2022-2023 学年北京交大附中高二（上）期中数学试卷

一、选择题。本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．（4 分）设 $z=-3+2i$，则在复平面内 $\overline{z}$ 对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．（4 分）过点 $M(-2,m)$、$N(m,4)$ 的直线的斜率等于 1，则 m 的值为(　　)

A．1　　B．4　　C．1 或 3　　D．1 或 4

3．（4 分）圆 $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ 的圆心和半径分别为(　　)

A．$(4,-6)$，16　　B．$(2,-3)$，4　　C．$(-2,3)$，4　　D．$(2,-3)$，16

4．（4 分）已知 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(x,1,2)$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为(　　)

A．$\dfrac{5\pi}{6}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

5．（4 分）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 C_1D_1 的中点，则异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为( )

A．$\dfrac{1}{20}$　　B．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\dfrac{1}{20}$

6．（4 分）已知点 $A(1,3)$，$B(-2,-1)$，若直线 $l:y=k(x-2)+1$ 与线段 AB 相交，则 k 的取值范围(　　)

A．$k\geqslant\dfrac{1}{2}$　　B．$k\leqslant-2$　　C．$k\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $k\leqslant-2$　　D．$-2\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{2}$

7．（4 分）已知直线 $l_1:ax+(a+2)y+1=0$，$l_2:x+ay+2=0(a\in R)$，则“$e^a=\dfrac{1}{e}$”是“$l_1//l_2$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．（4 分）已知直线 $l:x+ay-1=0(a\in R)$ 是圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的对称轴，过点 $A(-4,a)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 B，则 $|AB|=$(　　)

A．2　　B．$4\sqrt{2}$　　C．6　　D．7

9．（4 分）数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半．这条直线被后人称为三角形的欧拉线．已知 ΔABC 的顶点 $A(2,0)$，$B(1,2)$，且 $AC=BC$，则 ΔABC 的欧拉线的方程为(　　)

A．$x-2y-4=0$　　B．$2x+y-4=0$　　C．$4x+2y+1=0$　　D．$2x-4y+1=0$

10.（4分）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为30°，则()

A．$AB=2AD$

B．AB与平面AB_1C_1D所成的角为30°

C．$AC=CB_1$

D．B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为45°

二、填空题（本大题共5小题，每小题5分，共25分）

11.（5分）已知直线l经过点$(1,-1)$，且与直线$2x-y-5=0$垂直，则直线l的方程为 ____.

12.（5分）在平面直角坐标系xOy中，直线$x+2y-5=0$被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=9$截得的弦长为 ____.

13.（5分）在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，若E为AB的中点，则点E到面ACD_1的距离是____.

14.（5 分）已知直线$l:3x+4y+m=0$，圆$C:x^2+y^2-4x+2=0$，则圆C的半径$r=$____；若在圆C上存在两点A，B，在直线l上存在一点P，使得$\angle APB=90^\circ$，则实数m的取值范围是____.

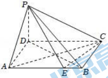
15.（5分）已知实数x_1、x_2、y_1、y_2满足：$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$|AB|=$____，$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$的最大值为 ____.

三、解答题．本大题共5小题，共55分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（10分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PD\perp$平面$ABCD$，$PD=AD=2$，$AB=4$，点E在线段AB上，且$AE=\frac{3}{4}AB$．

（Ⅰ）求证：$CE\perp$平面PBD；

（Ⅱ）求二面角$P-CE-A$的余弦值．



17.（11 分）已知圆 E 经过点 $A(0,0)$，$B(1,1)$，从下列 3 个条件选取一个：

①过点 $C(2,0)$；

②圆 E 恒被直线 $mx-y-m=0(m\in R)$ 平分；

③与 y 轴相切.

（1）求圆 E 的方程；

（2）过点 $P(2,3)$ 的直线 l 与圆 E 相切，求直线 l 方程.

18.（11 分）如图所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 O 是 AC 与 BD 的交点，点 E 是线段 OD_1 上的一点.

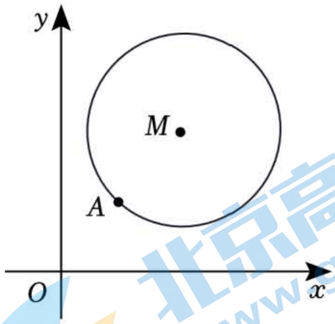
（1）若点 E 为 OD_1 的中点，求直线 OD_1 与平面 CDE 所成角的正弦值；

（2）是否存在点 E，使得平面 $CDE\perp$ 平面 CD_1O；若存在，请指出点 E 的位置，并加以证明；若不存在，请说明理由.

