★启用前注意保密

广东省2024届普通高中毕业班第二次调研考试

数 学

本试卷共4页、考试用时120分钟，满分150分。

注意事项： 1. 答卷前，考生务必将自己所在的学校、姓名、班级、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数z满足$(2-\mathrm{i})^2z=-\mathrm{i}$，则$\bar{z}$在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 若集合$A=\{x\mid 3x^2-8x-3\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x>1\}$，定义集合$A-B=\{x\mid x\in A$，且$x\notin B\}$，则$A-B=$

A. $\left[-\frac{1}{3},3\right]$　　B. $\left[-\frac{1}{3},1\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$　　D. $(1,3]$

3. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，则“$f(x)$，$g(x)$为周期函数”是“$f(x)+g(x)$为周期函数”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知F_1，F_2是椭圆C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，双曲线$C_2$：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{3m^2}=1$的一条渐近线$l$与$C_1$交于$A$，$B$两点．若$|F_1F_2|=|AB|$，则$C_1$的离心率为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{3}-1$

5. 在$\left(1+\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{\frac{8}{3}}$的展开式中，所有有理项的系数之和为

A. 84　　B. 85　　C. 127　　D. 128

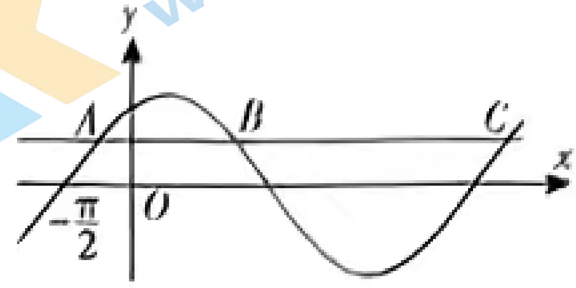
6. 已知$\{a_n\}$是等差数列，数列$\{na_n\}$是递增数列，则

A. $a_1>0$　　B. $a_2<0$　　C. $a_3>0$　　D. $a_4<0$

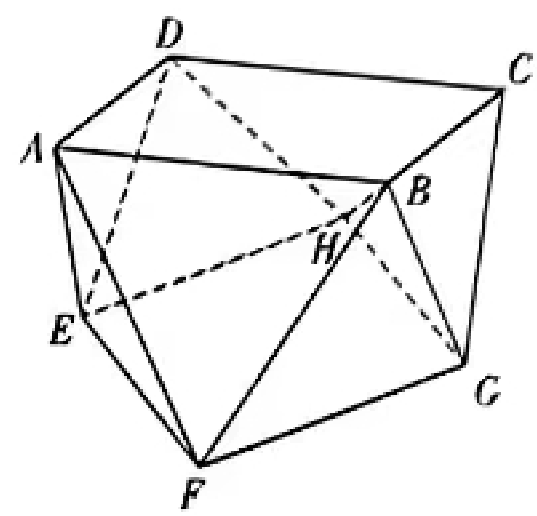
7. 如图，直线$y=1$与函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象的三个相邻的交点为$A$，$B$，$C$，且$|AB|=\pi$，$|BC|=2\pi$，则$f(x)=$

A. $2\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　B. $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　D. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$



8. 半正多面体是由边数不全相同的正多边形为面的多面体，如图所示的多面体$ABCD-EFGH$就是一个半正多面体，其中四边形$ABCD$和四边形$EFGH$均为正方形，其余八个面为等边三角形，已知该多面体的所有棱长均为2，则平面$ABCD$与平面$EFGH$之间的距离为



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt[4]{8}$

C. $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 2023年10月3日第19届杭州亚运会跳水女子10米跳台迎来决赛，中国“梦之队”包揽了该项目的冠亚军．已知某次跳水比赛中运动员五轮的成绩互不相等，记为x_i $(i=1,2,3,4,5)$，平均数为$\bar{x}$，若随机删去其任一轮的成绩，得到一组新数据，记为y_i $(i=1,2,3,4)$，平均数为$\bar{y}$，下面说法正确的是

