机密★启用前(新教材卷)

华大新高考联盟 2024 届高三 11 月教学质量测评

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【命题意图】本题考查复数的四则运算、复数的概念,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\frac{2-i}{1+2i}+2=\frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+2=2-i$,故$\left|\frac{2-i}{1+2i}+2\right|=\sqrt{5}$,故选 B.

2.【答案】D

【命题意图】本题考查排列组合、数学情境问题,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】因为 $a_0=1$,故在 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 中只需有 3 个 1 即可,故所求个数为 $C_8^3=56$,故选 D.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质,考查数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】依题意,$4+m=9$,则 $m=5$,故 C 的渐近线方程为$\sqrt{5}x\pm2y=0$,故所求距离为 $d=\frac{|3\times\sqrt{5}|}{3}=\sqrt{5}$,故选 B.

4.【答案】A

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、平面向量的数量积,考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意,$\cos\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3\lambda+2}{\sqrt{\lambda^2+4}\cdot\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,解得 $\lambda=\frac{8}{3}$,故选 A.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查复合函数、函数的单调性,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】令 $e^x=t>0$,则原函数化为 $y=t^2-4t+5$,其在$(2,+\infty)$上单调递增,故 $f(x)$在$(\ln2,+\infty)$上单调递增,则 $m\geqslant\ln2$,故选 B.

6.【答案】D

【命题意图】本题考查导数的几何意义、两直线的位置关系,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】易知直线 l 的斜率为 9,设切点(x_0,y_0),而 $y'=3x^2-6x$,故 $3x_0^2-6x_0=9$,解得 $x_0=-1$ 或 $x_0=3$,故切点 A 坐标为$(-1,-4)$或$(3,0)$,故点 A 到曲线C 的对称中心的距离为$\frac{\sqrt{(3+1)^2+(0+4)^2}}{2}=2\sqrt{2}$,故选 D.

7.【答案】A

【命题意图】本题考查三角恒等变换,考查数学运算、逻辑推理、数据分析的核心素养.

【解析】依题意,$\frac{1}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}-\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}-\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$,$1+\tan(\alpha-\beta)\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(\alpha-\beta)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos(\alpha-\beta)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}$,故$\frac{2\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)}=6$,则 $\sin(\alpha-\beta)=$

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$ ①，而 $\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$ ②，联立①②，解得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，故选 A.

8.【答案】C

【命题意图】本题考查分段函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象、数据分析的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)$ 在 $(-\infty,4]$ 上单调递增，在 $(4,16)$ 上单调递减，在 $[16,+\infty)$ 上单调递增；易知 $\ln\lambda\leqslant\lambda-1$，取 $\lambda=1$，可知 $f(\ln\lambda)=f(\lambda-1)$，取 $\lambda=e$，可知 $f(\ln\lambda)<f(\lambda-1)$，取 $\lambda=e^2$，可知 $f(\ln\lambda)>f(\lambda-1)$，故 A、B 错误；当 $0<\lambda\leqslant2$ 时，$4\geqslant2^{\lambda}\geqslant\lambda^2$，故 $f(2^{\lambda})\geqslant f(\lambda^2)$，当 $2<\lambda<4$ 时，$4<2^{\lambda}<\lambda^2<16$，故 $f(2^{\lambda})>f(\lambda^2)$，当 $\lambda\geqslant4$ 时，$2^{\lambda}\geqslant\lambda^2>16$，故 $f(2^{\lambda})\geqslant f(\lambda^2)$；综上，$f(2^{\lambda})\geqslant f(\lambda^2)$ 恒成立，故 C 正确，D 错误，故选 C.

二、选择题

9.【答案】AC

【命题意图】本题考查不等式的解法、集合的表示、集合的运算，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$M=\{x|(x-2)(x+3)<0\}=\{x|-3<x<2\}$，故 $M\cap N=\{x|-1<x<2\}$，$\complement_R M=\{x|x\leqslant-3$ 或 $x\geqslant2\}$，$M\cup N=\{x|-3<x<5\}$，$M\cap(\complement_R N)=\{x|-3<x\leqslant-1\}$，故选 AC.

