高 三 数 学

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分,考试时间120分钟。
2. 答题前,考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,**超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围:高考范围。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z=2-i$,则 $\frac{i^{2\,025}}{z}=$

A. $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　　B. $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

C. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　　D. $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

2. 若"$x>a$"是"$x>1$"的必要不充分条件,则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1)$,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\theta\right)=$

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $\frac{7}{25}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

4. 某旅游团计划去北京旅游,因时间原因,要从北京的9个景点(A,B,C,D,E,F,G,H,I)中选出4个作为主要景点,并从余下景点中选出3个作为备选景点,若 A,B 不能作为主要景点,C 不能作为备选景点,则不同的选法种数为

A. 290　　B. 260　　C. 200　　D. 160

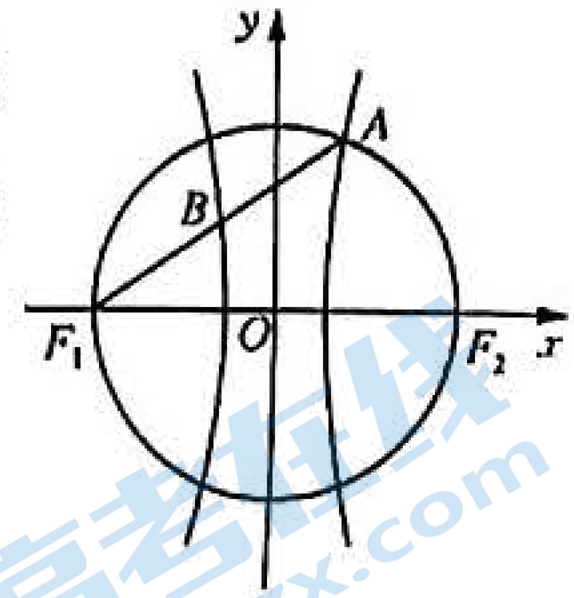
5. 过圆 $O:x^2+y^2=4$ 外一点 $P(3,4)$ 作圆 O 的切线,切点分别为 A,B,则 $|AB|=$

A. $\frac{4\sqrt{21}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{21}}{5}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 已知 O_1,O_2 分别是圆柱 P 的上、下底面 π_1,π_2 的中心,Q_i 是以 O_i 为顶点,π_{3-i} 为底面的圆锥($i=1,2$),若圆柱 P 的体积为 6π,那么圆锥 Q_1,Q_2 的公共部分的体积为

A. 2π　　B. π　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

7. 如图，已知双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，以线段 F_1F_2 为直径的圆在第一象限交 E 于点 A，AF_1 交 E 的左支于点 B，若 B 为线段 AF_1 的中点，则 E 的离心率为



A. $\sqrt{3}$　　B. 2

C. 3　　D. $\sqrt{13}$

8. 若 $a=\frac{1}{5}e^{\frac{1}{3}},b=\frac{1}{6}e^{\frac{2}{5}},c=\frac{1}{3}$，则

A. $b>c>a$　　B. $c>a>b$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列结论正确的是

A. 在锐角△ABC 中，$\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$ 恒成立

B. 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=1$，则 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha=1(n\in\mathbf{N}^*)$

C. 将 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得到 $y=\sin x$ 的图象

D. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，则 $0<\omega\leqslant 2$

10. 斐波那契数列又称为黄金分割数列，在现代物理、化学等领域都有应用. 斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，则

A. $\forall n\in\mathbf{N}^*,a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_{2n}$

B. $\exists m\in\mathbf{N}^*$，使得 a_m,a_{m+1},a_{m+2} 成等比数列

C. $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*,a_n,\lambda a_{n+2},a_{n+4}$ 成等差数列

D. $\forall n\in\mathbf{N}^*,a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=a_{2n+1}-1$

11. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1,A(1,1)$，$F$ 为 C 的左焦点，P 为 C 上一点，则