A. 新数据的极差可能等于原数据的极差

B. 新数据的中位数可能等于原数据的中位数

C. 若$\bar{x}=\bar{y}$，则新数据的方差一定大于原数据方差

D. 若$\bar{x}=\bar{y}$，则新数据的第40百分位数一定大于原数据的第40百分位数

10. 若平面向量$\boldsymbol{a}=(n,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,m-1)$，其中n，$m\in\mathbf{R}$，则下列说法正确的是

A. 若$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,6)$，则$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

B. 若$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{b}$，则与$\boldsymbol{b}$同向的单位向量为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

C. 若$n=1$且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为锐角，则实数m的取值范围为$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

D. 若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$z=2^n+4^m$的最小值为4

11. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^3-x+1$ 有两个极值点 x_1，x_2，则

A. a 可能是负数

B. 若 $a=4$，则函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=2x$

C. $f(x_1)+f(x_2)$ 为定值

D. 若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $|f(x_0+2)-f(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}$，则 $0<a\leqslant\frac{5}{4}$

12. 已知函数 $f(x)=|\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x|$，则下列关于函数 $f(x)$ 的说法，正确的是

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

C. $f(x)$ 的最大值为 2

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=2x$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 写出满足“直线：$mx-y-2m+1=0(m\in\mathbf{R})$ 与圆：$x^2+y^2=1$ 相切”的一个 m 的值________.

14. 已知 O 是坐标原点，点 $N(\sqrt{2},1)$，且点 M 是圆 C：$x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 上的一点，则向量 $\overrightarrow{ON}$ 在向量 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影向量的模的取值范围是________.

15. 已知圆锥的外接球半径为 2，则该圆锥的最大体积为________.

16. 已知函数 $f(x)=x(e^{x-1}-2a)-\ln x$ 的最小值为 0，则 a 的值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

多巴胺是一种神经传导物质，能够传递兴奋及开心的信息. 近期很火的多巴胺穿搭是指通过服装搭配来营造愉悦感的着装风格，通过色彩艳丽的时装调动正面的情绪，是一种“积极化的联想”. 小李同学紧跟潮流，她选择搭配的颜色规则如下：从红色和蓝色两种颜色中选择，用“抽小球”的方式决定衣物颜色，现有一个箱子，里面装有质地、大小一样的 4 个红球和 2 个白球，从中任取 4 个小球，若取出的红球比白球多，则当天穿红色，否则穿蓝色. 每种颜色的衣物包括连衣裙和套装，若小李同学选择了红色，再选连衣裙的可能性为 0.6，而选择了蓝色后，再选连衣裙的可能性为 0.5.

(1) 写出小李同学抽到红球个数的分布列及期望；

(2) 求小李同学当天穿连衣裙的概率.

18. (12 分)

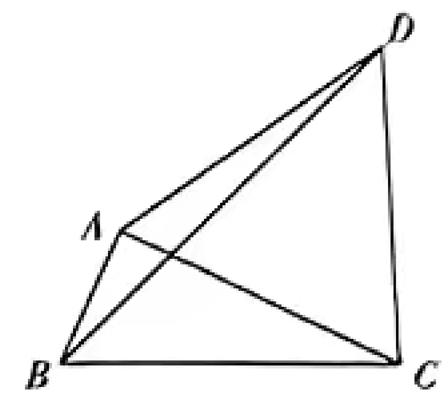
已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$，焦点为 F，准线为 l，点 Q 在准线 l 上．倾斜角为 $\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的直线经过点 F 与抛物线 C 交于 A，B 两点，且点 A 在第一象限．

(1)若 Q 在 x 轴上，证明：直线 AQ 的斜率等于 $\sin\theta$；

(2)已知 $\theta=\frac{\pi}{4}$，线段 AB 的垂直平分线经过点 Q，并与 x 轴交于点 M，四边形 $AQBM$ 的面积为 $24\sqrt{2}$，求 p.

