高三数学查漏补缺题

2018.5

说明：

1、 个别题目有一定难度（标*的题目），请根据自己学校学生的情况谨慎选用.

2、 提供的题目并非一组试卷，小题（选、填）主要针对以前没有考到的知识点，或者在试题的呈现形式上没有用过的试题.

3、 教师要根据自己学校的学生情况，有针对性地选择使用.

【集合与简易逻辑】

1．已知集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\,|\lg(x-1)\leqslant 0\}$， $N=\{x\in\mathbf{Z}\,||x|<2\}$， 则 $M\cup N$=(　　)

A． $\varnothing$　　B． $(1,2)$　　C． $(-2,2]$　　D． $\{-1,0,1,2\}$

答案：D

2. 给出下列命题：

①若命题 p： $\exists x\in R$， 使得 $x^2+x-1<0$, 则 $\neg p:\forall x\in R$, 均有 $x^2+x-1\geq 0$;

②命题“若 $x^2-3x+2=0$， 则 $x=2$”的否命题为“若 $x^2-3x+2=0$, 则 $x\neq 2$”;

③若 $p\wedge q$ 为假命题， $p\vee q$ 为真命题，则命题 p,q 一真一假，

其中正确命题的序号是（　　）

A. ①②　　B.②③　　C.①③　　D. ①②③

答案：C

3. 下列条件中是“$2x^2-5x-3<0$”的必要不充分条件的是（　　）

A. $-\frac{1}{2}<x<3$　　B. $-\frac{1}{2}<x<4$　　C. $-3<x<\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}<x<0$

答案：B

【复数】

1. 如果复数 $z=a^2+a-2+(a^2-3a+2)i$ 为纯虚数，那么实数 a 的值为（　　）

A. 2　　B. 1　　C. -2　　D. 1 或 -2

答案：C

2．在复平面内，复数 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 对应的点为 Z，将点 Z 绕原点逆时针旋转 $90°$ 后得到点 Z'，则 Z' 对应的复数是

A． $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　B． $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　C． $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D． $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

答案：C

3. 设 a，$b\in\mathbf{R}$，$a+bi=\dfrac{11-7i}{1-2i}$（i 为虚数单位），则 $a+b$ 的值为______.

答案：8

【极坐标系与参数方程（理科）】

1．已知直线 $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\end{cases}$ (t 为参数)与曲线 $M:\rho=2\cos\theta$ 交于 P,Q 两点，则 $|PQ|$=(　　)

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

答案：C

2. 在以 O 为极点的极坐标系中，圆 $\rho=4\sin\theta$ 和直线 $\rho\sin\theta=a$ 相交于 A,B 两点.若 $\triangle AOB$ 是等边三角形，则 a 的值为__________.

答案：3

【不等式与线性规划】

1. 已知 $m\in(0,1)$，令 $a=\log_m 2$，$b=m^2$，$c=2^m$，那么 a,b,c 之间的大小关系为（　　）

A．$b<c<a$　　B．$b<a<c$　　C．$a<b<c$　　D．$c<a<b$

答案：C

2. 设 $m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq0$，"不等式 $m+\dfrac{4}{m}>4$"成立的一个必要不充分条件是（　　）

A．$m\neq2$　　B．$m>0$ 且 $m\neq2$　　C．$m>2$　　D．$m\geq2$

答案：A

3. 若 $4^x+4^y=1$，则 $x+y$ 的取值范围是_______.

答案：$(-\infty,-1]$

4. 设 D 为不等式组 $\begin{cases}x+y\geq0,\\x-y\leq0,\\x+3y\leq3\end{cases}$ 表示的平面区域，对于区域 D 内除原点外的任一点 $A(x,y)$，

则：(1)z=2x－y 的最小值为______；(2) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的取值范围是______.

答案：(1) $-\dfrac{9}{2}$；(2) $[-\sqrt{2},0]$.

【数列】

1. 设$\{a_n\}$是等差数列，下列结论中正确的是（　　）.

A.若$a_1+a_2>0$，则$a_2+a_3>0$　　B.若$a_1+a_3<0$，则$a_1+a_2<0$

C.若$0<a_1<a_2$，则$a_2>\sqrt{a_1a_3}$　　D.若$a_1<0$，则$(a_2-a_1)(a_2-a_3)>0$

答案：C

2. 若等差数列$\{a_n\}$满足$a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当$n=$________时，$\{a_n\}$的前n项和最大.

答案：8

3. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n=1+3a_n$，则数列的通项公式为_______.

答案：$a_n=-\dfrac{3^{n-1}}{2^n}$

4. 已知数列$\{a_n\}$, $a_2=2$, $a_n+a_{n+1}=3n, n\in N^*$,则$a_1+a_3+a_5=$_______.

答案：12

5. 已知数列$\{a_n\}$满足：点(n,a_n)在直线$2x-y+1=0$上，若使a_1、a_4、a_m构成等比数列，则$m=$_______.

答案：13

【平面向量】

1. 设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$不平行，向量$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$平行，则实数$\lambda=$________.

答案：$\dfrac{1}{2}$

2. 设$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，向量$\boldsymbol{a}=(\sin 2\theta,\cos\theta),\boldsymbol{b}=(\cos\theta,1)$，若$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则$\tan\theta=$_______.

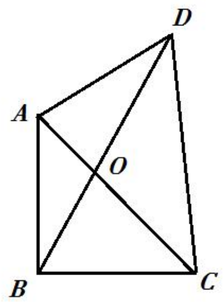
答案：$\dfrac{1}{2}$

3. 设向量$\boldsymbol{a}=(3,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，则实数$\lambda=$________.

答案：±3

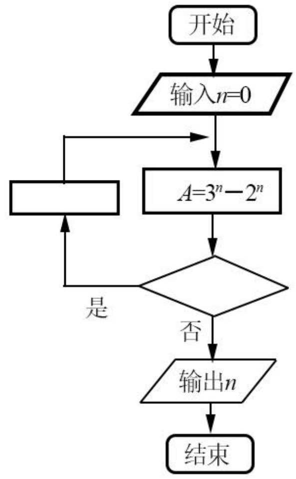
4. 如下图所示，已知平面四边形$ABCD$，$AB\perp BC$，$AB=BC=AD=2$，$CD=3$，AC与BD交于点O，记$I_1=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$I_2=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，$I_3=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$，则（　　）

A. $I_1<I_2<I_3$　　B. $I_1<I_3<I_2$　　C. $I_3<I_1<I_2$　　D. $I_2<I_1<I_3$



答案：C

【程序框图】



1. 如图所示的程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n，

那么在◇和□两个空白框中，可以分别填入（　　）

A．$A>1\,000$ 和 $n=n+1$

B．$A>1\,000$ 和 $n=n+2$

C．$A\le 1\,000$ 和 $n=n+1$

D．$A\le 1\,000$ 和 $n=n+2$

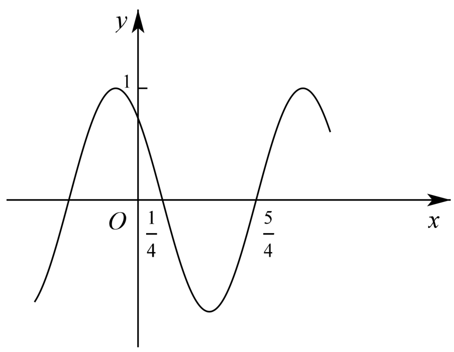
答案：D

【三角函数】

1．已知角 α 的终边经过点 $P\left(m,-3\right)$，且 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，则 m 等于__________.

