2020 北京海淀高一（上）期末

数　　学

2020.01

学校__________班级___________姓名_________ 成绩

考生须知	1．本试卷共 6 页，共三道大题，18 道小题．满分 100 分．另有一道附加题（5 分）．考试时间 90 分钟． 2．在卷面上准确填写学校名称、班级名称、姓名． 3．考试结束，请将本试卷和草稿纸一并交回．

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\},B=\{0,1,2\}$ ，则 $A\cap B=$　　（　　）

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

（2）不等式 $|x-1|\le 2$ 的解集是　　（　　）

A. $\{x\mid x\le 3\}$　　B. $\{x\mid 1\le x\le 3\}$　　C. $\{x\mid -1\le x\le 3\}$　　D. $\{x\mid -3\le x\le 3\}$

（3）下列函数中，既是偶函数，又在 $(0,+\infty)$ 上是增函数的是　　（　　）

A. $y=\dfrac{1}{|x|}$　　B. $y=2^x$　　C. $y=\sqrt{x^2}$　　D. $y=|\ln x|$

（4）某赛季甲、乙两名篮球运动员各参加了 13 场比赛，得分情况用茎叶图表示如下：

甲		乙
9 8 8	1	7 7 9 9
6 1 0	2	2 5 6 7 9 9
5 3 2 0	3	0 2 3
7 1 0	4	

根据上图对这两名运动员的成绩进行比较，下列四个结论中，不正确的是　　（　　）

A．甲运动员得分的极差大于乙运动员得分的极差

B．甲运动员得分的中位数大于乙运动员得分的中位数

C．甲运动员得分的平均值大于乙运动员得分的平均值

D．甲运动员的成绩比乙运动员的成绩稳定

(5) 已知 $a,b\in \mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$\frac{a}{b}>1$”的　　　　(　　)

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件　C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(6) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}, x\ge 2,\\ x^2-3, x<2.\end{cases}$ 若关于 x 的函数 $y=f(x)-k$ 有且只有三个不同的零点，则实数 k 的取值范围是　　　　(　　)

A. $(-3,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-3,0]$　　D. $(0,+\infty)$

(7) “函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上不是增函数”的一个充要条件是　　　　(　　)

A. 存在 $a\in(1,2)$ 满足 $f(a)\le f(1)$　B. 存在 $a\in(1,2)$ 满足 $f(a)\ge f(2)$

C. 存在 $a,b\in[1,2]$ 且 $a<b$ 满足 $f(a)=f(b)$　D. 存在 $a,b\in[1,2]$ 且 $a<b$ 满足 $f(a)\ge f(b)$

(8) 区块链作为一种革新的技术，已经被应用于许多领域，包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等. 在区块链技术中，若密码的长度设定为 256 比特，则密码一共有 2^{256} 种可能，因此，为了破解密码，最坏情况需要进行 2^{256} 次哈希运算. 现在有一台机器，每秒能进行 2.5×10^{11} 次哈希运算，假设机器一直正常运转，那么在最坏情况下，这台机器破译密码所需时间大约为

(参考数据 $\lg 2\approx 0.3010, \lg 3\approx 0.477$)　　　　(　　)

A. 4.5×10^{73} 秒　　B. 4.5×10^{65} 秒　　C. 4.5×10^{7} 秒　　D. 28 秒

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分，把答案填在题中横线上.

(9) 函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\ne 1)$ 的图象经过点 $(-1,2)$，则 a 的值为__________.

(10) 已知 $f(x)=\lg x$，则 $f(x)$ 的定义域为__________, 不等式 $f(x-1)<0$ 的解集为____________.

(11) 已知 $\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1)$，则点 B 的坐标为_________, $\overrightarrow{CB}$的坐标为_________.

(12) 函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}$ 的零点个数为_______，不等式 $f(x)>0$ 的解集为_____________.

(13) 某大学在其百年校庆上，对参加校庆的校友做了一项问卷调查，发现在 20 世纪最后 5 年间毕业的校友，他们 2018 年的平均年收入约为 35 万元. 由此_____（填“能够”或“不能”）推断该大学 20 世纪最后 5 年间的毕业生，2018 年的平均年收入约为 35 万元，理由是___________________________

____.

(14) 对于正整数 k，设函数 $f_k(x)=[kx]-k[x]$，其中 $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数.

