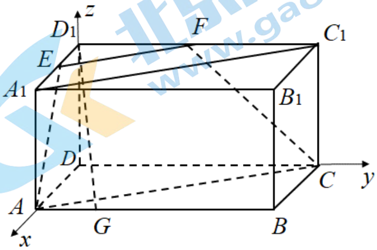
所以△ ABC 为等腰三角形，设 AC 边上的高为 BD，则 $AD=2$，

由勾股定理 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4\sqrt{2}$，……………………………………………11 分

所以△ ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times b\times BD=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$. ……………………13 分

（17）（本小题 13 分）

（Ⅰ）证明：方法 1：因为平面 $ABCD$ // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，



$平面ACE \cap 平面ABCD = AC$，

$平面ACE \cap 平面A_1B_1C_1D_1 = EF$，

所以 EF // AC . ----------------------3 分

连接 A_1C_1 .

因为 AA_1 // CC_1，$AA_1 = CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形.

所以 A_1C_1 // AC，EF // A_1C_1 . --5 分

因为 E 是 A_1D_1 的中点,

所以点 F 为 C_1D_1 的中点. --6 分

方法 2：连接 A_1C_1 .

因为 AA_1 // CC_1，$AA_1 = CC_1$，

所以四边形 AA_1C_1C 是平行四边形.

所以 AC // A_1C_1，--1 分

因为 $AC \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 AC // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，--3 分

因为 $AC \subset 平面ACE$， $平面ACE \cap 平面A_1B_1C_1D_1 = EF$，

所以 AC // EF . --5 分

所以 EF // A_1C_1 .

因为 E 是 A_1D_1 的中点,

所以点 F 为 C_1D_1 的中点. --6 分

（Ⅱ）解：方法 1：因为 DA, DC, DD_1 两两垂直，建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$.

则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$E(1,0,2)$，$C(0,4,0)$，$D_1(0,0,2)$.

则 $\overrightarrow{AC} = (-2,4,0)$，$\overrightarrow{AE} = (-1,0,2)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$ ------------------------------8 分

令 $x = 2$，则 $y = 1, z = 1$，所以 $\boldsymbol{m} = (2,1,1)$. -----------------------10 分

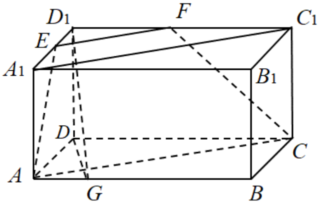
设 $G(2,t,0)$，则 $\overrightarrow{D_1G}=(2,t,-2)$，

由 $\overrightarrow{D_1G}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 得 $-4+4t=0$，$t=1$，$G(2,1,0)$

$\overrightarrow{AG}=(0,1,0)$--11 分

点 G 到平面 ACE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.------------------------------13 分

方法 2：连接 DG.



因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $DD_1\perp AC$.

因为 $D_1G\perp AC$，$DD_1\cap DG=D$，

所以 $AC\perp$ 平面 D_1DG，

所以 $AC\perp DG$.

在平面 $ABCD$ 内，由 $\tan\angle ADG\cdot\tan\angle DAC=1$，可求出 $AG=1$.------8 分

由勾股定理求出 $AC=\sqrt{20}$，$AE=\sqrt{5}, CE=\sqrt{21}$，

在△ ACE 中由余弦定理得 $\cos\angle CAE=\dfrac{AC^2+AE^2-CE^2}{2AC\cdot AE}=\dfrac{1}{5}$，

则 $\sin\angle CAE=\sqrt{1-(\dfrac{1}{5})^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

$S_{\Delta ACE}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AE\cdot\sin\angle CAE=2\sqrt{6}$. ---------------------------------10 分

$S_{\Delta ACG}=\dfrac{1}{2}AG\cdot BC=1$.

设点 G 到平面 ACE 的距离为 d，

由 $V_{G-ACE}=V_{E-ACG}$ 得 $\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times d=\dfrac{1}{3}\times 1\times 2$，---------------------------12 分

解得 $d=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$--13 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）记“从以上所有排片场次中随机选取 1 场，该场的上座率大于 70%”为

事件 M.--1 分

影片 A,B,C,D 的上座率大于 70%的场数共有 5+4+3+3=15，----------------------------2 分

所以 $P(M)=\dfrac{5+4+3+3}{12+10+9+9}=\dfrac{15}{40}=\dfrac{3}{8}$.---4 分

（Ⅱ）记“从影片 A,B,C 的以上排片场次中各随机抽取 1 场，每场的上座率大于 70%”分别为事件 A,B,C .其中 $P(A)=\frac{5}{12}$, $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(C)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;----------------7 分

这 3 场中至少有 2 场上座率大于 70%的概率为

$$P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC)$$

$$=\frac{5}{12}\times\frac{2}{5}\times(1-\frac{1}{3})+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{5}{12})+\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}\times(1-\frac{2}{5})+\frac{5}{12}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$$.----------------11 分