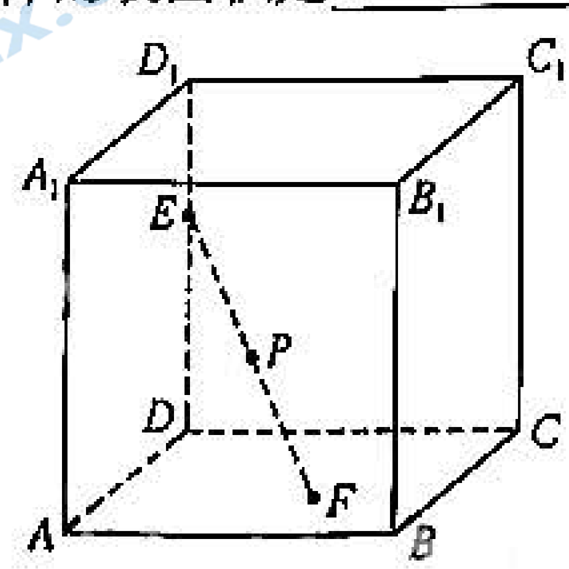
A. $|PA|+|PF|$ 的最小值为 $6-\sqrt{2}$　　B. $|PA|+|PF|$ 的最大值为 $6+\sqrt{2}$

C. △PAF 面积的最小值为 $\frac{3\sqrt{6}-2}{2}$　　D. △PAF 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}+2}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知集合 $A=\{x|a\leqslant x\leqslant 2-a\}(a\in\mathbf{R})$ 中仅有 3 个整数，则 a 的取值范围为________.

13. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 6，长为 6 的线段 EF 的一个端点 E 在棱 DD_1（不含端点）上运动，点 F 在正方体的底面 $ABCD$ 内运动，则 EF 的中点 P 的轨迹与正方体的面 $ABCD$，面 ADD_1A_1，面 CDD_1C_1 所围成的几何体的表面积是________.



14. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall x,y\in\mathbf{R},f(x+y)=f(x)+f(y)-2\,024$，若函数 $g(x)=\frac{x\sqrt{2\,024-x^2}}{2\,024+x^2}+f(x)$ 的最大值和最小值分别为 M,m，则 $M+m=$________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

2023 年 10 月 26 日，神舟十七号载人飞船把汤洪波、唐胜杰、江新林送入太空，他们是载人航天工程进入空间站应用和发展阶段的第二批航天员，他们的轮换和在轨工作也趋于常态化，主要包括人员和物资的正常轮换补给、空间站组合体平台照料、在轨实（试）验、开展科普及公益活动以及异常情况处置等工作. 空间站的公益活动是与大众比较接近和感兴趣的空间站的工作任务. 为了解学生对空间站的公益活动是否感兴趣，某学校从全校学生中随机抽取 300 名学生进行问卷调查，得到如下 2×2 列联表中的部分数据：

	对空间站开展的公益活动感兴趣	对空间站开展的公益活动不感兴趣	合计
男生	120		
女生		60	
合计			

已知从这 300 名学生中随机抽取 1 人，抽到对此项活动感兴趣的学生的概率为$\frac{7}{10}$.

(1)将上述 2×2 列联表补充完整，并依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，能否认为该校学生对空间站开展的公益活动感兴趣与性别有关联？

(2)该学校对参与问卷调查的学生按性别，利用按比例分配的分层随机抽样的方法，从对此项活动感兴趣的学生中抽取 7 人组成“我国载人航天事迹”宣传小组，从这 7 人中任选 3 人，随机变量 X 表示 3 人中女生的人数，求 X 的分布列及数学期望.

附：

α	0.010	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

16.（本小题满分 15 分）

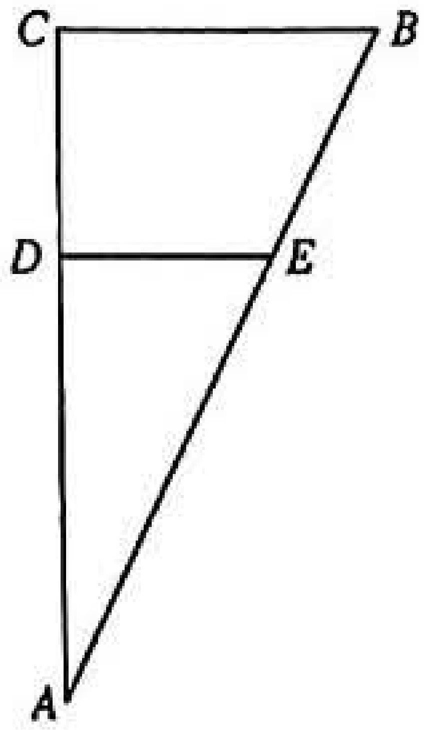
在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$1+\cos 2C=\cos 2A+\cos 2B-2\sin A\sin B$.