19. (12 分)

如图，在平面内，四边形 $ABCD$ 的对角线交点位于四边形内部，$AB=3$，$BC=7$，$\triangle ACD$ 为正三角形，设 $\angle ABC=\alpha$.



(1)求 AC 的取值范围；

(2)当 α 变化时，求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

20. (12 分)

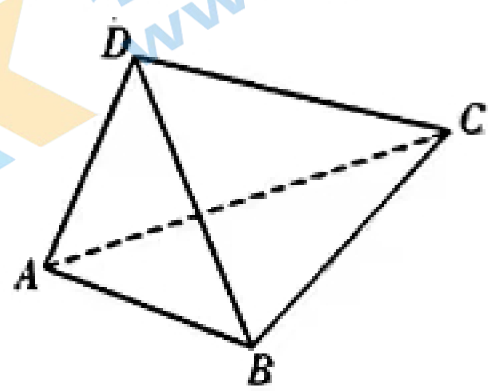
记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=-6$，且满足$\frac{S_{n+1}+S_n+a_2}{a_{n+1}}=3$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，若 $b_{3n}=2n-a_n$，$b_{3n-1}=a_n-2$，$b_{3n-2}=a_n+n$，求 T_{35}.

21. (12 分)

如图，在三棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=AD=BD=3\sqrt{2}$，$AC=7$，$BC=CD=5$.



(1)证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

(2)在线段 CD 上是否存在一点 E，使得二面角 $E-AB-C$ 的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{8}$？若存在，求出$\frac{CE}{CD}$的值，若不存在，请说明理由.

22. (12 分)

已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=(x-1)\ln(1-x)-x-a\cos x$，$f'(x)$为$f(x)$的导函数.

(1)当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)讨论 $f'(x)$在区间$(0,1)$上的零点个数；

(3)比较$\frac{1}{10}\cos\frac{1}{10}$与 $\ln\frac{10}{9}$的大小，并说明理由.

★启用前注意保密

广东省 2024 届普通高中毕业班第二次调研考试

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	D	D	C	A	B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	9	10	11	12
答案	ABC	BD	BCD	AD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $0\left(或\frac{4}{3}\right)$ 14. $[1,\sqrt{3}]$ 15. $\frac{256}{81}\pi$ 16. $\frac{1}{2}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。

17. 解：(1)设抽到红球的个数为 X，则 X 服从参数为 $N=6$，$M=4$，$n=4$ 的超几何分布，

X 的取值可能为 4，3，2，…………………………………………………………… 1 分

$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_6^4}=\frac{1}{15}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\frac{2}{5}$，………… 4 分

所以 X 的分布列为：

X	4	3	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

……………… 5 分

故 $E(X)=4\times\frac{1}{15}+3\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{8}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2)设 A 表示穿红色衣物，则 $\bar{A}$ 表示穿蓝色衣物，B 表示穿连衣裙，则 $\bar{B}$ 表示穿套装.

因为穿红色衣物的概率为 $P(A)=P(X=4)+P(X=3)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{3}{5}$，……… 7 分

则穿蓝色衣物的概率为 $P(\bar{A})=P(X=2)=\frac{2}{5}$，………………………………… 8 分

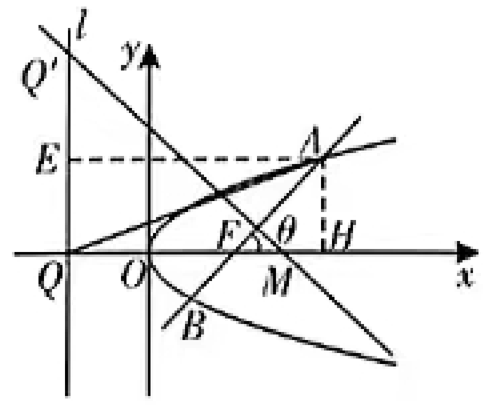
穿红色连衣裙的概率为 $P(B\mid A)=0.6=\frac{3}{5}$，穿蓝色连衣裙的概率为 $P(B\mid \bar{A})=0.5=\frac{1}{2}$，

则当天穿连衣裙的概率为 $P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid \bar{A})P(\bar{A})$