10.【答案】ABC

【命题意图】本题考查空间线面的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为 $BA_1=BD$，$A_1E=ED$，故 $EB\perp A_1D$，而 $B_1C/\!/A_1D$，故 $EB\perp B_1C$，故 A 错误；直线 EB 与直线 C_1D_1 均在平面 ABC_1D_1 上，故 B 错误；平面 ABC_1 就是平面 ABC_1D_1，故点 $E\in$ 平面 ABC_1，故 C 错误；因为平面 $B_1D_1C/\!/$ 平面 A_1BD，且直线 $EB\subset$ 平面 A_1BD，故直线 $EB/\!/$ 平面 B_1D_1C，故 D 正确；故选 ABC.

11.【答案】BD

【命题意图】本题考查圆的方程、直线与圆的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，圆 C 圆心在直线 $x=4$ 上，设 $C(4,c)$，则 $(4-2)^2+c^2=(4-4)^2+(c-2)^2$，解得 $c=0$，圆 C：$(x-4)^2+y^2=4$，故 A 错误；四边形 $ACBM$ 面积 $S=|MA|\cdot|AC|=2\sqrt{|MC|^2-4}$，而 $|MC|_{\min}=2\sqrt{2}$，故 $S_{\min}=4$，故 B 正确；结合图象的对称性可知，当 M 在线段 $y=x(0\leqslant x\leqslant4)$ 的中点时，圆 C' 的面积最小，为 2π，故 C 错误；当 M 在线段 $y=x(0\leqslant x\leqslant4)$ 的两个端点时，圆 C' 的面积最大，为 3π，故 D 正确；故选 BD.

12.【答案】CD

【命题意图】本题考查椭圆的方程、椭圆的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析 1】设直线 MN：$y=kx$，其中 $k\neq0$，联立 $\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $x=\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}$，不妨设 $M\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},\frac{kab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right)$，$N\left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}},-\frac{kab}{\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right)$，则 $A\left(\frac{c}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{b^2+a^2k^2}},\frac{kab}{2\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right)$，$B\left(\frac{c}{2}-\frac{ab}{2\sqrt{b^2+a^2k^2}},-\frac{kab}{2\sqrt{b^2+a^2k^2}}\right)$，而 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故 $\frac{c^2}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{a^2b^2}{b^2+a^2k^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{k^2a^2b^2}{b^2+a^2k^2}=0$，整理得 $k^2=\frac{(e^2-1)^2}{2e^2-1}>0$，故 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e<1$，观察可知，故选 CD.

【解析 2】依题意，可得 $A\left(\frac{x_1+c}{2},\frac{y_1}{2}\right)$，$B\left(\frac{c-x_1}{2},-\frac{y_1}{2}\right)$，又有 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $\frac{c^2-x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}=0$，$x_1^2+y_1^2=c^2$；又有 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，即圆 $x^2+y^2=c^2$ 与椭圆 C 有公共点且公共点不在坐标轴上，故 $a>c>b$，即

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

$c^2>a^2-c^2$，故 $e^2>\frac{1}{2}$，$e\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，故选 CD.

【解析 3】依题意，$\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{FA}$，$\overrightarrow{FN}=2\overrightarrow{FB}$，故 A，B 分别是线段 FM，FN 的中点，故 $OA\parallel FN$，$OB\parallel FM$；又有 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故 $FN\perp FM$，$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\mathbf{0}$，则 $|OM|=|ON|=|OF|=c$；因为 $|OM|\in(b,a)$，故 $b<c$，即 $a^2-c^2<c^2$，得 $e^2>\frac{1}{2}$，$e\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$，故选 CD.

三、填空题

13.【答案】0.84.