答案：-4

2. 函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$ 的部分图像如图所示，则 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间为（　　）.



A. $\left(k\pi-\dfrac{1}{4},k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi-\dfrac{1}{4},2k\pi+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $\left(k-\dfrac{1}{4},k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

D. $\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{3}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$

答案：D

3. 已知函数. $f\left(x\right)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}+2\sin x$

（Ⅰ）求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期及其单调增区间;

（Ⅱ）当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 时,对任意 $t\in\mathbf{R}$, 不等式 $mt^2-mt+2\geq f\left(x\right)$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

解答：（Ⅰ）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，

因为 $f\left(x\right)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}+2\sin x=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}+2\sin x$

$=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

所以，最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$,

因为 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq x+\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$.

又因为 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，

所以 $f\left(x\right)$ 的递增区间为 $\left[-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right),\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增，

所以，当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=f(\dfrac{\pi}{2})=1$，

所以，$mt^2-mt+2\geq 1$ 恒成立，即 $mt^2-mt+1\geq 0$ 恒成立.

①当 $m=0$ 时，上式变为 $1\geqslant 0$，恒成立；

②当 $m\neq 0$ 时，若上式对于 $t\in\mathbf{R}$ 恒成立，

只需 $m>0$ 且 $\Delta=m^2-4m\leq 0$ 成立，解得 $0<m\leq 4$.

综上，m 的取值范围是 $0\leq m\leq 4$.

【解三角形】

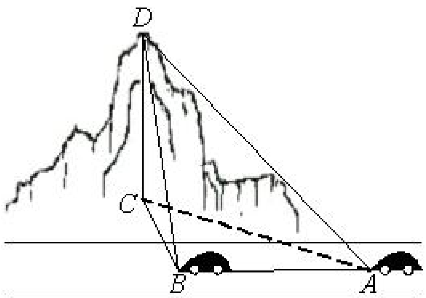
1. 在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边长分别是a,b,c，已知$c=2$，$C=\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）若$\triangle ABC$的面积$S=\sqrt{3}$,则$a=$______,$b=$______；

（Ⅱ）若$\triangle ABC$有且仅有一解，则a的取值范围是______.

答案：（Ⅰ）2，2；（Ⅱ）$(0,2]\cup\{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\}$

2. 如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到A处时测得公路北侧一山顶D在西偏北30°的方向上，行驶600m后到达B处，测得此山顶在西偏北75°的方向上，仰角为30°，则此山的高度$CD=$________m.



答案：$100\sqrt{6}$

3. 在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\sin B-b\cos C=c\cos B$.

（Ⅰ）判断△ABC的形状；

（Ⅱ）若$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{2}{3}\cos x+\dfrac{1}{2}$，求$f(A)$的取值范围.

解答：（Ⅰ）**法一**：因为 $a\sin B-b\cos C=c\cos B$，

由正弦定理可得 $\sin A\sin B-\sin B\cos C=\sin C\cos B$.

即$\sin A\sin B=\sin C\cos B+\cos C\sin B$，

所以$\sin(C+B)=\sin A\sin B$.

因为在△ABC中，$A+B+C=\pi$，

所以$\sin A=\sin A\sin B$　又$\sin A\neq 0$，

所以$\sin B=1$，$B=\dfrac{\pi}{2}$.

所以 △ABC为$B=\dfrac{\pi}{2}$的直角三角形.

法二： 因为 $a\sin B-b\cos C=c\cos B$，

由余弦定理可得 $a\sin B=b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即 $a\sin B = a$.

因为 $a \neq 0$， 所以 $\sin B = 1$.

所以在 $\triangle ABC$ 中， $B = \dfrac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 为 $B = \dfrac{\pi}{2}$ 的直角三角形.

（Ⅱ）因为 $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos 2x - \dfrac{2}{3}\cos x + \dfrac{1}{2} = \cos^2 x - \dfrac{2}{3}\cos x$

$= (\cos x - \dfrac{1}{3})^2 - \dfrac{1}{9}$.

所以 $f(A) = (\cos A - \dfrac{1}{3})^2 - \dfrac{1}{9}$.

因为 $\triangle ABC$ 是 $B = \dfrac{\pi}{2}$ 的直角三角形，

所以 $0 < A < \dfrac{\pi}{2}$， 且 $0 < \cos A < 1$，

所以 当 $\cos A = \dfrac{1}{3}$ 时， $f(A)$ 有最小值是 $-\dfrac{1}{9}$.

所以 $f(A)$ 的取值范围是 $[-\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{3})$.

【排列组合与二项式定理】

1. 将序号分别为 1，2，3，4，5 的 5 张参观券全部分给 4 人，每人至少 1 张，如果分给同一人的 2 张参观券连号，那么不同的分法种数是_______.（用数字作答）

答案：96

*2. 某学校高三年级有两个文科班，四个理科班，现每个班指定 1 人，对各班的卫生进行检查．若每班只安排一人检查，且文科班学生不检查文科班，理科班学生不检查自己所在的班，则不同安排方法的种数是（　　）

A． 48　　B． 72　　C． 84　　D． 168

答案：D

3. 已知 $(ax+1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 10，则实数 a 的值是_______.

答案：1

4. 若 $(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x})^n$ 的二项展开式中各项的二项式系数之和是 64，则 $n =$_______，展开式中的常数项为_______.（用数字作答）

答案：6，15

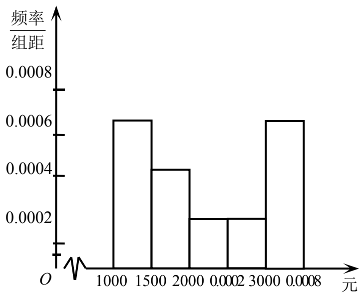
【概率统计】

1. 某班级有 50 名学生，现要采取系统抽样的方法在这 50 名学生中抽出 10 名学生，将这 50 名学生随机编号 1～50 号，并分组，第一组 1～5 号，第二组 6～10 号，…，第十组 46～

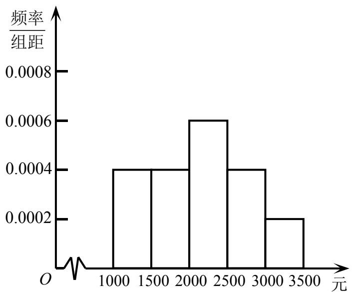
50 号，若在第三组中抽得号码为 12 的学生，则在第八组中抽得号码为______的学生.