$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{14}{25}$. ………………… 10 分

18. (1)证明：过点 A 作 $AH\perp x$ 轴，垂足为 H，过点 A 作 $AE\perp l$，垂足为 E，

则四边形 $EQHA$ 为矩形. ………………………………… 1 分



而 $\sin\theta=\frac{|AH|}{|AF|}$. 而 $k_{AQ}=\tan\angle AQH=\frac{|AH|}{|QH|}$，……… 3 分

由抛物线的定义，$|AF|=|AE|$，而 $|AE|=|QH|$，故 $|AF|=|QH|$，从而 $k_{AQ}=\frac{|AH|}{|AF|}=\sin\theta$. …………… 5 分

(2)解：由题得，直线 AB 的方程为 $y=x-\frac{p}{2}$，设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，联立

$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=x-\frac{p}{2}, \end{cases}$ 消去 y，可得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$， ……………………………… 6 分

故 $x_1+x_2=3p$，从而 $|AB|=x_1+x_2+p=4p$， ……………………………… 7 分

$y_1+y_2=x_1+x_2-p=2p$. 于是线段 AB 的中点为 $\left(\frac{3}{2}p, p\right)$. …………………… 8 分

又 $\theta=\frac{\pi}{4}$，所以直线 QM 的斜率为 -1，故可得直线 QM 的方程为 $y-p=-\left(x-\frac{3p}{2}\right)$，

即 $y=-x+\frac{5p}{2}$. ………………………………………………………… 9 分

令 $y=0$，得 $x=\frac{5p}{2}$，故 $M\left(\frac{5p}{2}, 0\right)$，令 $x=-\frac{p}{2}$，得 $y=3p$，故 $Q\left(-\frac{p}{2}, 3p\right)$. 于是

$|QM|=\sqrt{(3p)^2+(-3p)^2}=3\sqrt{2}p$. ……………………………………… 10 分

因为 $AB\perp QM$，故四边形 $AQBM$ 的面积为 $\frac{1}{2}|AB|\cdot|QM|=\frac{1}{2}\times 4p\times 3\sqrt{2}p=24\sqrt{2}$，

……………………………………………………………………………… 11 分

解得 $p=2$. ……………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为四边形 $ABCD$ 的对角线交点位于四边形内部，所以 $\angle BAC+\angle CAD<\pi$，

又因为 $\triangle ACD$ 为正三角形，$\angle CAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $0<\angle BAC<\frac{2\pi}{3}$. ……………… 1 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\cos\angle BAC$， ……………………… 2 分

又因 $-\frac{1}{2}<\cos\angle BAC<1$，

将 $AB=3$，$BC=7$ 代入并整理得 $AC^2+3AC-40>0$ 且 $AC^2-6AC-40<0$，…… 4 分

解得 $5<AC<10$. …………………………………………………… 5 分

所以 AC 的取值范围是 $(5,\ 10)$. ………………………………………… 6 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=9+49-2\times3\times7\cos\alpha=58-42\cos\alpha$， … 7 分

由 (1) 知 $5<AC<10$，所以 $\cos\alpha\in\left(-1,\ \frac{11}{14}\right)$. ………………………………… 8 分

又因为 $\triangle ACD$ 为正三角形，所以 $S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{29}{2}\sqrt{3}-\frac{21}{2}\sqrt{3}\cos\alpha$. ………… 9 分

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha=\frac{21}{2}\sin\alpha$， …………………………………… 10 分

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}$

$$=\frac{21}{2}\sin\alpha+\frac{29}{2}\sqrt{3}-\frac{21}{2}\sqrt{3}\cos\alpha$$

$$=21\times\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)+\frac{29}{2}\sqrt{3}$$

$$=21\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{29}{2}\sqrt{3}，$$ …………………………………… 11 分

所以当 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时，且 $\cos\frac{5\pi}{6}$ $\frac{1}{2}\in\left(-1,\ \frac{11}{14}\right)$，四边形 $ABCD$ 的面积取得最大值，最大值为 $21+\frac{29}{2}\sqrt{3}$. …………………………………… 12 分