19.（11 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知以 M 为圆心的圆 $M: x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.

（1）设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B，C 两点，且 $|BC|=|OA|$，求直线 l 的方程；

（2）设点 $T(t,0)$ 满足：存在圆 M 上的两点 P 和 Q，使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，求实数 t 的取值范围.



20.（12 分）已知 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1, t_2\}\subseteq S$，记 $A_i=\{x\mid x=a+t_i, a\in A\}(i=1,2)$，用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数.

（1）若 $n=4$，$A_1\bigcap A_2=\varnothing$，分别讨论 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $A=\{1, 2, 4\}$ 时，集合 T 的情况；

（2）若 $n=6$，$A_1\bigcap A_2=\varnothing$，求 $|A_1\bigcup A_2|$ 的最大值；

（3）若 $n=7$，$|A|=4$，则对于任意的 A，是否都存在 T，使得 $A_1\bigcap A_2=\varnothing$？说明理由.

2022-2023学年北京交大附中高二（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题。本大题共10小题，每小题4分，共40分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．（4分）设$z=-3+2i$，则在复平面内$\overline{z}$对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【解答】解：$\because z=-3+2i$，

$\therefore \overline{z}=-3-2i$，

$\therefore$在复平面内$\overline{z}$对应的点为$(-3,-2)$，在第三象限．

故选：C．

2．（4分）过点$M(-2,m)$、$N(m,4)$的直线的斜率等于1，则m的值为(　　)

A．1　　B．4　　C．1或3　　D．1或4

【解答】解：过点$M(-2,m)$、$N(m,4)$的直线的斜率等于1，所以$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4-m}{m+2}=1$

解得$m=1$

故选：A．

3．（4分）圆$x^2+y^2+4x-6y-3=0$的圆心和半径分别为(　　)

A．$(4,-6)$，16　　B．$(2,-3)$，4　　C．$(-2,3)$，4　　D．$(2,-3)$，16

【解答】解：圆$x^2+y^2+4x-6y-3=0$，即$(x+2)^2+(y-3)^2=16$，

故圆的半径为$(-2,3)$，半径为4．

故选：C．

4．（4分）已知$\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(x,1,2)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为(　　)

A．$\dfrac{5\pi}{6}$　　B．$\dfrac{2\pi}{3}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{\pi}{6}$

【解答】解：$\because \vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(x,1,2)$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=3=x+0+2$，

$\therefore x=1$，$\vec{b}=(1，1，2)$．

设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，$\theta\in[0，\pi)$，

则 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{x^2+1+4}}=\frac{3}{\sqrt{2}\times\sqrt{1+1+4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$，

故选：D．

5．（4 分）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 C_1D_1 的中点，则异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为(　　)

A．$\frac{1}{20}$　　B．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C．$-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\frac{1}{20}$

【解答】解：以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系

设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱长为 2，

则 $D(0，0，0)$，$E(0，1，2)$，$A(2，0，0)$，$C(0，2，0)$，

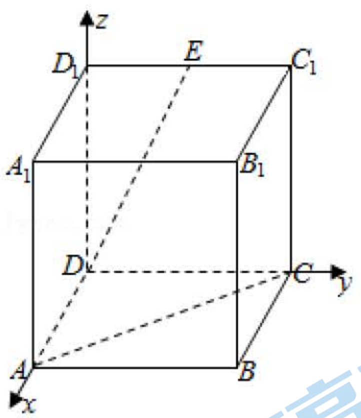
$\overrightarrow{DE}=(0，1，2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2，2，0)$，

设异面直线 DE 与 AC 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$．

$\therefore$ 异面直线 DE 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．

故选：B．



6．（4 分）已知点 $A(1,3)$，$B(-2,-1)$，若直线 $l:y=k(x-2)+1$ 与线段 AB 相交，则 k 的取值范围(　　)

A．$k\geqslant\frac{1}{2}$　　B．$k\leqslant-2$　　C．$k\geqslant\frac{1}{2}$ 或 $k\leqslant-2$　　D．$-2\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$