答案：37　　（**注：**仅以此例补漏抽样方法，分层抽样不再补例.）

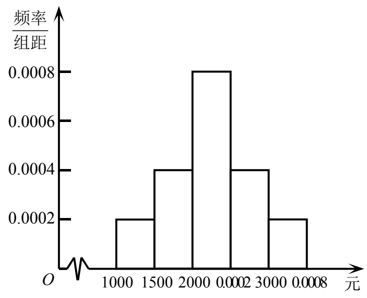
2. 了解本市居民的生活成本，甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查.他们将调查所得到的数据分别绘制成频率分布直方图(如图所示)，记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为s_1，s_2，s_3，则它们的大小关系为________.（用“＞”连接）



甲



乙



丙

答案：$s_1 > s_2 > s_3$

3．某公司为了解用户对其产品的满意度，从A,B两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：62　73　81　92　95　85　74　64　53　76

　　　　　78　86　95　66　97　78　88　82　76　89.

B 地区：73　83　62　51　91　46　53　73　64　82

　　　　　93　48　65　81　74　56　54　76　65　79

（Ⅰ）根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，得出结论即可）；

A 地 区		B 地 区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

（Ⅱ）根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个等级：

1.　满意度评分	2.　低于 70 分	3.　70 分到 89 分	4.　不低于 90 分
5.　满意度等级	6.　不满意	7.　满意	8.　非常满意

记事件 C：“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”，假设两地区用户的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率.

解答：（Ⅰ）由题意知，两地区用户满意度评分的茎叶图如下.

A 地区		B 地区
	4	6 8
3	5	1 3 6 4
6 4 2	6	2 4 5 5
6 8 8 6 4 3	7	3 3 4 6 9
9 2 8 6 5 1	8	3 2 1
7 5 5 2	9	1 3

通过茎叶图可以看出，A 地区用户满意度评分的平均值高于 B 地区用户满意度评分的平均值；A 地区用户满意度评分比较集中，B 地区用户满意度评分比较分散.

（Ⅱ）记 C_{A1} 为事件：“A 地区用户的满意度等级为满意或非常满意”，

记 C_{A2} 为事件：“A 地区用户的满意度等级为非常满意”，

记 C_{B1} 为事件：“B 地区用户的满意度等级为不满意”.

记 C_{B2} 为事件：“B 地区用户的满意度等级为满意”.

则 C_{A1} 与 C_{B1} 相互独立，C_{A2} 与 C_{B2} 相互独立，C_{B1} 与 C_{B2} 互斥，于是：

$$C=C_{B1}C_{A1}\cup C_{B2}C_{A2}.$$

所以 $P(C)=P(C_{B1}C_{A1}\cup C_{B2}C_{A2})=P(C_{B1}C_{A1})+P(C_{B2}C_{A2})$

$\quad=P(C_{B1})P(C_{A1})+P(C_{B2})P(C_{A2})$.

由题知，C_{A1}，C_{A2}，C_{B1}，C_{B2} 发生的频率分别为 $\frac{16}{20}$，$\frac{4}{20}$，$\frac{10}{20}$，$\frac{8}{20}$.

故 $P(C_{A1})=\frac{16}{20}$，$P(C_{A2})=\frac{4}{20}$，$P(C_{B1})=\frac{10}{20}$，$P(C_{B2})=\frac{8}{20}$，

故 $P(C)=\frac{10}{20}\times\frac{16}{20}+\frac{8}{20}\times\frac{4}{20}=0.48$. 即 C 的概率为 0.48.

【立体几何】

1. 已知 a，b 是两条不同直线，α，β 是两个不同平面，则

A. a∥α，a⊥b，则 b⊥α

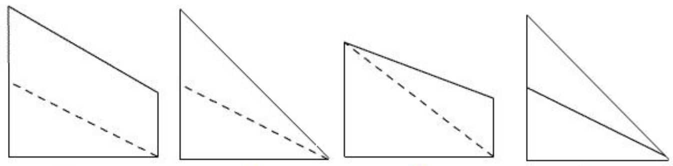
B. a⊥α，a⊥b，则 b∥α

C. a⊂α，b⊂α，a∥β，b∥β，则α∥β

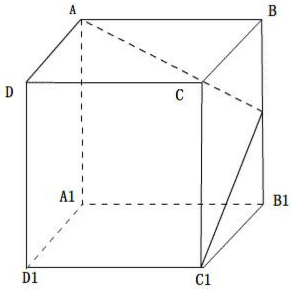
D. a∩b=A，a∥α，b∥α，a∥β，b∥β，则α∥β

答案：D

2. 如图所示，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 E 为棱 BB_1 的中点，用过点 A,E,C_1 的平面截该正方体的上半部分，则剩余几何体的侧视图为（　　）



A　　B　　C　　D



答案：A

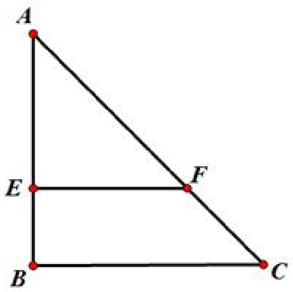
3. 如图，在 Rt△*ABC* 中，*AB*=*BC*=3，点 *E*、*F* 分别在线段 *AB*、*AC* 上，且 *EF*//*BC*，将△*AEF* 沿 *EF* 折起到△*PEF* 的位置，使得二面角 *P*-*EF*-*B* 的大小为 60°.

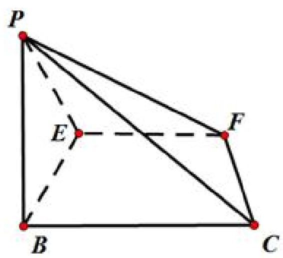
（Ⅰ）设平面 *PEB*∩平面 *PFC*=直线 *m*，判断直线 *m* 是否与直线 *CF* 平行，并说明理由.

（Ⅱ）若点 *E* 为线段 *AB* 的靠近 *B* 点的三等分点，

（ⅰ）求证：*PB*⊥*CF*;

（ⅱ）求 *PC* 与平面 *PEF* 所成角 θ 的正弦值.