20. 解：(1) 因为 $S_{n+1}+S_n+a_2=3a_{n+1}$，

则当 $n\geqslant2$ 时，$S_n+S_{n-1}+a_2=3a_n$， ………………………………………… 1 分

两式相减可得 $a_{n+1}+a_n=3a_{n+1}-3a_n(n\geqslant2)$，则 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$， ………… 2 分

且当 $n=1$ 时，$\frac{S_2+S_1+a_2}{a_2}=3$，解得 $a_2=2a_1$， ………………………………… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 -6，公比为 2 的等比数列， ………………………………… 4 分

所以 $a_n=-6\times2^{n-1}=-3\times2^n$.

所以 $a_n=-3\times2^n$. …………………………………………………… 5 分

(2) 因为 $b_{3n}+b_{3n-1}+b_{3n-2}=a_n+3n-2=-3\times2^n+3n-2$， ………………… 7 分

则 $T_{35}=(b_1+b_2+b_3)+(b_4+b_5+b_6)+\cdots+(b_{34}+b_{35}+b_{36})-b_{36}$

$$=-3\times(2^1+2^2+\cdots+2^{12})+1\times12+\frac{12\times11}{2}\times3-(2\times12-a_{12})$$ ……… 10 分

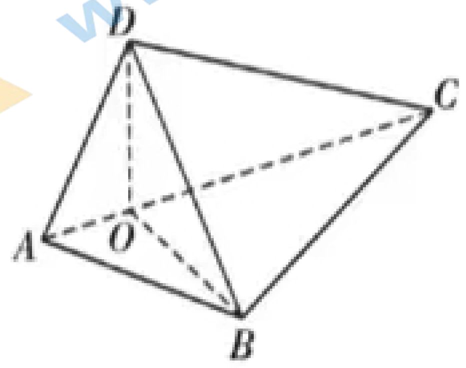
$$=-3\times\frac{2(1-2^{12})}{1-2}+210-(24+3\times2^{12})$$

$$=-36\ 672.$$ …………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)证明：在$\triangle ACD$中，$\cos\angle CAD=\dfrac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}=\dfrac{49+18-25}{2\times7\times3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\angle CAD=45°$，

过点D作$DO\perp AC$于点O，连接BO，



则$DO=AD\cdot\sin45°=3$， ………………………………… 1 分

因为$AB=AD$，$BC=CD$，AC为公共边，

所以$\triangle ABC\cong\triangle ADC$.

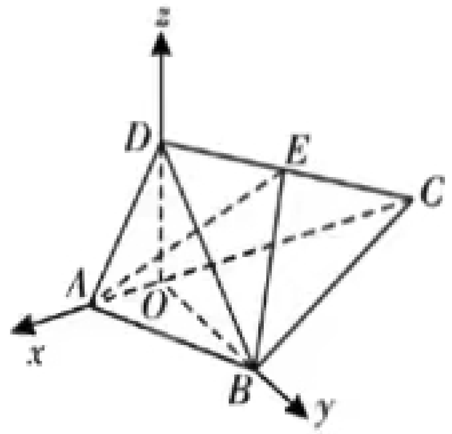
所以$BO=OD=3$，且$BO\perp AC$，

又$BD=3\sqrt{2}$，所以$OB^2+OD^2=BD^2$，所以$OD\perp OB$， ………………………… 2 分

又因为OB，$AC\subset$平面ABC，$OB\cap AC=O$，所以$OD\perp$平面ABC， ………… 3 分

又因为$OD\subset$平面ACD，所以平面$ACD\perp$平面ABC. ………………………… 4 分

(2)解：[解法一]设存在满足题意的点E，由(1)可知OA，OB，OD两两垂直，以点O为坐标原点，OA，OB，OD所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系， ………………………………………………………… 5 分



则$OA=3$，$OC=4$，则$A(3,0,0)$，$B(0,3,0)$，$D(0,0,3)$，$C(-4,0,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-7,0,0)$，$\overrightarrow{CD}=(4,0,3)$，