【解答】解：直线 $l:y=k(x-2)+1$ 经过定点 $P(2,1)$，

$\because k_{PA}=\dfrac{3-1}{1-2}=-2$，$k_{PB}=\dfrac{-1-1}{-2-2}=\dfrac{1}{2}$，

又直线 $l:y=k(x-2)+1$ 与线段 AB 相交，

$\therefore -2\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{2}$，

故选：D．

7．（4 分）已知直线 $l_1:ax+(a+2)y+1=0$，$l_2:x+ay+2=0(a\in R)$，则"$e^a=\dfrac{1}{e}$"是"$l_1//l_2$"的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：根据题意，由 $e^a=\dfrac{1}{e}$ 得 $a=-1$，

当 $a=-1$ 时，直线 $l_1:-x+y+1=0$，$l_2:x-y+2=0$，两直线平行，

故"$a=-1$"是"$l_1//l_2$"的充分条件，

反之，若 $l_1//l_2$，则有 $a^2=a+2$，解可得 $a=2$ 或 -1，

故"$a=-1$"是"$l_1//l_2$"的必要条件，

故"$e^a=\dfrac{1}{e}$"是"$l_1//l_2$"的充分不必要条件，

故选：A．

8．（4 分）已知直线 $l:x+ay-1=0(a\in R)$ 是圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 的对称轴，过点 $A(-4,a)$ 作圆 C 的一条切线，切点为 B，则 $|AB|=($　　$)$

A．2　　B．$4\sqrt{2}$　　C．6　　D．7

【解答】解：由圆 $C:x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 得，$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，

所以 $C(2,1)$ 为圆心、半径为 2，

由题意可得，直线 $l:x+ay-1=0$ 经过圆 C 的圆心 $(2,1)$，

故有 $2+a-1=0$，得 $a=-1$，则点 $A(-4,-1)$，

即 $|AC|=\sqrt{(2+4)^2+(1+1)^2}=\sqrt{40}$，

所以切线的长 $|AB|=\sqrt{|AC|^2-r^2}=\sqrt{40-4}=6$，

故选：C．

9．（4 分）数学家欧拉在 1765 年提出定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外

心的距离是重心到垂心距离的一半．这条直线被后人称为三角形的欧拉线．已知 ΔABC 的顶点 $A(2,0)$，$B(1,2)$，且 $AC=BC$，则 ΔABC 的欧拉线的方程为(　　)

A．$x-2y-4=0$　　B．$2x+y-4=0$　　C．$4x+2y+1=0$　　D．$2x-4y+1=0$

【解答】解：因为 $AC=BC$，所以点 C 在线段 AB 的中垂线上，

设该中垂线为直线 l，

取 BC 的中点 D，连接 AD，则 AD 与直线 l 的交点在直线 l 上，该交点即为 ΔABC 的重心，

过点 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，则 AE 与直线 l 的交点在直线 l 上，该交点即为 ΔABC 的垂心，

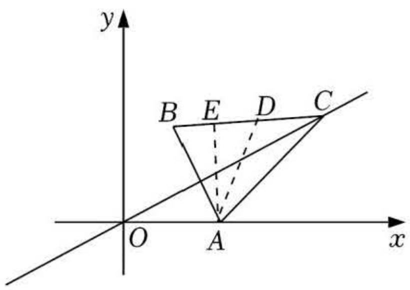
因为外心到 ΔABC 的三个顶点的距离相等，所以外心也在直线 l 上，

故 ΔABC 的欧拉线就是直线 l，

由 $A(2,0)$，$B(1,2)$，知 AB 的中点坐标为 $(\frac{3}{2}，1)$，直线 AB 的斜率为 $\frac{2-0}{1-2}=-2$，

所以直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$，其方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})$，即 $2x-4y+1=0$．

故选：D．



10．(4 分）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30°，则(

)

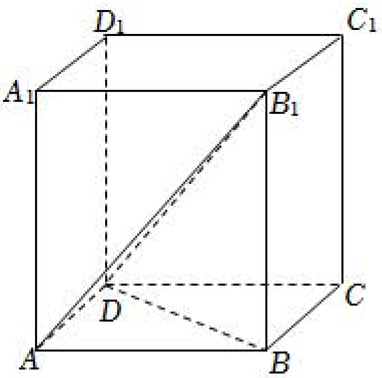
A．$AB=2AD$

B．AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 30°

C．$AC=CB_1$

D．B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 45°

【解答】解：如图所示，连接 AB_1，BD，不妨令 $AA_1=1$，



在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD\perp$ 面 AA_1B_1B，$BB_1\perp$ 面 $ABCD$，