解答：（Ⅰ）不平行.

若不然，由 *m*//*CF*，*m*⊂平面 *PEB*，*CF*⊄平面 *PEB*，可知：*CF*//平面 *PEB*.

又 *CF*⊂平面 *CFEB*，平面 *CFEB*∩平面 *PEB*=*BE*，所以，*CF*//*BE*.

与题设 *CF*∩*BE*=*A* 矛盾.

（Ⅱ）（ⅰ）证明：在 Rt△*ABC* 中，$\because AB=BC=3$，$\therefore BC\perp AB$.

$\because EF\,//\,BC$，$\therefore EF\perp AB$.

翻折后垂直关系没变，仍有 $EF\perp PE, EF\perp BE$.

又 $PE\cap BE=E$，$\therefore EF\perp$ 平面 PBE .

∵*EF*⊂平面 *BCFE*，∴平面 *BCFE*⊥平面 *PBE*.

$\because EF\perp AE, EF\perp BE \therefore \angle PEB$ 二面角 $P-EF-B$ 的平面角，

$\therefore \angle PEB=60^\circ$，又 $PE=2, BE=1$,由余弦定理得 $PB=\sqrt{3}$,

$\therefore PB^2+EB^2=PE^2, \therefore PB\perp EB$.

又∵平面 $BCFE$⊥平面 PBE，平面 $BCFE$∩平面 PBE=BE，

∴PB⊥平面 $BCFE$.

∵CF⊂平面 $BCFE$，∴PB⊥CF.

（ii）由（i）知，PB，BC，BE 两两垂直.

以点 B 为原点，分别以 BC、BE、BP 所在的直线为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系 B-xyz，如图．则 $P(0,0,\sqrt{3})$, $C(3,0,0)$, $E(0,1,0)$, $F(2,1,0)$,

$\overrightarrow{PE}=(0,1,-\sqrt{3}), \overrightarrow{PF}=(2,1,-\sqrt{3})$.

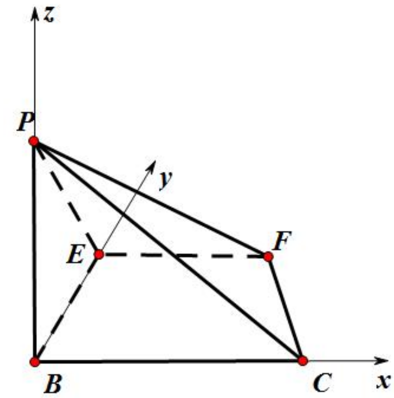
设平面 PEF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0\end{cases}$ 可得 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$,

$\overrightarrow{PC}=(3,0,-\sqrt{3})$,

设 PC 与平面 PEF 所成的角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\left\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{PC}\right\rangle\right|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}\right|=\frac{1}{4},$$



即 PC 与平面 PEF 所成的角的正弦值为 $\frac{1}{4}$.

【函数与导数】

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{1-x}, x\le 1\\ 1-\log_2 x, x>1\end{cases}$，则满足 $f(x)\le 2$ 的 x 的取值范围是

A．[−1，2]　　B．[0，2]　　C．[1，+∞）　　D．[0，+∞）

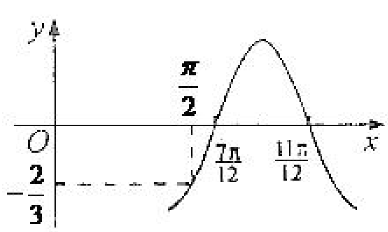
答案：D

2. 已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4\ (0<a<3)$，若 $x_1<x_2$，且 $x_1+x_2=1-a$，试比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小关系.

答案：$f(x_1)<f(x_2)$

3. 已知函数 $f(x)$=Acos($\omega x+\varphi$)的图象如图所示，$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{3}$，则 $f(\frac{\pi}{6})$=（　　）

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$



答案：B

*4. 已知函数 $f\left(x\right)=-x^3-7x+\sin x$，若 $f\left(a^2\right)+f\left(a-2\right)>0$，则实数 a 的取值范围是

（　　） A. $\left(-\infty,1\right)$　　B. $\left(-\infty,3\right)$　　C. $\left(-1,2\right)$　　D. $\left(-2,1\right)$

答案：D

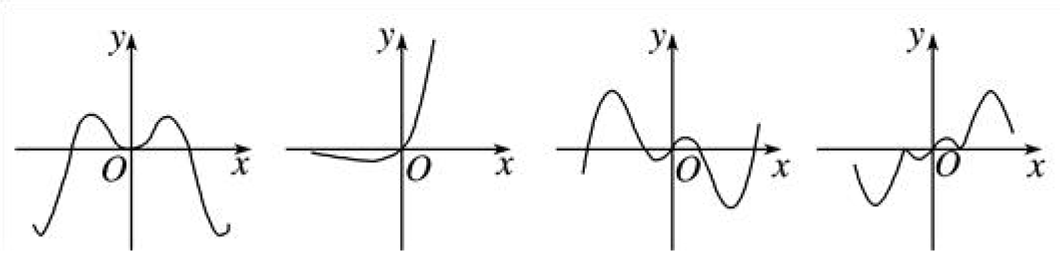
*5. 已知函数 $f\left(x\right)=e^x+x^2+\ln x$ 与函数 $g\left(x\right)=e^{-x}+2x^2-ax$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,-e\right]$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$　　C. $\left(-\infty,-1\right]$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$

答案：C

*6. 给出下列四个函数：① $y=x\cdot\sin x$；② $y=x\cdot\cos x$；③ $y=x\cdot\left|\cos x\right|$；④ $y=x\cdot 2^x$.

这四个函数的部分图象如下，但顺序被打乱，则按照从左到右的顺序将图象对应的函数序号安排正确的一组是(　　)



A. ①④②③　　B. ①④③②　　C. ④①②③　　D. ③④②①

答案：A

*7. 设函数 $f\left(x\right)=x-\dfrac{a}{x}$,

①若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上不单调,实数 a 的取值范围是______；

②若 $a=1$, 且 $f\left(mx\right)+mf\left(x\right)<0$ 对任意 $x\in\left[1,+\infty\right)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围

_______.

答案：$(-\infty,-1)$；$(-\infty,-1)$

8. 已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x$：

（Ⅰ）若函数的最小值为-1，求实数 a 的值；

（Ⅱ）若 $x_1>x_2$，且有 $x_1+x_2=2a$，求证：$f(x_1)>f(x_2)$.