$=\frac{59}{180}$ ----------------12 分

（Ⅲ） $s_1^{\ 2}<s_2^{\ 2}$. ----------------14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ） $f'(x)=2x-\sin x$, ----------------2 分

$f(0)=1$, $f'(0)=0$ ----------------3 分

在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程 y=1；----------------4 分

（Ⅱ） $f'(x)=2x-\sin x$, 令 $g(x)=2x-\sin x$, 则 $g'(x)=2-\cos x$, ----------------5 分

$\because x\in[-2\pi,2\pi]$

$\therefore g'(x)>0$ ----------------6 分

$\therefore g(x)$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上单调递增----------------7 分

$\because g(0)=0,$

$\therefore x\in[-2\pi,0), \mathrm{g}(x)=f'(x)<0, x\in(0,2\pi], \mathrm{g}(x)=f'(x)>0,$

$\therefore f(x)$ 在 $[-2\pi,0)$ 上单调递减，在 $(0,2\pi]$ 上单调递增, ----------------9 分

$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取最小值1， 当 $x=-2\pi$ 或 2π 时，$f(x)$ 取最大值 $4\pi^2+1$.

----------------10 分

（Ⅲ）要证明对任意的 $s>t$ ，有 $g(s)-g(t)<3s-3t$,

只需证明对任意的 $s>t$ ，有 $g(s)-3s<g(t)-3t$

记 $G(x)=g(x)-3x=-x-\sin x$, ----------------12 分

$\because G'(x)=-1-\cos x\le 0$.

$\therefore G(x)$ 在上 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. ----------------13 分

$\because s>t.$

$\therefore G(s)<G(t)$, 即 $g(s)-3s<g(t)-3t$.

$\therefore g(s)-g(t)<3s-3t$.----------------15 分

20. (本小题 15 分)

解：（Ⅰ）由题意可知：$b=2, a=2\sqrt{2}$ --2 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.--4 分

（Ⅱ）直线 l 的方程为 $y=kx+1$ --5 分

设 $M\left(x_1, y_1\right)$， $N\left(x_2, y_2\right)$，

直线 l 与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 联立可得：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+1\end{cases}$ --6 分

消去 y 可得：$\left(2k^2+1\right)x^2+4kx-6=0$，

则 $\Delta>0, x_1+x_2=\dfrac{-4k}{2k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{-6}{2k^2+1}$. --8 分

直线 MA 的方程为：$y=\dfrac{y_1-2}{x_1}x+2$，令 $y=t$ 可得 $x_P=\dfrac{(t-2)x_1}{y_1-2}=\dfrac{(t-2)x_1}{kx_1-1}$，------9 分

直线 NB 的方程为：$y=\dfrac{y_2+2}{x_2}x-2$，令 $y=t$ 可得 $x_Q=\dfrac{(t+2)x_2}{y_2+2}=\dfrac{(t+2)x_2}{kx_2+3}$.------10 分

$\because |DP|=|DQ|$,

$\therefore |x_P|=|x_Q|$ --11 分

法一：易知x_P与x_Q异号

$\therefore x_P+x_Q=0$

$\therefore \dfrac{(t-2)x_1}{kx_1-1}+\dfrac{(t+2)x_2}{kx_2+3}=0$

$\therefore \dfrac{(t-2)x_1(kx_2+3)+(t+2)x_2(kx_1-1)}{(kx_1-1)(kx_2+3)}=0$

$\therefore (t-2)x_1(kx_2+3)+(t+2)x_2(kx_1-1)=0$

$\therefore (t-2)(kx_1x_2+3x_1)+(t+2)(kx_1x_2-x_2)=0$

$\therefore (t-2)(\dfrac{-6k}{2k^2+1}+3x_1)+(t+2)(\dfrac{-6k}{2k^2+1}+x_1+\dfrac{4k}{2k^2+1})=0$

$\therefore (t-2)(\dfrac{-6k}{2k^2+1}+3x_1)+(t+2)(\dfrac{-2k}{2k^2+1}+x_1)=0$

$\therefore (x_1-\dfrac{2k}{2k^2+1})[3(t-2)+(t+2)]=0$ ---14 分

$\therefore (x_1-\dfrac{2k}{2k^2+1})(4t-4)=0$

$\because x_2(y_1-2)=x_2(kx_1-1)=kx_1x_2-x_2=\dfrac{-2k}{2k^2+1}+x_1\neq 0$

$\therefore t=1$ --15 分

法二：

$\therefore |\dfrac{(t-2)x_1}{kx_1-1}|=|\dfrac{(t+2)x_2}{kx_2+3}|$

$\therefore \left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|=\left|\dfrac{x_2(kx_1-1)}{x_1(kx_2+3)}\right|=\left|\dfrac{kx_1x_2-x_2}{kx_1x_2+3x_1}\right|.$