所以 $\angle B_1DB$ 和 $\angle DB_1A$ 分别为 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角，

即 $\angle B_1DB=\angle DB_1A=30^\circ$，

所以在 $\text{Rt}\triangle\text{BDB}_1$ 中，$BB_1=AA_1=1$，$BD=\sqrt{3},B_1D=2$，

在 $\text{Rt}\triangle\text{ADB}_1$ 中，$DB_1=2$，$AD=1,AB_1=\sqrt{3}$，

所以 $AB=\sqrt{2}$，$CB_1=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{3}$，

故选项 A，C 错误，

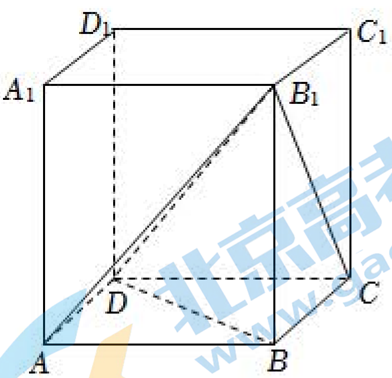
由图易知，AB 在平面 AB_1C_1D 上的射影在 AB_1 上，

所以 $\angle B_1AB$ 为 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角，

在 $\text{Rt}\triangle\text{ABB}_1$ 中，$\sin\angle B_1AB=\dfrac{BB_1}{AB_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故选项 B 错误，

如图，连接 B_1C，



则 B_1D 在平面 BB_1C_1C 上的射影为 B_1C，

所以 $\angle DB_1C$ 为 B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角，

在 $Rt\triangle DB_1C$ 中，$B_1C=\sqrt{2}=DC$，所以 $\angle DB_1C=45^{\circ}$，

所以选项 D 正确，

故选：D．

二、填空题。本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11．（5 分）已知直线 l 经过点 $(1,-1)$，且与直线 $2x-y-5=0$ 垂直，则直线 l 的方程为 __$x+2y+1=0$__．

【解答】解：因为直线 l 与直线 $2x-y-5=0$ 垂直，

所以直线 l 的斜率为 $k=-\dfrac{1}{2}$，

因为直线 l 经过点 $(1,-1)$，所以直线 l 的方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，

即 $x+2y+1=0$，

故答案为：$x+2y+1=0$．

12．（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $x+2y-5=0$ 被圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 截得的弦长为 __4__．

【解答】解：圆 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 的圆心为 $C(2,-1)$，半径 $r=3$，

则圆心 $C(2,-1)$ 到直线 $x+2y-5=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|2+2\times(-1)-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$，

所以弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-5}=4$．

故答案为：4．

13．（5 分）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD=AA_1=1$，$AB=2$，若 E 为 AB 的中点，则点 E 到面 ACD_1 的距离是__$\dfrac{1}{3}$__．

【解答】解：以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

$E(1，1，0)$，$A(1，0，0)$，$C(0，2，0)$，$D_1(0，0，1)$，

$\overrightarrow{AC}=(-1，2，0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1，0，1)$，$\overrightarrow{AE}=(0，1，0)$，

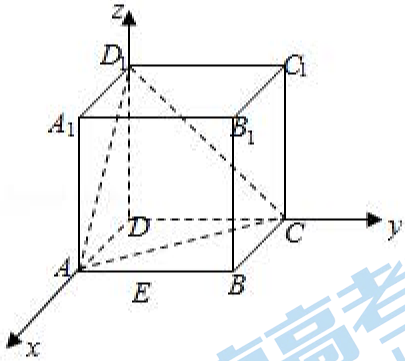
设平面 ACD_1 的法向量 $\vec{n}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-x+z=0\end{cases}$，取 $y=1$，得 $\vec{n}=(2，1，2)$，

$\therefore$ 点 E 到面 ACD_1 的距离：

$d=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$.



14.（5分）已知直线$l:3x+4y+m=0$，圆$C:x^2+y^2-4x+2=0$，则圆C的半径$r=$__$\sqrt{2}$__；若在圆C上存在两点A，B，在直线l上存在一点P，使得$\angle APB=90^\circ$，则实数m的取值范围是____.