解答：（Ⅰ）定义域为 **R**，

因为 $f'(x)=(x-a)e^x$，令 $f'\left(x\right)=0$，得 $x=a$

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化如下表：

x	$(-\infty，a)$	a	$(a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 极小值点，也是最小值点，

所以 $f(a)=-e^{a}=-1$，解得 $a=0$；

（II）由题可知 $x_1>a$，并且有 $x_2=2a-x_1$，

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-a-1)e^{x_1}-(a-x_1-1)e^{2a-x_1}$，

记 $g(x)=(x-a-1)e^{x}-(a-x-1)e^{2a-x}$　$x>a$，

$g'(x)=(x-a)(e^{x}-e^{2a-x})$，

当 $x>a$ 时，$e^{x}>e^{2a-x}$，即 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)>g(a)=0$

所以有 $f(x_1)>f(x_2)$，结论成立.

9. 已知函数 $f(x)=xe^{-x}(x\in\mathbf{R})$.

（I）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（II）已知函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，证明当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(III) 如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明 $x_1+x_2>2$.

解答：（I）$f'(x)=(1-x)e^{-x}$　令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$

$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在（$-\infty,1$）内是增函数，在（$1,+\infty$）内是减函数.

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $f(1)$，且 $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

（Ⅱ）由题意可知 $g(x)=f(2-x)$，得 $g(x)=(2-x)\mathrm{e}^{x-2}$.

令 $F(x)=f(x)-g(x)$，即 $F(x)=x\mathrm{e}^{-x}+(x-2)\mathrm{e}^{x-2}$. 于是

$$F'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^{2x-2}-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

当 $x>1$ 时，$2x-2>0$，从而 $\mathrm{e}^{2x-2}-1>0$，又 $\mathrm{e}^{-x}>0$，

所以 $F'(x)>0$，从而函数 $F(x)$ 在[1，+∞）上是增函数. 又 $F(1)=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}=0$，

所以 $x>1$ 时，有 $f(x)>F(1)$=0，即 $f(x)>g(x)$.

（Ⅲ）（1）若 $(x_1-1)(x_2-1)=0$，

由（Ⅰ）及 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $x_1=x_2=1$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.

（2）若 $(x_1-1)(x_2-1)>0$，由（Ⅰ）及 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $x_1=x_2$，与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.

根据（1）（2）得 $(x_1-1)(x_2-1)<0$，不妨设 $x_1<1$，$x_2>1$.

由（Ⅱ）可知，$f(x_2)>g(x_2)$，$g(x_2)=f(2-x_2)$，

所以 $f(x_2)>f(2-x_2)$，从而 $f(x_1)>f(2-x_2)$. 因为 $x_2>1$，所以 $2-x_2<1$，

又由（Ⅰ）可知函数 $f(x)$ 在区间（$-\infty,1$）内是增函数，所以 $x_1>2-x_2$，即 x_1+x_2>2.

10. 已知函数 $f(x)=(x^2-a)\mathrm{e}^x$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若在区间 $(1,2)$ 上存在不相等的实数 m,n，使 $f(m)=f(n)$ 成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 x_1，x_2，求证：$f(x_1)f(x_2)<4\mathrm{e}^{-2}$.

解答：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2\mathrm{e}^x$，$f'(x)=\mathrm{e}^x(x^2+2x)$.

由 $\mathrm{e}^x(x^2+2x)=0$，解得 $x=0$，$x=-2$.

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为$(-\infty,-2)$，$(0,+\infty)$，单调减区间为$(-2,0)$.

（II）依题意即求使函数 $f(x)=e^x(x^2-a)$ 在 $(1,2)$ 上不为单调函数的 a 的取值范围.

$f'(x)=e^x(x^2+2x-a)$.设 $g(x)=x^2+2x-a$，则 $g(1)=3-a$，$g(2)=8-a$.

因为函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上为增函数，

当 $\begin{cases} g(1)=3-a<0 \\ g(2)=8-a>0 \end{cases}$，即当$3<a<8$时，函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上有且只有一个零点，设为 x_0.

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数；

当 $x\in(x_0,2)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数，满足在 $(1,2)$ 上不为单调函数.

当 $a\le 3$ 时，$g(1)\ge 0$，$g(2)>0$，所以在 $(1,2)$ 上 $g(x)>0$ 成立（因 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上为增函数)，所以在 $(1,2)$ 上 $f'(x)>0$ 成立，即 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上为增函数，不合题意.

同理 $a\ge 8$ 时，可判断 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上为减函数，不合题意.

综上$3<a<8$.

(III) $f'(x)=e^x(x^2+2x-a)$.

因为函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点，即 $f'(x)$ 有两个不同的零点，即方程 $x^2+2x-a=0$ 的判别式$\Delta=4+4a>0$，解得 $a>-1$.

由 $x^2+2x-a=0$，解得 $x_1=-1-\sqrt{a+1},x_2=-1+\sqrt{a+1}$. 此时 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=-a$.

随着 x 变化时，$f(x)$ 和 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 x_1 是函数 $f(x)$ 的极大值点，x_2 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

所以 $f(x_1)$ 为极大值，$f(x_2)$ 为极小值.

所以 $f(x_1)f(x_2)=e^{x_1}(x_1^2-a)\times e^{x_2}(x_2^2-a)=e^{x_1+x_2}[x_1^2x_2^2-a(x_1^2+x_2^2)+a^2]$

$$=e^{x_1+x_2}\{x_1^2x_2^2-a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+a^2\}=e^{-2}[a^2-a(4+2a)+a^2]=-4ae^{-2}.$$

因为 $a>-1$，所以 $-4ae^{-2}<4e^{-2}$.

所以 $f(x_1)f(x_2)<4e^{-2}$.

【解析几何】

1. 直线$x\cos\alpha+\sqrt{3}y+2=0$的倾斜角的取值范围是________.

答案:$\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{5}{6}\pi,\pi\right)$

2. 已知直线$x+a^2y+6=0$与直线$(a-2)x+3ay+2a=0$平行，则a的值为（　　）

A.0 或 3 或-1　　B.0 或 3　　C.3 或-1　　D.0 或-1

答案：D

3. 已知直线$mx+4y-2=0$与$2x-5y+n=0$互相垂直，垂足为$P(1,p)$，则$m-n+p$的值是（　　）

A. 24　　B. 20　　C. 0　　D. -4

答案：B

4.已知点$A(0,2)$，$B(2,0)$. 若点C在函数$y=x^2$的图象上，则使得$\triangle ABC$的面积为 2 的点C的个数为_________

答案；4

5. 在平面直角坐标系xOy中，点$A(0,3)$，直线l：$y=2x-4$. 设圆C的半径为 1，圆心在l上. 若圆C上存在点M，使$MA=2MO$，求圆心C的横坐标a的取值范围.