$\because kx_1x_2=\dfrac{3}{2}(x_1+x_2),$

$\therefore \left|\dfrac{kx_1x_2-x_2}{kx_1x_2+3x_1}\right|=\left|\dfrac{\frac{3}{2}(x_1+x_2)-x_2}{\frac{3}{2}(x_1+x_2)+3x_1}\right|=\left|\dfrac{\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2}{\frac{9}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2}\right|=\dfrac{1}{3}.$ ------------------------------13 分

$\therefore \left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|=\dfrac{1}{3}$

$\therefore t=1$或$t=4,$ --14 分

$\because -2<t<2,$

$\therefore t=1.$ --15 分

法三：

$\therefore |\dfrac{(t-2)x_1}{kx_1-1}|=|\dfrac{(t+2)x_2}{kx_2+3}|$

$\therefore \left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|=\left|\dfrac{x_2(kx_1-1)}{x_1(kx_2+3)}\right|=\left|\dfrac{kx_1x_2-x_2}{kx_1x_2+3x_1}\right|.$

$\left|\dfrac{kx_1x_2-x_2}{kx_1x_2+3x_1}\right|=\left|\dfrac{k(-\frac{6}{1+2k^2})-(-\frac{4k}{1+2k^2}-x_1)}{k(-\frac{6}{1+2k^2})+3x_1}\right|=\left|\dfrac{\frac{-2k}{1+2k^2}+x_1}{\frac{-6k}{1+2k^2}+3x_1}\right|=\dfrac{1}{3}.$ ----------------13 分

$\therefore \left|\dfrac{t-2}{t+2}\right|=\dfrac{1}{3}$

$\therefore t=1$或$t=4,$ --14 分

$\because -2<t<2,$

$\therefore t=1.$ --15 分

(21)(本小题 15 分)

解：（Ⅰ）$\varphi(A)=\{-4,-2,0,2\}$;----------------------------3 分（多写或少写一个元素扣 1 分）

（Ⅱ）首先，$0\in A$；--4 分

其次 A 中有 4 个非零元素，符号为一负三正或者一正三负. ------------------------------------5 分

记 $A=\{0,a,b,c,d\}$，不妨设 $a<0<b<c<d$ 或者 $a<b<c<0<d$ ---------------------6 分

①当 $a<0<b<c<d$ 时，$\{ab,ac,ad\}=\{-6,-8,-12\},\{bc,bd,cd\}=\{12,18,24\}$，

相乘可知 $bcd=72$，$a^3bcd=-576$，从而 $a^3=-8\Rightarrow a=-2$，

从而 $\{b,c,d\}=\{3,4,6\}$，所以 $A=\{0,-2,3,4,6\}$；---8 分

②当 $a<b<c<0<d$ 时，与上面类似的方法可以得到 $d^3=8\Rightarrow d=2$

进而 $\{b,c,d\}=\{-3,-4,-6\}$，从而 $A=\{0,2,-3,-4,-6\}$ ------------------------------------10 分

所以 $A=\{0,-2,3,4,6\}$ 或者 $A=\{0,2,-3,-4,-6\}$.

（III）估值+构造　需要分类讨论 A 中非负元素个数.

先证明 $|\varphi(A)|\ge 13$．考虑到将 A 中的所有元素均变为原来的相反数时，

集合 $\varphi(A)$ 不变，故不妨设 A 中正数个数不少于负数个数.接下来分类讨论：

情况一：A 中没有负数.

不妨设 $0\le a_1<a_2<\cdots<a_9$，则 $0\le a_1a_2<a_2a_3<a_2a_4<\cdots<a_2a_9<a_3a_9<\cdots<a_8a_9$

上式从小到大共有 1+7+6=14 个数，它们都是 $\varphi(A)$ 的元素，这表明 $|\varphi(A)|\ge 14$. ----------12 分

情况二： A 中至少有一个负数.

设 $b_1,b_2,\cdots,b_s$ 是 A 中的全部负元素，$c_1,c_2,\cdots,c_t$ 是 A 中的全部非负元素.

不妨设 $b_s<b_{s-1}<\cdots<b_1<0\le c_1<c_2<\cdots<c_t$

其中 s,t 为正整数，$s+t=9,s\le 4,t\ge 5$.

于是有 $0\ge b_1c_1>b_1c_2>\cdots>b_1c_t>b_2c_t>\cdots>b_sc_t$

以上是 $\varphi(A)$ 中的 $s+t-1=8$ 个非正数元素；另外，注意到 $c_2c_3<c_2c_4<c_2c_5<c_3c_5<c_4c_5$

它们是 $\varphi(A)$ 中的 5 个正数．这表明 $|\varphi(A)|\ge 13$.

综上可知，总有 $|\varphi(A)|\ge 13$. ---14 分

另一方面，当 $A=\{0,\pm1,\pm2,\pm2^2,\pm2^3\}$ 时，$\varphi(A)=\{0,-1,\pm2,\pm2^2,\pm2^3,\pm2^4,\pm2^5,-2^6\}$ 中恰有 13 个元素. ---15 分

综上所述，$\varphi(A)$ 中元素个数的最小值为 13.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。