【解答】解：由圆$C:x^2+y^2-4x+2=0$，得$(x-2)^2+y^2=2$，

则圆心坐标为$(2,0)$，半径$r=\sqrt{2}$；

$\because$在圆C上存在两点A，B，在直线l上存在一点P，使得$\angle APB=90^\circ$，

$\therefore$在直线l上存在一点P，使得P到$C(2,0)$的距离等于2，

$\therefore$只需$C(2,0)$到直线l的距离小于或等于2，

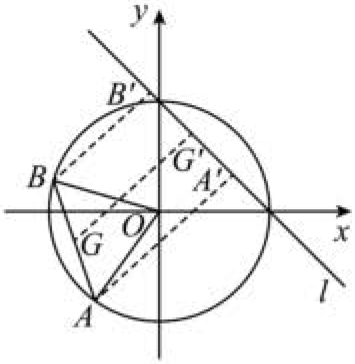
故$\frac{|3\times2+4\times0+m|}{\sqrt{3^2+4^2}}\leqslant2$，解得$-16\leqslant m\leqslant4$.

$\therefore$实数m的取值范围是$[-16，4]$.

故答案为：$\sqrt{2}$；$[-16，4]$.

15.（5分）已知实数x_1、x_2、y_1、y_2满足：$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则$|AB|=$___1___，$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$的最大值为____.

【解答】解：作出圆$O:x^2+y^2=1$，与直线$l:x+y-1=0$，



由题意，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$都在圆$x^2+y^2=1$上，

$\therefore\ x_1^2+y_1^2=1$且$x_2^2+y_2^2=1$，又由$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{2}$，

$\therefore\ |AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)}=1$；

$\therefore|AB|=|OA|=|OB|=1$，即$\Delta AOB$为正三角形，

$\therefore\ \angle AOB=60^\circ$，

$\frac{|x_1+y_1-1|}{\sqrt{2}}+\frac{|x_2+y_2-1|}{\sqrt{2}}$表示$A$和$B$到直线$l:x+y-1=0$的距离和$|AA'|+|BB'|$，

由图可知，只有当A、B都在直线l的左侧，距离之和才会取得最大值．

取A、B的中点G，过G作$GG'\perp l$，垂足为G'，则$|AA'|+|BB'|=2|GG'|$，

因为ΔAOB为等边三角形，G为AB的中点，

$\therefore\ OG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则G在圆$x^2+y^2=\frac{3}{4}$上运动，

故G到直线$x+y-1=0$距离的最大值为圆心O到直线$l:x+y-1=0$的距离$+OG=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore|AA'|+|BB'|=2|GG'|$的最大值为$2\times(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{3}+\sqrt{2}$．

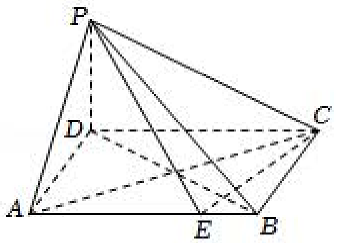
故答案为：1；$\sqrt{3}+\sqrt{2}$．

三、解答题．本大题共5小题，共55分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16．（10分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，$PD\perp$平面$ABCD$，$PD=AD=2$，$AB=4$，点E在线段AB上，且$AE=\frac{3}{4}AB$．

（Ⅰ）求证：$CE\perp$平面PBD；

（Ⅱ）求二面角$P-CE-A$的余弦值．



【解答】(I)证明：$\because PD\perp$平面$ABCD$，$CE\subset$平面$ABCD$，$\therefore PD\perp CE$，$\because AB=4$，$AE=\frac{3}{4}AB$．

$\therefore AE=3$，$BE=1$，$\therefore \frac{AB}{AD}=\frac{BC}{BE}=2$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CBE\backsim \mathrm{Rt}\triangle BAD$，

$\therefore BD\perp CE$，$PD\perp CE$，$PD\bigcap BD=D$，$\therefore CE\perp$平面PBD，

(II)解：$\because PD\perp$平面$ABCD$，$AD\subset$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，

$\therefore PD\perp AD$，$PD\perp CD$，$\because ABCD$为矩形，$AD\perp CD$，

$\therefore AD$，CD，PD两两垂直，建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$，