【命题意图】本题考查正态分布及其应用，考查数学运算、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】依题意，$X\sim N(15,3^2)$，故 $P(6\leqslant X\leqslant 18)=P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant \mu+\sigma)=\frac{0.682\ 7+0.997\ 3}{2}=0.84$.

14.【答案】52π.

【命题意图】本题考查空间几何体的表面积与体积，考查数学运算、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】易知该圆台的上、下底面的半径分别为 2，6，故圆台的高为 3，则圆台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(4\pi+36\pi+12\pi)\times 3=52\pi$.

15.【答案】$\left(\frac{27}{4},\frac{39}{4}\right]$.

【命题意图】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $\omega x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{4\omega}+\frac{k\pi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$，则 $\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2\pi}{\omega}<\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{4\omega}+\frac{3\pi}{\omega}$，解得 $\frac{27}{4}<\omega\leqslant\frac{39}{4}$，故实数 ω 的取值范围为 $\left(\frac{27}{4},\frac{39}{4}\right]$.

16.【答案】5.

【命题意图】本题考查数列的性质，考查数学运算、逻辑推理、数据分析的核心素养.

【解析】因为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{4i}{a_{2i}}=3n^2+n$，故当 $n=1$ 时，$\frac{4}{a_2}=4$，故 $a_2=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{4i}{a_{2i}}=3(n-1)^2+(n-1)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{4i}{a_{2i}}-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{4i}{a_{2i}}=\frac{4n}{a_{2n}}=6n-2$，故 $a_{2n}=\frac{2n}{3n-1}>\frac{2}{3}$；而当 n 为奇数时，$a_n=\frac{(\sqrt{\lambda})^{n-1}}{n}$，即 $a_{2n-1}=\frac{\lambda^{n-1}}{2n-1}$，而 $(5\lambda-7)(3\lambda-5)<0$，故 $\frac{7}{5}<\lambda<\frac{5}{3}$，则 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=\frac{\lambda^n}{2n+1}-\frac{\lambda^{n-1}}{2n-1}=\frac{\lambda^n(2n-1)-\lambda^{n-1}(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)}$. 令 $f(n)=\lambda^n(2n-1)-\lambda^{n-1}(2n+1)=\lambda^{n-1}[(2\lambda-2)n-(\lambda+1)]>0$，得 $n>\frac{\lambda+1}{2\lambda-2}$；而 $\frac{7}{5}<\lambda<\frac{5}{3}$，$\therefore \frac{2}{5}<\lambda-1<\frac{2}{3}$，$\therefore \frac{3}{2}<\frac{1}{\lambda-1}<\frac{5}{2}$，$\therefore \frac{\lambda+1}{2\lambda-2}=\frac{\lambda-1+2}{2\lambda-2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda-1}\in(2,3)$，$\therefore$ 当 $n\leqslant 2$ 时，$a_{2n+1}<a_{2n-1}$，当 $n\geqslant 3$ 时，$a_{2n+1}>a_{2n-1}$，即奇数项中 a_5 最小；而 $a_5=\frac{\lambda^2}{5}<\frac{5}{9}<\frac{2}{3}<a_{2n}$，所以数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_5=\frac{\lambda^2}{5}$，故当 a_n 取得最小值时，$n=5$.

四、解答题

17.【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理、三角恒等变换，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$b^2=c^2-a^2$，…………………………………………………………（1 分）

而 $2a\cos B+a=c$，由余弦定理，即 $2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+a=c$，……………………………（2 分）

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

故$(2a-c)(a+c)=0$,故$2a=c$, …………(4分)

代入$a=\dfrac{c}{2\cos B+1}$中,得$\cos B=\dfrac{1}{2}$,而$0<B<\pi$,故$B=\dfrac{\pi}{3}$; …………(5分)