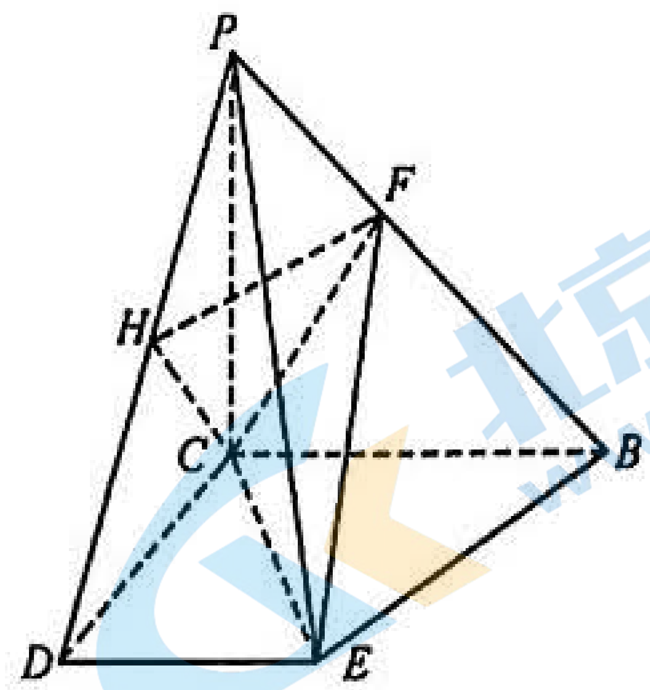
(1)求角 C；

(2)若 $c=5$，D 为边 AB 上一点，$\angle ACD=\angle BCD$，求 CD 的最大值.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=3$，$AC=6$，D，E分别为边AC，AB上一点，且$CD=2$，$DE/\!/BC$，将$\triangle ADE$沿DE折起到$\triangle PDE$的位置，使得$PC\perp CD$，F为PB上一点，且$\dfrac{PF}{PB}=\dfrac{2}{5}$.





(1)求证：$PD/\!/$平面CEF；

(2)若H为线段PD上一点（异于端点），且二面角$H-CF-E$的正弦值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，求$\dfrac{PH}{PD}$的值.

18.（本小题满分 17 分）

在平面直角坐标系xOy中，一动圆过点$F(1,0)$且与直线$x=-1$相切，设该动圆的圆心C的轨迹为曲线Γ.

(1)求Γ的方程；

(2)设P为Γ在第一象限内的一个动点，过P作曲线Γ的切线l_1，直线l_2过点P且与l_1垂直，l_2与Γ的另外一个交点为Q，求$|PQ|$的最小值.

19.（本小题满分 17 分）

已知函数$f(x)=ae^x-e^{-x}-(a+1)x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当$a=0$时，求曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处的切线方程；

(2)当$a\in(0,1)$时，若x_1，x_2分别为$f(x)$的极大值点和极小值点，且$f(x_1)+\lambda f(x_2)>0$，求实数λ的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