答案；$[0,\dfrac{12}{5}]$

6. 已知抛物线C：$y^2=4x$ 焦点为F，点P在C上的动点，$A(-1,0)$，则$\left(\dfrac{|PF|}{|PA|}\right)_{\min}=$__

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

*7. 若圆$x^2+y^2-4x-4y-10=0$上至少有三个不同点到直线$l:ax+by=0$的距离为$2\sqrt{2}$,则直线l的倾斜角的取值范围是　(　　)

$A.[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{4}]$　　$B.[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}]$　　$C.[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$　　$D.[0,\dfrac{\pi}{2}]$

答案：B

*8. 在平面直角坐标系xOy中，圆C的方程为$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线$y=kx-2$上至少存在一点，使得以该点为圆心、1 为半径的圆与圆C有公共点，则k的最大值是_______.

答案：$\dfrac{4}{3}$

9. 已知椭圆W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的上下顶点分别为$A,B$，且点$B\ (0,-1)$. F_1,F_2分别为椭圆W的左、右焦点，且$\angle F_1BF_2=120^\circ$.

（Ⅰ）求椭圆 W 的标准方程；

（Ⅱ）点 M 是椭圆上异于 A，B 的任意一点，过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于 N，E 为线段 MN 的中点．直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C，G 为线段 BC 的中点，O 为坐标原点．求 $\angle OEG$ 的大小．

解答：(Ⅰ)依题意，得 $b=1$．又 $\angle F_1BF_2=120^\circ$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta BF_1O$ 中，$\angle F_1BO=60^\circ$，所以 $a=2$．

所以椭圆 W 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$．

(Ⅱ)设 $M\ (x_0,y_0)$，$x_0\neq 0$，则 $N\ (0,y_0)$，$E\ (\dfrac{x_0}{2},y_0)$．

因为点 M 在椭圆 W 上，所以 $\dfrac{x_0{}^2}{4}+y_0{}^2=1$．即 $x_0{}^2=4-4y_0{}^2$．

又 $A\ (0,1)$，所以直线 AE 的方程为 $y-1=\dfrac{2(y_0-1)}{x_0}x$．

令 $y=-1$，得 $C\ (\dfrac{x_0}{1-y_0},-1)$．

又 $B\ (0,-1)$，G 为线段 BC 的中点，所以 $G\ (\dfrac{x_0}{2(1-y_0)},-1)$．

所以 $\overrightarrow{OE}=(\dfrac{x_0}{2},y_0)$，$\overrightarrow{GE}=(\dfrac{x_0}{2}-\dfrac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1)$．

$$\begin{aligned}\text{因为}\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}&=\frac{x_0}{2}(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)})+y_0(y_0+1)\\&=\frac{x_0{}^2}{4}-\frac{x_0{}^2}{4(1-y_0)}+y_0{}^2+y_0\\&=1-\frac{4-4y_0{}^2}{4(1-y_0)}+y_0\\&=1-y_0-1+y_0=0,\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$．$\angle OEG=90^\circ$．

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过点 P 的直线 l 的方程为 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率；

（Ⅱ）若直线 l 与 x 轴、y 轴分别相交于 A,B 两点，试求 ΔOAB 面积的最小值；

(Ⅲ)设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 Q 与点 F_1 关于直线 l 对称，求证：点 Q,P,F_2 三点共线．

解答：（Ⅰ）依题意可知 $a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2-1}=1$，

所以椭圆 C 离心率为 $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅱ）因为直线 l 与 x 轴，y 轴分别相交于 A,B 两点，所以 $x_0\neq 0, y_0\neq 0$.

令 $y=0$，由 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 得 $x=\dfrac{2}{x_0}$，则 $A(\dfrac{2}{x_0},0)$.

令 $x=0$，由 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 得 $y=\dfrac{1}{y_0}$，则 $B(0,\dfrac{1}{y_0})$.

所以 ΔOAB 的面积 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{x_0y_0}\right|=\dfrac{1}{|x_0y_0|}$.

因为点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，所以 $\dfrac{x_0{}^2}{2}+y_0{}^2=1$.

所以 $1=\dfrac{x_0{}^2}{2}+y_0{}^2\geq 2\dfrac{|x_0y_0|}{\sqrt{2}}$. 即 $|x_0y_0|\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\dfrac{1}{|x_0y_0|}\geq\sqrt{2}$.

所以 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|=\dfrac{1}{|x_0y_0|}\geq\sqrt{2}$.

当且仅当 $\dfrac{x_0{}^2}{2}=y_0{}^2$，即 $x_0=\pm 1, y_0=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，ΔOAB 面积的最小值为 $\sqrt{2}$.

（Ⅲ）①当 $x_0=0$ 时，$P(0,\pm 1)$.

当直线 $l:y=1$ 时，易得 $Q(-1,2)$，此时 $k_{F_2P}=-1$，$k_{F_2Q}=-1$.

因为 $k_{F_2Q}=k_{F_2P}$，所以三点 Q,P,F_2 共线.

同理，当直线 $l:y=-1$ 时，三点 Q,P,F_2 共线.

②当 $x_0\neq 0$ 时，设点 $Q(m,n)$，因为点 Q 与点 F_1 关于直线 l 对称，

所以 $\begin{cases}\dfrac{x_0}{2}\cdot\dfrac{m-1}{2}+y_0\cdot\dfrac{n}{2}=1,\\ \dfrac{\frac{n}{2}-0}{\frac{m-1}{2}+1}\cdot(-\dfrac{x_0}{2y_0})=-1.\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}x_0m+2y_0n-x_0-4=0,\\ 2y_0m-x_0n+2y_0=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases} m=\dfrac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}, \\ n=\dfrac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}. \end{cases}$

所以点 $Q(\dfrac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2},\dfrac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2})$.

又因为 $\overrightarrow{F_2P}=(x_0-1,y_0)$，$\overrightarrow{F_2Q}=(\dfrac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1,\dfrac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2})$， 且

$$(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1)\cdot y_0-\frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\cdot(x_0-1)=y_0\cdot\frac{(4x_0-8y_0{}^2)-(4x_0+8)(x_0-1)}{4y_0^2+x_0^2}$$

$$=y_0\cdot\frac{4x_0-8y_0{}^2-(4x_0{}^2+4x_0-8)}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-8y_0{}^2-4x_0{}^2+8}{4y_0^2+x_0^2}$$

$$=y_0\cdot\frac{-4(2y_0{}^2+x_0{}^2)+8}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-4\times2+8}{4y_0^2+x_0^2}=0.$$

所以 $\overrightarrow{F_2P}//\overrightarrow{F_2Q}$. 所以点 Q,P,F_2 三点共线.

综上所述，点 Q,P,F_2 三点共线.

11. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，M 为椭圆的上顶点，O 为坐标原点，且△OMF 是等腰直角三角形.

（Ⅰ）求椭圆的方程;

（Ⅱ）是否存在直线 l 交椭圆于 P，Q 两点， 且使点 F 为△PQM 的垂心(即三角形三条高线的交点)？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

解答:（Ⅰ）由△OMF 是等腰直角三角形，得 $b=1$，$a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}$，

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）假设存在直线 l 交椭圆于 P，Q 两点，且 F 为△PQM 的垂心，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$,因为 $M(0,1)$，$F(1,0)$，故 $k_{PQ}=1$.

于是设直线 l 的方程为 $y=x+m$，由 $\begin{cases} y=x+m, \\ x^2+2y^2=2, \end{cases}$ 得 $3x^2+4mx+2m^2-2=0$.

由 $\Delta > 0$，得 $m^2 < 3$， 且 $x_1 + x_2 = -\dfrac{4m}{3}$，$x_1x_2 = \dfrac{2m^2-2}{3}$.

由题意应有 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$，又 $\overrightarrow{MP}=(x_1,y_1-1)$，$\overrightarrow{FQ}=(x_2-1,y_2)$，

故 $x_1(x_2-1)+y_2(y_1-1)=0$，得 $x_1(x_2-1)+(x_2+m)(x_1+m-1)=0$.

即 $2x_1x_2+(x_1+x_2)(m-1)+m^2-m=0$.

整理得 $2\times\dfrac{2m^2-2}{3}-\dfrac{4}{3}m(m-1)+m^2-m=0$.

解得 $m=-\dfrac{4}{3}$ 或 $m=1$.

经检验，当 $m=1$ 时，$\triangle PQM$ 不存在，故舍去 $m=1$.

当 $m=-\dfrac{4}{3}$ 时，所求直线 l 存在，且直线 l 的方程为 $y=x-\dfrac{4}{3}$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l: x-y-2=0$，抛物线 $C: y^2=2px\left(p>0\right)$.

（Ⅰ）若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程；

（Ⅱ）若抛物线 C 上存在相异两点 P 和 Q 关于直线 l 对称，求 p 的取值范围.

解答：（Ⅰ）因为直线 $l: x-y-2=0$ 与 x 轴的交点坐标为 $(2,0)$，

所以抛物线的焦点为 $(2,0)$，所以 $\dfrac{p}{2}=2$，故 $y^2=8x$.

（Ⅱ）**法一：** 设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则由 $\begin{cases} y_1^2=2px_1 \\ y_2^2=2px_2 \end{cases}$，得 $\begin{cases} \dfrac{y_1^2}{2p}=x_1 \\ \dfrac{y_2^2}{2p}=x_2 \end{cases}$，故 $k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{2p}-\dfrac{y_2^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$，

又因为 P,Q 关于直线 l 对称，所以 $k_{PQ}=-1$，即 $y_1+y_2=-2p$，

所以 $x_1+x_2=y_1+y_2+4=4-2p$，

又 $x_1+x_2=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{2p}$，

所以 $y_1^2+y_2^2=8p-4p^2$，故 $y_1y_2=4p^2-4p$.

所以，y_1、y_2 是关于 y 的方程 $y^2+2py+4p^2-4p=0$ 的两相异实根，

因此 $\Delta=(2p)^2-4\left(4p^2-4p\right)>0$，解得 $p\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

法二：设点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，线段PQ的中点$M(x_0,y_0)$，

因为点P和Q关于直线l对称，所以直线l垂直平分线段PQ，

于是直线PQ的斜率为-1，则可设其方程为$y=-x+b$.

由$\begin{cases} y^2=2px \\ y=-x+b \end{cases}$消去$x$得$y^2+2py-2pb=0$，(*)

因为P 和Q是抛物线C上的相异两点，所以$y_1\neq y_2$，

从而$\varDelta=(2p)^2-4(4p^2-4p)>0$，化简得$p+2b>0$.

方程(*)的两根为$y_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2+2pb}$，从而$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=-p$.

因为$M(x_0,y_0)$在直线l上，所以$x_0=2-p$.

又因为$M(2-p,-p)$在直线$y=-x+b$上，

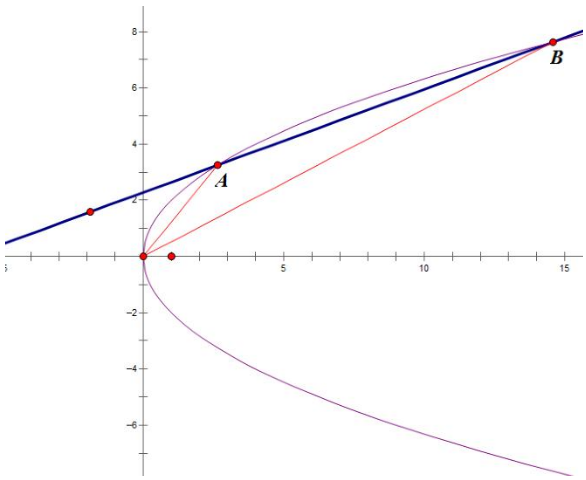
所以$-p=-(2-p)+b$，即$b=2-2p$.

于是有$p+2(2-2p)>0$，所以$p<\dfrac{4}{3}$，

因此p的取值范围为$\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

13. 已知：A,B在$y^2=2px$上，直线OA,OB倾斜角为α,β，且$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

证明直线AB过定点.



分析：(1) 条件$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$如何代数化？

$\tan(\alpha+\beta)=1$，$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$，

$k_1+k_2=1-k_1k_2$

(2) 直线AB的代数化

$\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=2px \end{cases}$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$ky^2-2py+2bp=0$

$y_1+y_2=\dfrac{2p}{k}$，$y_1y_2=\dfrac{2bp}{k}$

(3)研究直线AB的方程，也就是找k,b之间的关系.

关键条件：$k_1+k_2=1-k_1k_2$

$\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=1-\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}$，$x_1=\dfrac{y_1^2}{2p},x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$，得$b=2p(1+k)$

直线 AB：$y=kx+2p(1+k)$

$\therefore y=k(x+2p)+2p$，直线 AB 过 $(-2p,2p)$.