设$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CD}$，$0<\lambda<1$，

则$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CD}=(-7,0,0)+\lambda(4,0,3)=(4\lambda-7,0,3\lambda)$， … 6 分

显然平面ABC的法向量$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. …………………………………………… 7 分

设平面ABE的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-3x+3y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(4\lambda-7)x+3\lambda z=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y,\\(7-4\lambda)x=3\lambda z,\end{cases}$$

取$x=3\lambda$，则$y=3\lambda$，$z=7-4\lambda$，所以$\boldsymbol{n}=(3\lambda,3\lambda,7-4\lambda)$， ……………… 9 分

若二面角$E-AB-C$的正切值为$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，则其余弦值为$\dfrac{8}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+8^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{66}}$，

则$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|7-4\lambda|}{\sqrt{9\lambda^2+9\lambda^2+(7-4\lambda)^2}}=\dfrac{7-4\lambda}{\sqrt{34\lambda^2-56\lambda+49}}=\dfrac{8}{\sqrt{66}}$，

…………………………………………………………………………………………… 10 分

整理得$80\lambda^2+8\lambda-7=0$，所以$(4\lambda-1)(20\lambda+7)=0$，又因为$0<\lambda<1$，所以$\lambda=\dfrac{1}{4}$，

…………………………………………………………………………………………… 11 分

所以$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}$，即当$\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{4}$时，二面角$E-AB-C$的正切值为$\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. ……… 12 分

[解法二]过点 E 作 $EF\perp AC$ 于点 F，过点 F 作 $FG\perp AB$(或 AB 的延长线)于点 G，连接 EG，……………………………………………………………………………… 5 分

因为平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$，$EF\subset$ 平面 ACD，$EF\perp AC$，

所以 $EF\perp$ 平面 ABC，……………………………………………………………… 6 分

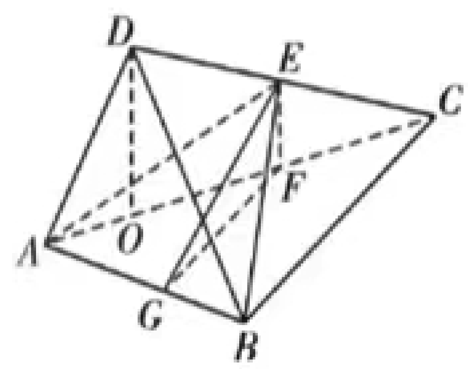
而 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $EF\perp AB$，又 $FG\perp AB$，$EF\cap FG=F$，

所以 $AB\perp$ 平面 EFG，所以 $AB\perp EG$，所以 $\angle EGF$ 即为二面角 $E-AB-C$ 的平面角.

……………………………………………………………………………………… 7 分

设 $\dfrac{CE}{CD}=\lambda$，因为 $\triangle CEF\backsim\triangle CDO$，所以 $\dfrac{EF}{DO}=\dfrac{CF}{CO}=\dfrac{CE}{CD}=\lambda$，所以 $EF=3\lambda$，$CF=4\lambda$，

……………………………………………………………………………………… 8 分



$AF=AC-CF=7-4\lambda$，由(1)得 $\cos\angle BAC=\cos\angle CAD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $FG=AF\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(7-4\lambda)$，……………………………………………… 9 分

所以 $\tan\angle EGF=\dfrac{EF}{FG}=\dfrac{3\lambda}{\frac{\sqrt{2}}{2}(7-4\lambda)}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$，…………… 10 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$，…………………………………………………………………… 11 分

所以当 $\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{4}$ 时，二面角 $E-AB-C$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-1)\ln(1-x)-x$，其定义域为 $(-\infty,1)$，

$f'(x)=\ln(1-x)$，令 $f'(x)=\ln(1-x)=0$，得 $x=0$. ……………………………… 1 分

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增；

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

因此，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，单调递减区间为 $(0,1)$. … 2 分

(2)令 $g(x)=f'(x)=\ln(1-x)+a\sin x$，

则 $g'(x)=-\dfrac{1}{1-x}+a\cos x=\dfrac{a(1-x)\cos x-1}{1-x}$，$x\in(0,1)$. ………………… 3 分

因为 $x\in(0,1)$，则 $1-x\in(0,1)$，$\cos x\in(0,1)$，则 $(1-x)\cos x\in(0,1)$.