(2)不妨设$AB=c=3$,则$AM=1$,$BM=2$,$BC=AB\cos B=\dfrac{3}{2}$,

在$\triangle BCM$中,由余弦定理得,$CM^2=BC^2+BM^2-2BC\cdot BM\cdot\cos B=\dfrac{13}{4}$, …………(7分)

由正弦定理得,$\dfrac{CM}{\sin B}=\dfrac{BM}{\sin\angle BCM}$,故$\sin\angle BCM=\dfrac{BM\cdot\sin B}{CM}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$, …………(9分)

$\cos 2\angle BCM=1-2\sin^2\angle BCM=1-2\times\dfrac{12}{13}=-\dfrac{11}{13}$. …………(10分)

18.【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征、离散型随机变量的分布列以及数学期望,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】(1)依题意,$10a+0.35+0.3+0.1+0.05=1$,解得$a=0.02$; …………(2分)

所求平均数为$45\times0.2+55\times0.35+65\times0.3+75\times0.1+85\times0.05=59.5$; …………(4分)

(2)从日均体育活动时间在$[70,80)$中抽取8人,日均体育活动时间在$[80,90]$中抽取4人,故所求概率$P=\dfrac{C_8^3+C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\dfrac{42}{55}$; …………(7分)

(3)依题意,$X\sim B\left(4,\dfrac{2}{5}\right)$,

故$P(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^4=\dfrac{81}{625}$,$P(X=1)=C_4^1\left(\dfrac{2}{5}\right)\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{216}{625}$,

$P(X=2)=C_4^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$,$P(X=3)=C_4^3\left(\dfrac{2}{5}\right)^3\left(\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{96}{625}$,

$P(X=4)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^4=\dfrac{16}{625}$; …………(10分)

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{81}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{16}{625}$

故$E(X)=4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$. …………(12分)

19.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)连接BE,如图所示.因为$\angle ADC=\angle BCD=90^\circ$,故$BC/\!/AD$,

因为$BC=\dfrac{1}{2}AD=DE$,故四边形$BCDE$为矩形,

不妨设$BE=CD=2$; …………(1分)

$\because SA=SD$且点E为线段AD的中点,$\therefore SE\perp AD$,

所以$SD=\sqrt{SE^2+DE^2}=2\sqrt{5}$,故$SB=SD=2\sqrt{5}$; …………(2分)

故$SE^2+BE^2=SB^2$,即$SE\perp BE$; …………(3分)

又$AD\cap BE=E$,故$SE\perp$平面$ABCD$; …………(4分)

而$AC\subset$平面$ABCD$,故$SE\perp AC$; …………(5分)

(2)以E为原点,EA为x轴,EB为y轴,ES为z轴建立如图所示的空间直角坐标系,

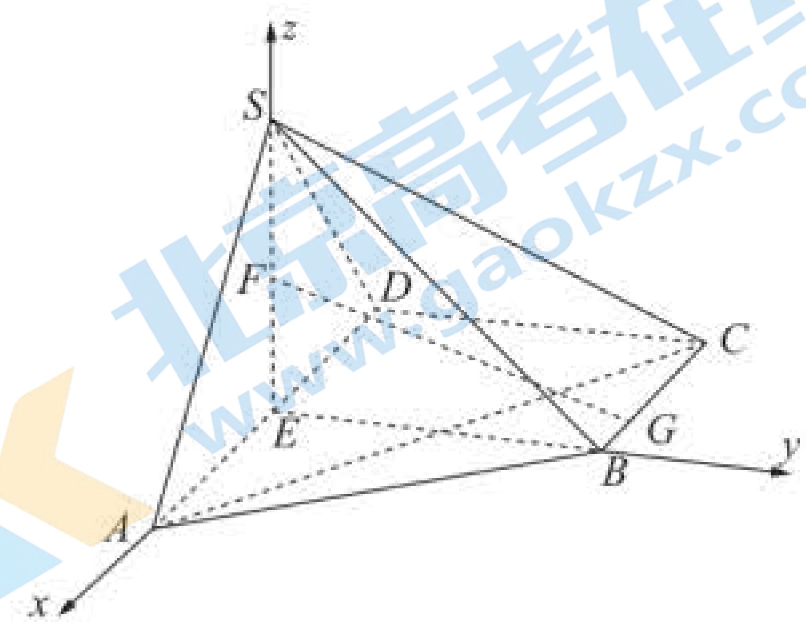
则不妨设$AD=4$,则$A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(-2,2,0)$,$S(0,0,4)$,