①则 $f_2(\frac{2}{3})=$_______；

②设函数 $g(x)=f_2(x)+f_4(x)$，则在函数 $g(x)$ 的值域中所含元素的个数是____________.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 44 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(15)（本小题共 11 分）

某校 2019 级高一年级共有学生 195 人，其中男生 105 人，女生 90 人．基于目前高考制度的改革，为了预估学生“分科选考制”中的学科选择情况，该校对 2019 级高一年级全体学生进行了问卷调查．现采用按性别分层抽样的方法，从中抽取 13 份问卷．已知问卷中某个必答题的选项分别为“同意”和“不同意”，下面表格记录了抽取的这 13 份问卷中此题的答题情况．

	选“同意”的人数	选“不同意”的人数
男生	4	a
女生	b	2

（Ⅰ）写出 a，b 的值；

（Ⅱ）根据上表的数据估计 2019 级高一年级学生该题选择“同意”的人数；

（Ⅲ）从被抽取的男生问卷中随机选取 2 份问卷，对相应的学生进行访谈，求至少有一人选择“同意”的概率.

（16）（本小题共 11 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集；

（Ⅱ）已知 $a>0$，且 $f(x)\ge 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1,x_2，求 ${x_1}^2+{x_2}^2$ 的取值范围.

(17)（本小题共 12 分）

如图，在射线 OA,OB,OC 中，相邻两条射线所成的角都是 120°，且线段 $OA=OB=OC$.

设 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$.

（Ⅰ）当 $x=2,y=1$ 时，在图 1 中作出点 P 的位置（保留作图的痕迹）；

（Ⅱ）请用 x,y 写出“点 P 在射线 OC 上”的一个充要条件：____________________________________；

（Ⅲ）设满足“ $x+2y=4$ 且 $xy\geq 0$ ”的点 P 所构成的图形为 G，

①图形 G 是__________；

A. 线段　　B. 射线　　C. 直线　　D. 圆

②在图 2 中作出图形 G.

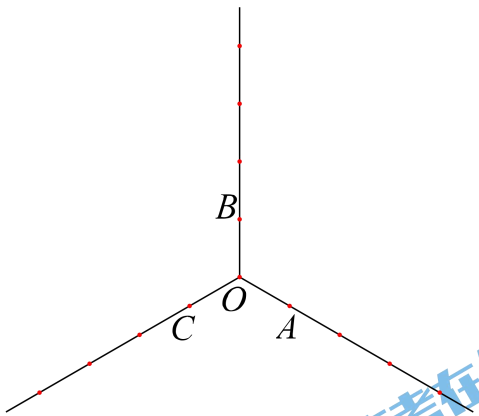


图1

图2

(18)（本小题共 10 分）

已知函数 $f(x)$ 的图象在定义域 $(0,+\infty)$ 上连续不断. 若存在常数 $T>0$，使得对于任意的 $x>0$，$f(Tx)=f(x)+T$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 满足性质 $P(2)$，且 $f(1)=0$，求 $f(4)+f(\frac{1}{4})$ 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)=\log_{1.2}x$，试说明至少存在两个不等的正数 T_1,T_2，同时使得函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T_1)$ 和 $P(T_2)$.（参考数据：$1.2^4=2.0736$）

(Ⅲ)若函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$，求证：函数 $f(x)$ 存在零点.

附加题：（本题满分 5 分．所得分数可计入总分，但整份试卷得分不超过 100 分）

在工程实践和科学研究中经常需要对采样所得的数据点进行函数拟合.定义数据点集为平面点集 $S=\{P_i(x_i,y_i)\mid i=1,2,\cdots,N\}$（$N\in\mathrm{N}_+$），寻找函数 $y=f(x)$ 去拟合数据点集 S，就是寻找合适的函数，使其图象尽可能地反映数据点集中元素位置的分布趋势.

（Ⅰ）下列说法正确的是_________.（写出所有正确说法对应的序号）

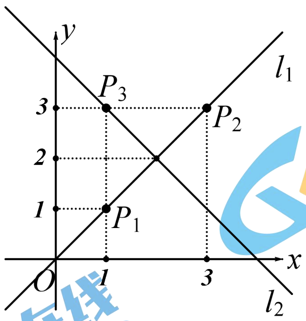
A. 对于任意的数据点集 S，一定存在某个函数，其图象可以经过每一个数据点

B. 存在数据点集 S，不存在函数使其图象经过每一个数据点

C. 对于任意的数据点集 S，一定存在某个函数，使得这些数据点均位于其图象的一侧

D. 拟合函数的图象所经过的数据点集 S 中元素个数越多，拟合的效果越好

（Ⅱ）衡量拟合函数是否恰当有很多判断指标，其中有一个指标叫做“偏置度 δ ”，用以衡量数据点集在拟合函数图象周围的分布情况．如图所示，对于数据点集 $\{P_1,P_2,P_3\}$，在如下的两种“偏置度 δ ”的定义中，使得函数 $f_1(x)$ 的偏置度大于函数 $f_2(x)$ 的偏置度的序号为 ________；