则$C(0,4,0)$，$P(0,0,2)$，$E(2,3,0)$，

$\therefore \overrightarrow{PC}=(0,4,-2)$，$\overrightarrow{CE}=(2,-1,0)$，

设平面PCE的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

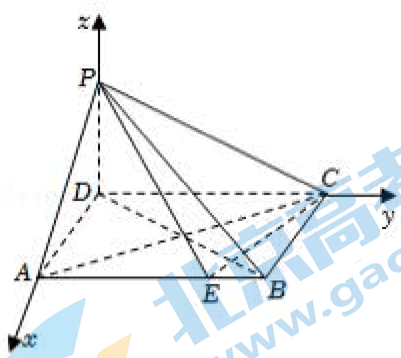
则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=2x-y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=4y-2z=0\end{cases}$，令$x=1$，则$y=2$，$z=4$，

$\therefore$平面PCE的一个法向量为$\vec{n}=(1,2,4)$，

$\because PD\perp$平面$ABCD$，取平面ACE的法向量为$\vec{m}=(0,0,1)$，

则$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\times|\vec{m}|}=\frac{4}{1\times\sqrt{1+4+16}}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$，

由图可知二面角$P-CE-A$为锐角，所以二面角$P-CE-A$的余弦值为$\frac{4\sqrt{21}}{21}$．



17．（11分）已知圆E经过点$A(0,0)$，$B(1,1)$，从下列3个条件选取一个：

①过点$C(2,0)$；

②圆 E 恒被直线 $mx-y-m=0(m\in R)$ 平分；

③与 y 轴相切.

（1）求圆 E 的方程；

（2）过点 $P(2,3)$ 的直线 l 与圆 E 相切，求直线 l 方程.

【解答】解：（1）若选①：设圆 E 的方程为：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

因为圆 E 经过点 $A(0,0)$，$B(1,1)$，$C(2,0)$，

所以 $\begin{cases}F=0\\1+1+D+E+F=0\\4+2D+F=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F=0\\D=-2\\E=0\end{cases}$，

故圆 E 的方程为：$x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$；

若选②：由直线方程 $mx-y-m=0$ 可知，$y=m(x-1)$，

故直线 $mx-y-m=0$ 恒过点 $(1,0)$，

因为圆 E 恒被直线 $mx-y-m=0$ 平分，

所以圆 E 的圆心为 $(1,0)$，

因为 $A(0,0)$ 在圆上，故圆 E 的半径 $r=1$，

从而圆 E 的方程为：$(x-1)^2+y^2=1$；

若选③：不妨设圆 E 的圆心为 (a,b)，半径为 r，

此时 $r=|a|$，

故圆 E 的方程为：$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$，

分别将 $A(0,0)$，$B(1,1)$ 代入上式可得，$\begin{cases}a^2+b^2=a^2\\(1-a)^2+(1-b)^2=a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，

故圆 E 的方程为：$(x-1)^2+y^2=1$；

（2）当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=2$，

圆 E 的圆心 $(1,0)$ 到直线 $x=2$ 的距离为 1，

则此时直线 $l:x=1$ 与圆 E 相切，

当直线 l 的斜率存在时，设方程为 $y-3=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+3=0$，

则圆心 $(1,0)$ 到直线 l 的距离 $\frac{|k-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得 $k=\frac{4}{3}$，

所以此时直线l的方程为$\frac{4}{3}x-y+\frac{1}{3}=0$，即$4x-3y+1=0$，

综上：直线l的方程为$x=2$或$4x-3y+1=0$．

18．（11 分）如图所示，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点O是AC与BD的交点，点E是线段OD_1上的一点．

（1）若点E为OD_1的中点，求直线OD_1与平面CDE所成角的正弦值；

（2）是否存在点E，使得平面$CDE\perp$平面CD_1O；若存在，请指出点E的位置，并加以证明；若不存在，请说明理由．

【解答】解：（1）不妨设正方体的棱长为 2，

以DA，DC，DD_1分别为x，y，z轴建立如图所示的空间直角坐标系$D-xyz$，

则$D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$C(0,2,0)$，$O(1,1,0)$．

因为点E是D_1O的中点，所以点E的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$．

所以$\overrightarrow{OD_1}=(-1,-1,2)$，$\overrightarrow{DE}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$．

设$\vec{p}=(x,y,z)$是平面CDE的法向量，则$\begin{cases}\vec{p}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$，