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{SB}=(0,2,-4)$，

设平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x_1+2y_1=0,\\ 2y_1-4z_1=0,\end{cases}$取 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$；……… (8 分)



设 $BG=t\in(0,2)$，则 $G(-t,2,0)$，而 $F(0,0,2)$，所以$\overrightarrow{GF}=(t,-2,2)$，

设直线 FG 与平面 SAB 所成的角为 θ，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{26}$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{GF},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{2t-4+2}{\sqrt{t^2+4+4}\cdot\sqrt{9}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，……………………………………………………………… (10 分)

化简得 $11t^2-24t+4=0$，解得 $t=\dfrac{2}{11}$($t=2$ 舍去)；故$\dfrac{BG}{BC}=\dfrac{1}{11}$. ……………………………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查数列的基本运算、错位相减法，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=2a_n+\lambda$，$S_{n-1}=2a_{n-1}+\lambda$，

两式相减可得 $a_n=2a_{n-1}$；……………………………………………………………………………… (2 分)

而当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1+\lambda$，得 $a_1=-\lambda$；

$S_3=-\lambda-2\lambda-4\lambda=-7\lambda$，故$-7\lambda=14$，解得 $\lambda=-2$，则 $a_1=2$，……………………………… (4 分)

故 $a_n=2^n$；……………………………………………………………………………………………… (5 分)

(2)依题意，$b_n=(3n-10)\cdot 2^n$，

故 $T_n=-7\cdot 2^1-4\cdot 2^2-1\cdot 2^3+\cdots+(3n-10)\cdot 2^n$，……………………………………………… (6 分)

$2T_n=-7\cdot 2^2-4\cdot 2^3-1\cdot 2^4+\cdots+(3n-13)\cdot 2^n+(3n-10)\cdot 2^{n+1}$，…………………… (7 分)

两式相减可得$-T_n=3\cdot 2^1+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+3\cdot 2^n-(3n-10)\cdot 2^{n+1}-20$，…………… (8 分)

即$-T_n=3\cdot\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-(3n-10)\cdot 2^{n+1}-20$，故 $T_n=(3n-13)\cdot 2^{n+1}+26$. ………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线的综合性问题，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$；

(1)设直线 $l_1:x=ny+1$，联立$\begin{cases}x=ny+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-4ny-4=0$，

$\Delta=16n^2+16>0$；则 $y_1+y_2=4n$，$y_1y_2=-4$；…………………………………………………… (2 分)

故 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{16n^2+16}=4\sqrt{5}$，解得 $n=\pm 2$，…………………………… (4 分)

故直线 l_1 的斜率为$\pm\dfrac{1}{2}$；…………………………………………………………………………… (5 分)

(2)设直线 MP 的方程为 $x=my+\lambda$，

联立直线 MP 与抛物线的方程，$\begin{cases}x=my+\lambda,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去 x 得 $y^2-4my-4\lambda=0$，

故 $y_1y_3=-4\lambda$；……………………………………………………………………………………… (7 分)

由(1)可知，$y_2=-\dfrac{4}{y_1}$，同理可得 $y_4=-\dfrac{4}{y_3}$，…………………………………………………… (9 分)