① $\delta=\left|\sum_{i=1}^{n}(x_i,y_i-f(x_i))\right|=|(x_1,y_1-f(x_1))+(x_2,y_2-f(x_2))+\cdots+(x_n,y_n-f(x_n))|$；

② $\delta=\sum_{i=1}^{n}|(x_i,y_i-f(x_i))|=|(x_1,y_1-f(x_1))|+|(x_2,y_2-f(x_2))|+\cdots+|(x_n,y_n-f(x_n))|$.

（其中 $|(x,y)|$ 代表向量 $w=(x,y)$ 的模长）

（Ⅲ）对于数据点集 $S=\{(0,0),(-1,1),(1,1),(2,2)\}$，用形如 $f(x)=ax+b$ 的函数去拟合．当拟合函数 $f(x)=ax+b$ 满足（Ⅱ）中你所选择的“偏置度 δ ”达到最小时，该拟合函数的图象必过点_______.（填点的坐标）

2020 北京海淀高一（上）期末数学

参考答案

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答案	B	C	C	D	D	B	D	B

二. 填空题：本大题共6小题，每小题4分，共24分.

（9）$\frac{1}{2}$　　　　（10）$(0,+\infty)$；$\{x\,|\,1<x<2\}$

（11）$(2,2)$；$(0,3)$　　　　（12）1 ；$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

（13）不能；参加校庆的校友年收入不能代表全体毕业生的年收入

（14） 1；4

注：两空的题，每空2分；

三. 解答题：本大题共4小题，共44分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（Ⅰ）由题意可得 $a=13\times\frac{105}{195}-4=3$；　　　　..........2 分

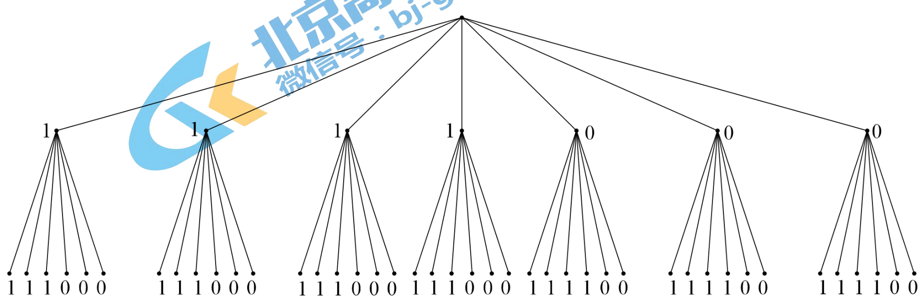
$b=13\times\frac{90}{195}-2=4$；　　　　..........4 分

（Ⅱ）估计 2019 级高一年级学生该题选择“同意”的人数为

$105\times\frac{4}{7}+90\times\frac{4}{6}=120$；　　　　..........7 分

（Ⅲ）如果访谈学生中选择“同意”则记为 1，如果选择“不同意”则记为 0，

列举如下：



..........9 分

共有 $7\times6=42$ 种等可能的结果，其中至少有一人选择“同意”的有 $42-6=36$ 种，

……….10 分记“访谈学生中至少有一人选择‘同意’”为事件 A，则 $P(A)=\frac{36}{42}=\frac{6}{7}$ ……….11 分

（16）（Ⅰ）当 $a=1$ 时，由 $f(x)=x^2-2x-3\geqslant 0$ 解得 $\{x\mid x\geqslant 3\text{或}x\leqslant -1\}$． ……….3 分

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，二次函数 $f(x)=ax^2-2ax-3$ 开口向上，对称轴为 $x=1$，

所以 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增， ……….5 分

要使 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，只需 $f(3)=9a-6a-3\geqslant 0$， ……….6 分

所以 a 的取值范围是 $\{a\mid a\geqslant 1\}$ ……….7 分

(Ⅲ) 因为 $f(x)=0$ 有两个不相等的正实数根 x_1,x_2，

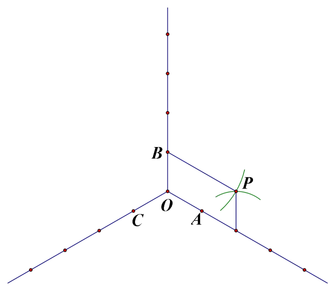
所以 $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=4a^2+12a>0 \\ x_1+x_2=2>0 \\ x_1\ x_2=-\frac{3}{a}>0 \end{cases}$， ……….8 分