取$x=2$，则$z=-1$，所以平面CDE的一个法向量为$\vec{p}=(2,0,-1)$．

所以$\cos\langle\overrightarrow{OD_1},\vec{p}\rangle=\frac{\overrightarrow{OD_1}\cdot\vec{p}}{|\overrightarrow{OD_1}||\vec{p}|}=\frac{-1\times2+2\times(-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}}=-\frac{2\sqrt{30}}{15}$．

所以直线OD_1与平面CDE所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{30}}{15}$．

（2）假设存在点E使得平面$CDE\perp$平面CD_1O，设$\overrightarrow{D_1E}=\lambda\overrightarrow{EO}$．

显然$\overrightarrow{OC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{OD_1}=(-1,-1,2)$．

设$\vec{m}=(x,y,z)$是平面CD_1O的法向量，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{OD_1}=0,\end{cases}$，即$\begin{cases}-x+y=0,\\ -x-y+2z=0,\end{cases}$．

取$x=1$，则$y=1$，$z=1$，所以平面CD_1O的一个法向量为$\vec{m}=(1,1,1)$．

因为$\overrightarrow{D_1E}=\lambda\overrightarrow{EO}$，所以点$E$的坐标为$(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{2}{\lambda+1})$．

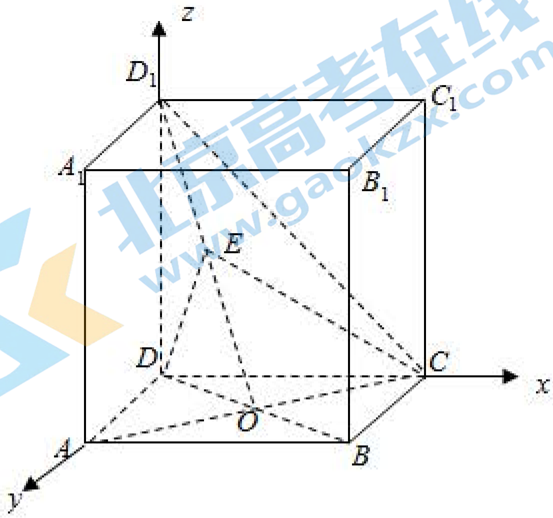
所以$\overrightarrow{DE}=(\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{\lambda}{\lambda+1},\frac{2}{\lambda+1})$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$．

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 CDE 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\lambda+1}x+\dfrac{\lambda}{\lambda+1}y+\dfrac{2}{\lambda+1}z=0,\\ 2y=0.\end{cases}$.

取 $x=1$，则 $z=-\dfrac{\lambda}{2}$，所以平面 CDE 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,0,-\dfrac{\lambda}{2})$.

因为平面 $CDE\perp$ 平面 CD_1O，所以 $\vec{m}\perp\vec{n}$，即 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，$1-\dfrac{\lambda}{2}=0$，解得 $\lambda=2$.

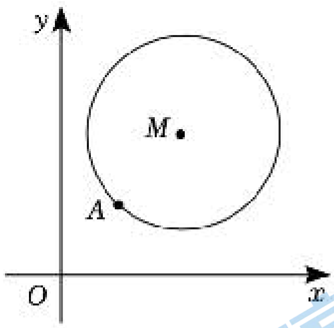
所以 λ 的值为 2. 即当 $\dfrac{|D_1E|}{|EO|}=2$ 时，平面 $CDE\perp$ 平面 CD_1O.



19.（11 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知以 M 为圆心的圆 $M: x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.

（1）设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B，C 两点，且 $|BC|=|OA|$，求直线 l 的方程；

（2）设点 $T(t,0)$ 满足：存在圆 M 上的两点 P 和 Q，使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，求实数 t 的取值范围.