故$\dfrac{S_{\triangle MPF}}{S_{\triangle NQF}}=\dfrac{\frac{1}{2}|MF||PF|\sin\angle MFP}{\frac{1}{2}|NF||QF|\sin\angle NFQ}=\left|\dfrac{MF}{NF}\right|\left|\dfrac{PF}{QF}\right|=\left|\dfrac{y_1y_3}{y_2y_4}\right|=\dfrac{y_1^2y_3^2}{16}=\lambda^2$，

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。

显然 $\lambda \neq 1$，故 $\frac{S_{\triangle MPF}}{S_{\triangle NQF}}+\frac{1}{4}=\lambda^2+\frac{1}{4}\geqslant\lambda$，当且仅当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时等号成立. …………………………… (12 分)

22.【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1)依题意，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=m+\frac{1}{x}-\frac{m}{x^2}=\frac{mx^2+x-m}{x^2}$， …………………………… (1 分)

若 $m=0$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；…………………………… (2 分)

若 $m\neq 0$，则 $\Delta=1+4m^2>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}$，

其中 $x_1+x_2=-\frac{1}{m}$，$x_1x_2=-1$

若 $m>0$，则 $x_1<0<x_2$，故当 $x\in\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m},+\infty\right)$ 上单调递增；

…………………………………………………………………………………… (4 分)

若 $m<0$，则 $x_2<0<x_1$，故当 $x\in\left(0,\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m},+\infty\right)$ 上单调递减；

综上所述，当 $m=0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $m>0$ 时，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{-1+\sqrt{1+4m^2}}{2m},+\infty\right)$ 上单调递增；当 $m<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{-1-\sqrt{1+4m^2}}{2m},+\infty\right)$ 上单调递减；…………………………… (6 分)

(2)依题意，$\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b}+ma+\ln b+mb-\frac{m}{b}+\frac{m}{b}<\ln a+ma-\frac{m}{a}+\frac{m}{a}+mb$，

即 $\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b}<\ln\frac{a}{b}$，即 $\frac{k\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+1\right)}<\ln\frac{a}{b}$，即 $k\cdot\frac{\frac{a}{b}-1}{\ln\frac{a}{b}}<\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+1\right)$ 恒成立，

令 $t=\sqrt{\frac{a}{b}}$，$(t>1)$，有 $k\cdot\frac{t^2-1}{2\ln t}<t+\frac{1}{2}(t^2+1)$ 恒成立， …………………………… (8 分)

得 $k\cdot\frac{t-1}{2\ln t}<\frac{1}{2}(t+1)$ 恒成立，所以 $k\cdot\frac{t-1}{t+1}-\ln t<0$ 恒成立

令 $g(t)=k\cdot\frac{t-1}{t+1}-\ln t$，有 $g'(t)=k\cdot\frac{2}{(t+1)^2}-\frac{1}{t}=\frac{2kt-(t+1)^2}{(t+1)^2\cdot t}=\frac{-t^2+2(k-1)t-1}{(t+1)^2\cdot t}$，(注：$g(1)=0$)

…………………………………………………………………………………… (9 分)

ⅰ 当 $g'(1)>0$ 时，即 $k>2$ 时，易知方程 $-t^2+2(k-1)t-1=0$ 有一根 t_1 大于 1，一根 t_2 小于 1，所以 $g(t)$ 在 $[1,t_1)$ 上单调递增，

故有 $g(t_1)>g(1)=0$，不符；…………………………………………… (10 分)

ⅱ 当 $0<k\leqslant 2$ 时，有 $2kt-(t+1)^2\leqslant 4t-(t+1)^2=-(t-1)^2\leqslant 0$，所以 $g'(t)\leqslant 0$，当且仅当 $t=1$ 时等号成立，从而 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故当 $t>1$ 时，恒有 $g(t)<g(1)=0$，符合. ………………… (11 分)

由ⅰ、ⅱ可知，正实数 k 的取值范围为 $0<k\leqslant 2$，因此，k 的最大值为 2. ………………………… (12 分)

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx），获取更多试题资料及排名分析信息。