解得 $a<-3$，所以 a 的取值范围是 $\{a\mid a<-3\}$． ……….9 分

因为 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\ x_2=4+\frac{6}{a}$， ……….10 分

所以，$x_1^2+x_2^2$ 的取值范围是 $(2,4)$． ……….11 分

（17）（Ⅰ）



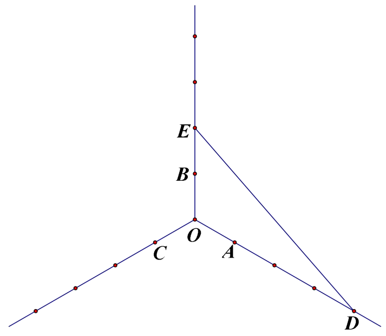
图中点 P 即为所求. ……….4 分

（Ⅱ） $x=y$ 且 $x\leq 0,y\leq 0$ ； ……….7 分

说明：如果丢掉了“$x\leq 0,y\leq 0$”，（Ⅱ）给 2 分

(Ⅲ) ① A ； ……….10 分

②



图中线段 DE 即为所求. …………12 分

（18）（Ⅰ）因为 $f(x)$ 满足性质 $P(2)$，

所以对于任意的 $x>0$， $f(2x)=f(x)+2$ 恒成立.

又因为 $f(1)=0$，

所以， $f(2)=f(1)+2=2$， …………1 分

$f(4)=f(2)+2=4$， …………2 分

由 $f(1)=f(\frac{1}{2})+2$ 可得 $f(\frac{1}{2})=f(1)-2=-2$，

由 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})+2$ 可得 $f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})-2=-4$， …………3 分

所以， $f(4)+f(\frac{1}{4})=0$. …………4 分

（Ⅱ）若正数 T 满足 $\log_{1.2}(Tx)=\log_{1.2}x+T$， 等价于 $\log_{1.2}T=T$ （或者 $1.2^T=T$ ），

记 $g(x)=x-\log_{1.2}x$， （或者设 $g(x)=1.2^x-x,\ x\in(0,+\infty)$ ） …………5 分

显然 $g(1)>0$， $g(2)=2-\log_{1.2}2=\log_{1.2}1.44-\log_{1.2}2<0$，

因为 $1.2^4>2$， 所以 $1.2^{16}>16$， $16>\log_{1.2}16$， 即 $g(16)>0$. …………6 分

因为 $g(x)$ 的图像连续不断，

所以存在 $T\in(1,2)_1$， $T_2\in(2,16)$， 使得 $g(T_1)=g(T_2)=0$，

因此，至少存在两个不等的正数 T_1， T_2， 使得函数 $f(x)$ 同时满足性质 $P(T_1)$ 和 $P(T_2)$. …………7 分

（Ⅲ）① 若 $f(1)=0$，则 1 即为 $f(x)$ 的零点； …………8 分

② 若 $f(1)=M<0$， 则 $f(T)=f(1)+T$， $f(T^2)=f(T)+T=f(1)+2T$， …，

可得 $f(T^k)=f(T^{k-1})+T=f(1)+kT$，其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

取 $k=[\frac{-M}{T}]+1>-\frac{M}{T}$ 即可使得 $f(T^k)=M+kT>0$.

所以，$f(x)$ 存在零点. ....9 分

③ 若 $f(1)=M>0$，则由 $f(1)=f(\frac{1}{T})+T$，可得 $f(\frac{1}{T})=f(1)-T$，

由 $f(\frac{1}{T})=f(\frac{1}{T^2})+T$，可得 $f(\frac{1}{T^2})=f(\frac{1}{T})-T=f(1)-2T$，…，

由 $f(\frac{1}{T^{k-1}})=f(\frac{1}{T^k})+T$，可得 $f(\frac{1}{T^k})=f(\frac{1}{T^{k-1}})-T=f(1)-kT$，其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

取 $k=[\frac{M}{T}]+1>\frac{M}{T}$ 即可使得 $f(\frac{1}{T^k})=M-kT<0$. 所以，$f(x)$ 存在零点.

综上，$f(x)$ 存在零点. ....10 分

附加题：（本题满分 5 分．所得分数可计入总分，但整份试卷得分不超过 100 分）

【答案】（Ⅰ）B、C ....2 分

（Ⅱ）① ....4 分

（Ⅲ）$(\frac{1}{2},1)$ ....5 分

注：对于其它正确解法，相应给分.