当 $a\leqslant 1$ 时，则 $a(1-x)\cos x-1<0$，

故 $g'(x)<0$，从而 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

而 $g(0)=0$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)<g(0)=0$，

故 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上无零点；即 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上无零点； ………… 4 分

当 $a>1$ 时，令 $h(x)=a(1-x)\cos x-1$，则 $h'(x)=-a[\cos x+(1-x)\sin x]$，

因为 $x\in(0,1)$，则 $\cos x+(1-x)\sin x>0$，

从而 $h'(x)<0$，即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

而 $h(0)=a-1>0$，$h(1)=-1<0$，

因此存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $h(x_0)=0$， ………………………………………… 5 分

并且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h(x)<0$.

即当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g'(x)<0$.

故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_0,1)$ 时，$g(x)$ 单调递减.

而 $g(0)=0$，故 $g(x_0)>0$； ………………………………………………………………… 6 分

取 $N=1-e^{-2a}\in(0,1)$，当 $x>N$ 时，

$g(x)=\ln(1-x)+a\sin x<a+\ln(e^{-2a})=a-2a=-a<0$， ……………………… 7 分

所以存在唯一的 $m\in(x_0,1)$，使得 $g(m)=0$，

即 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上有唯一零点.

综上所述，当 $a>1$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上有唯一的零点；

当 $a\leqslant 1$ 时，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上没有零点. ……………………………………… 8 分

(3) $\frac{1}{10}\cos\frac{1}{10}<\ln\frac{10}{9}$. …………………………………………………………… 9 分

理由如下：

[解法一] 由(2)可得，当 $a\leqslant 1$ 时，$\ln(1-x)+a\sin x<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.

即当 $a=1$ 时，$\sin x<\ln\frac{1}{1-x}$，$x\in(0,1)$. ……………………………………… 10 分

以下证明不等式：当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $x<\tan x$.

令 $m(x)=x-\tan x$，则 $m'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}<0$，故 $m(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则

$m(x)<m(0)=0$，即 $x<\tan x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，即有 $x\cos x<\sin x$，

而 $\sin x<\ln\frac{1}{1-x}$，故 $x\cos x<\ln\frac{1}{1-x}$，$x\in(0,1)$. ……………………… 11 分

取 $x=\frac{1}{10}$，则有 $\frac{1}{10}\cos\frac{1}{10}<\ln\frac{10}{9}$. ………………………………………… 12 分

[解法二]显然 $\cos\frac{1}{10}\in(0,1)$，故 $\frac{1}{10}\cos\frac{1}{10}<\frac{1}{10}$， ……………………………………… 9 分

以下证明不等式：当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，有 $\ln(1+x)\leqslant x$.

令 $p(x)=\ln(1+x)-x$，则令 $p'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}=0$，得 $x=0$.

故当 $x\in(-1,0)$ 时，$p'(x)>0$，从而 $p(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$p'(x)<0$，从而 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

故 $x=0$ 是 $p(x)=\ln(1+x)-x$ 的极大值点，并且是最大值点，

故 $p(x)\leqslant p(0)=0$，即 $\ln(1+x)\leqslant x$，$x\in(-1,+\infty)$. ………………………… 10 分

取 $x=-\frac{1}{10}$，则 $\ln\frac{9}{10}<-\frac{1}{10}$，故 $\ln\frac{10}{9}>\frac{1}{10}$， ………………………………… 11 分

故 $\frac{1}{10}\cos\frac{1}{10}<\frac{1}{10}<\ln\frac{10}{9}$，从而 $\frac{1}{10}\cos\frac{1}{10}<\ln\frac{10}{9}$. ………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！