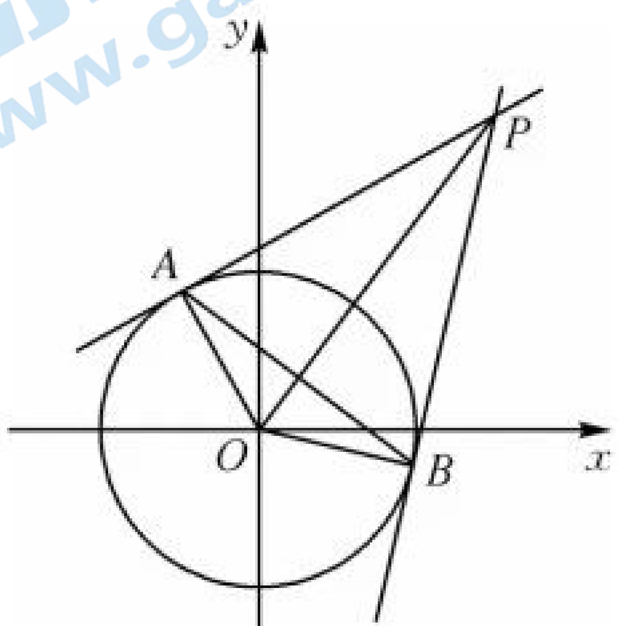
1. C　因为 $z=2-\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=2+\mathrm{i}$,所以 $\frac{\mathrm{i}^{2\,025}}{\bar{z}}=\frac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$. 故选 C.

2. A　由题意知 $\{x\mid x>1\}\subsetneqq\{x\mid x>a\}$,所以 $a<1$,即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$. 故选 A.

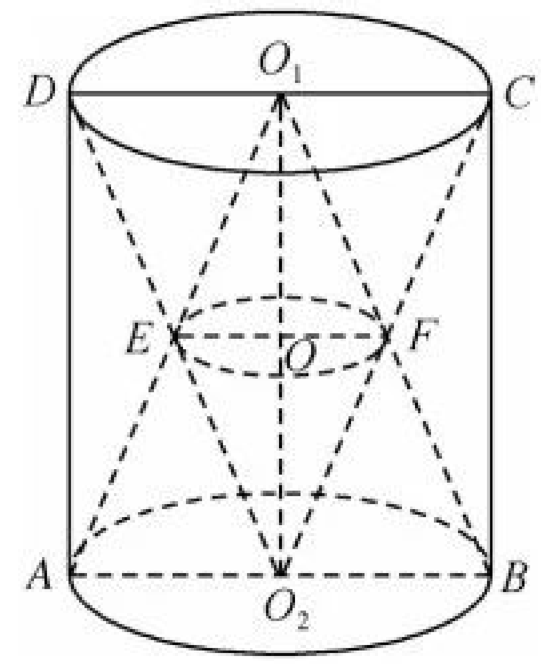
3. D　由题意得 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$,又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\sin\theta=\frac{3}{5}$,所以 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\theta\right)=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ $=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$. 故选 D.

4. B　若 C 入选主要景点,有 $C_6^3C_5^3=200$ 种选法;若 C 没入选主要景点,有 $C_6^4C_4^3=60$ 种选法,故不同的选法种数为 260. 故选 B.

5. A　如图,由题意知 $|OA|=|OB|=2$,$PA\perp OA$,$PB\perp OB$,$|OP|=\sqrt{3^2+4^2}=5$,所以 $|PA|=\sqrt{OP^2-OA^2}=\sqrt{21}$,根据圆的对称性易知 $OP\perp AB$,则 $\frac{1}{2}\times|OP|\times|AB|=\frac{1}{2}\times|OA|\times|AP|\times 2$,解得 $|AB|=\frac{4\sqrt{21}}{5}$. 故选 A.