*【创新题】

1．设 S，T 是 **R** 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：

①$T=\{f(x)|x\in S\}$；②对任意 $x_1,x_2\in S$, 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，

那么称这两个集合 S 和 T“保序同构”．以下集合对**不是**“保序同构”的是（　　）

A． $A=N^*,B=N$　　B． $A=\{x|-1\le x\le 3\},B=\{x|x=-8或0<x\le 10\}$

C． $A=\{x|0<x<1\},B=R$　　D． $A=Z,B=Q$

答案：D

2．若直角坐标系内 A、B 两点满足：（1）点 A、B 都在 $f(x)$ 图象上；（2）点 A、B 关于原点对称，则称点对(A,B)是函数 $f(x)$ 的一个“和谐点对”，(A,B)与(B,A)可看作同一个“和谐点对”．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x(x<0)\\ \dfrac{2}{e^x}\quad(x\ge 0)\end{cases}$，则 $f(x)$ 的“和谐点对”有（　　）

A. 1个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

答案：B

3. 设函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，（$A,\omega,\varphi$ 是常数，$A>0,\omega>0$），若 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 上具有单调性，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为________.

答案：π

4．已知 $f\left(x\right)=\sin\omega x-\cos\omega x\quad(\omega>\frac{2}{3})$，若函数 $f\left(x\right)$ 图象的任何一条对称轴与 x 轴交点的横坐标都不属于区间 $\left(\pi,2\pi\right)$，则 ω 的取值范围是__________.（结果用区间表示）

答案：$\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$

5．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$A$，$\omega$，$\varphi$ 均为正的常数)的最小正周期为 π，当 $x=\frac{2\pi}{3}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 取得最小值，则下列结论正确的是（　）.

A. $f\left(2\right)<f\left(-2\right)<f\left(0\right)$　　B. $f\left(0\right)<f\left(2\right)<f\left(-2\right)$

C. $f\left(-2\right)<f\left(0\right)<f\left(2\right)$　　D. $f\left(2\right)<f\left(0\right)<f\left(-2\right)$

答案：A

6．已知 a，b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 所在的直线

与 a，b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 30°角；

②当直线 AB 与 a 成 60°角时，AB 与 b 成 60°角；

③直线 AB 与 a 所成角的最小值为 45°；

④直线 AB 与 a 所成角的最小值为 60°；

其中正确的是________.（填写所有正确结论的编号）.

答案：②③

7. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为棱 CC_1 的中点，点 P，Q 分别为面 $A_1B_1C_1D_1$ 和线段 B_1C 上的动点，则 ΔPEQ 周长的最小值为_______.

答案：$\sqrt{10}$

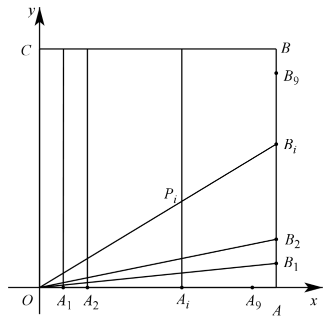
8. 如图，在正方形 $OABC$ 中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为 $(10,0)$，点 C 的坐标为 $(0,10)$，分别将线段 OA 和 AB 十等份，分点分别记为 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 和 $B_1,B_2,\cdots,B_9$，连接 OB_i，过 A_i 作 x 轴的垂线与 OB_i 交于点 P_i $\left(i\in\mathbf{N}^*,1,,\ i,,\ 9\right)$. 下列说法正确的是（　　）

A. 点 P_i $\left(i\in\mathbf{N}^*,1,,\ i,,\ 9\right)$ 都在同一条直线上

B. 点 P_i $\left(i\in\mathbf{N}^*,1,,\ i,,\ 9\right)$ 都在同一条抛物线上

C. 存在点 P_i $\left(i\in\mathbf{N}^*,1,,\ i,,\ 9\right)$ 在直线 AC 上

D. 存在点 P_i $\left(i\in\mathbf{N}^*,1,,\ i,,\ 9\right)$ 使得 $S_{\Delta OCP_i}=3S_{\Delta OAP_i}$



答案：B

9. 设直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A,B 两点，与圆 C：$\left(x-5\right)^2+y^2=r^2\left(r>0\right)$ 相切于点 M，且 M 为线段 AB 中点，试写出一个 r 的值：_______，使这样的直线 l 恰有 4 条.

答案：满足 $r\in\left(2,4\right)$ 的任意实数均可

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n. 若对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，则称 $\{a_n\}$ 是"H 数列".

（I）若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n$ $\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，证明：$\{a_n\}$ 是"H 数列"；

（II）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，其首项 $a_1=1$，公差 $d<0$. 若 $\{a_n\}$ 是"H 数列"，求 d 的值；

（III）证明：对任意的等差数列 $\{a_n\}$，总存在两个"H 数列" $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得

$a_n = b_n + c_n \left(n \in \mathbf{N}^*\right)$成立.

解答：（Ⅰ）当$n \geqslant 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$，当$n = 1$时，$a_1 = S_1 = 2$，

∴$n = 1$时，$S_1 = a_1$，当$n \geqslant 2$时，$S_n = a_{n+1}$，∴$\{a_n\}$是"H数列".

（Ⅱ）$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n + \frac{n(n-1)}{2}d$

对$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$\exists m \in \mathbf{N}^*$使$S_n = a_m$，即$n + \frac{n(n-1)}{2}d = 1 + (m-1)d$

取$n = 2$得$1 + d = (m-1)d$，$m = 2 + \frac{1}{d}$

∵$d < 0$，∴$m < 2$，又$m \in \mathbf{N}^*$，∴$m = 1$，∴$d = -1$.

（Ⅲ）设$\{a_n\}$的公差为d.

令$b_n = a_1 - (n-1)a_1 = (2-n)a_1$，对$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$b_{n+1} - b_n = -a_1$

$c_n = (n-1)(a_1 + d)$，对$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$c_{n+1} - c_n = a_1 + d$

则$b_n + c_n = a_1 + (n-1)d = a_n$，且$\{b_n\},\{c_n\}$为等差数列.

$\{b_n\}$的前n项和$T_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(-a_1)$，令$T_n = (2-m)a_1$，则$m = \frac{n(n-3)}{2} + 2$

当$n = 1$时$m = 1$；

当$n = 2$时$m = 1$；

当$n \geqslant 3$时，由于n与$n-3$奇偶性不同，即$n(n-3)$非负偶数，$m \in \mathbf{N}^*$

因此对$\forall n$，都可找到$m \in \mathbf{N}^*$，使$T_n = b_m$成立，即$\{b_n\}$为"H数列".

$\{c_n\}$的前 n 项和$R_n = \frac{n(n-1)}{2}(a_1 + d)$，令$c_n = (m-1)(a_1 + d) = R_m$，则$m = \frac{n(n-1)}{2} + 1$

∵对$\forall n \in \mathbf{N}^*$，$n(n-1)$是非负偶数，∴$m \in \mathbf{N}^*$

即对$\forall n \in \mathbf{N}^*$，都可找到$m \in \mathbf{N}^*$，使得$R_n = c_m$成立，即$\{c_n\}$为"$H$数列"

因此命题得证.