【解答】解：（1）由圆 $M: x^2+y^2-12x-14y+60=0$，得 $(x-6)^2+(y-7)^2=25$，

$\therefore$ 圆心 $M(6,7)$，半径 $r=5$，

由题意得 $OA=2\sqrt{5}$，$k_{OA}=2$，设 $l: y=2x+b$，

则圆心 M 到直线 l 的距离：$d=\dfrac{|5+b|}{\sqrt{5}}$，

则 $|BC|=2\sqrt{25-\dfrac{(5+b)^2}{5}}$，$BC=2\sqrt{5}$，即 $2\sqrt{25-\dfrac{(5+b)^2}{5}}=2\sqrt{5}$，

解得 $b=5$ 或 $b=-15$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为：$y=2x+5$ 或 $y=2x-15$．

（2）$\dot{TA}+\dot{TP}=\dot{TQ}$，即 $\dot{TA}=\dot{TQ}-\dot{TP}=\dot{PQ}$，

又 $|\overline{PQ}|\leqslant 10$，即 $\sqrt{(t-2)^2+4^2}\leqslant 10$，解得 $t\in[2-2\sqrt{21}，\ 2+2\sqrt{21}]$，

对于任意 $t\in[2-2\sqrt{21}，\ 2+2\sqrt{21}]$，欲使 $\overline{TA}=\overline{TQ}-\overline{TP}=\overline{PQ}$，

此时，$|\overline{TA}|\leqslant 10$，

只需要作直线 TA 的平行线，使圆心到直线的距离为 $\sqrt{25-\dfrac{|TA|^2}{4}}$，

必然与圆交于 P、Q 两点，此时 $\dot{TA}|=|\dot{PQ}|$，$\dot{TA}=\dot{PQ}$，

因此实数 t 的取值范围为 $t\in[2-2\sqrt{21}，\ 2+2\sqrt{21}]$．

20．（12 分）已知 $S=\{1，2，\ldots，n\}$，$A\subseteq S$，$T=\{t_1，\ t_2\}\subseteq S$，记 $A_i=\{x\,|\,x=a+t_i，\ a\in A\}(i=1,2)$，用 $|X|$ 表示有限集合 X 的元素个数．

（1）若 $n=4$，$A_1\bigcap A_2=\varnothing$，分别讨论 $A=\{1，2，3\}$ 和 $A=\{1，2，4\}$ 时，集合 T 的情况；

（2）若 $n=6$，$A_1\bigcap A_2=\varnothing$，求 $|A_1\bigcup A_2|$ 的最大值；

（3）若 $n=7$，$|A|=4$，则对于任意的 A，是否都存在 T，使得 $A_1\bigcap A_2=\varnothing$？说明理由．

【解答】解：（1）若 $A_1\bigcap A_2=\varnothing$，则 $t_1-t_2\neq a-b$，其中 a，$b\in A$，

否则 $t_1+a=t_2+b$，$A_1\bigcap A_2\neq\varnothing$，

若 $n=4$，当 $A=\{1，2，3\}$ 时，$2-1=1$，$3-1=2$，

所以 $t_1-t_2\neq 1$，2，则 t_1，t_2 相差 3，

因为 $S=\{1，2，3，4\}$，$T=\{t_1，\ t_2\}\subseteq S$，

所以 $T=\{1，\ 4\}$；

当$A=\{1, 2, 4\}$时，$2-1=1$，$4-2=2$，$4-1=3$，

所以$t_1-t_2\neq 1$，2，3，

因为$S=\{1, 2, 3, 4\}$，$T=\{t_1, t_2\}\subseteq S$，

所以T不存在；

（2）若$n=6$，$A_1\bigcap A_2=\varnothing$，$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，

当$A=S$时，$2-1=1$，$5-1=4$，$5-2=3$，$7-1=6$，$7-2=5$，$7-5=2$，

所以$A\neq S$，$t_1-t_2\neq 1$，2，3，4，5，所以T不存在；

所以A中至多有5个元素；

当$A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$时，$3-2=1$，$4-2=2$，$5-2=3$，$6-2=4$，

所以$t_1-t_2\neq 1$，2，3，4，则t_1，t_2相差5，

所以$T=\{1, 6\}$；

$A_i=\{x\mid x=a+t_i, a\in A\}(i=1,2)$，

所以$A_1=\{3, 4, 5, 6, 7\}$，$A_2=\{8, 9, 10, 11, 12\}$，$A_1\bigcup A_2=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$．

因为A中至多有5个元素，所以A_1，A_2也至多有5个元素，

所以$|A_1\bigcup A_2|$的最大值为10．

（3）不一定存在，

当$A=\{1, 2, 5, 7\}$时，

$2-1=1$，$5-1=4$，$5-2=3$，$7-1=6$，$7-2=5$，$7-5=2$，

则t_1，t_2相差不可能1，2，3，4，5，6，这与$T=\{t_1, t_2\}\subseteq\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$矛盾，

故不都存在T．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通