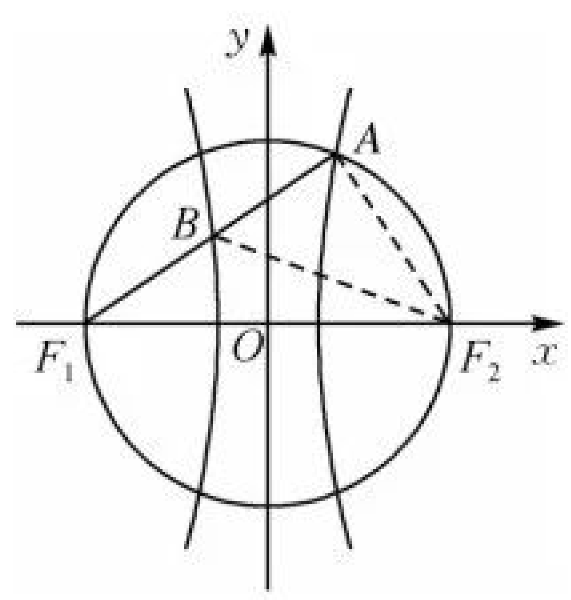
第 5 题图



第 6 题图

6. C　如图所示,四边形 $ABCD$ 为圆柱 P 的轴截面,圆锥 Q_1,Q_2 的公共部分为同底的圆锥 O_1O 和 O_2O,设圆柱 P 底面圆的半径为 r,高为 h,则 $\pi r^2h=6\pi$,由 $O_1D/\!/AO_2$,得 $\frac{O_1E}{EA}=\frac{DE}{EO_2}=\frac{O_1D}{AO_2}=1$,所以 E 为 AO_1 和 DO_2 的中点,同理 F 为 O_1B 和 O_2C 的中点,所以 $OE=\frac{1}{2}r$,即圆锥 Q_1,Q_2 公共部分的圆锥的底面圆的半径为 $\frac{1}{2}r$,且每个小圆锥的高为 $\frac{1}{2}h$,所以所求公共部分的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}r\right)^2\cdot\frac{1}{2}h\times 2=\frac{1}{12}\pi r^2h=\frac{1}{12}\times 6\pi=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

7. D　连接 AF_2,BF_2,设 $|F_1F_2|=2c$,$|AF_2|=t$,则 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{2}$,由双曲线的定义知 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,$|BF_2|-|BF_1|=2a$,所以 $|AF_1|=2a+t$,$|AB|=|BF_1|=a+\frac{t}{2}$,$|BF_2|=3a+\frac{t}{2}$,在 $\triangle BAF_2$ 中,由勾股定理,得 $|AB|^2+|AF_2|^2=|BF_2|^2$,即 $\left(a+\frac{t}{2}\right)^2+t^2=\left(3a+\frac{t}{2}\right)^2$,所以 $t=4a$ 或 $t=-2a$(舍). 在 $\triangle F_1AF_2$ 中,由勾股定理,得 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2$,即 $(2a+t)^2+t^2=4c^2$,所以 $\frac{c^2}{a^2}=13$,所以 $e=\sqrt{13}$. 故选 D.

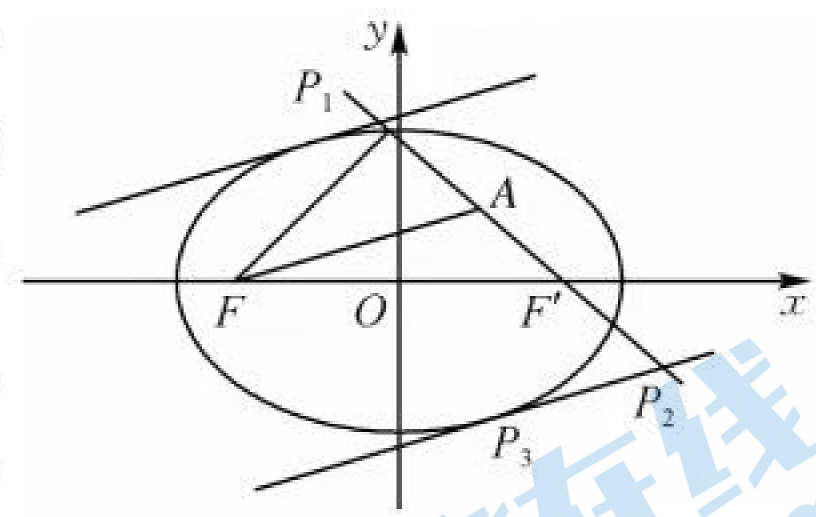


8. B　由题意知 $2a=\frac{2}{5}e^{\frac{1}{3}}$,$2b=\frac{1}{3}e^{\frac{2}{5}}$,令 $f(x)=\frac{e^x}{x}\ (0<x<1)$,则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,又 $0<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<1$,所以 $f\left(\frac{1}{3}\right)>f\left(\frac{2}{5}\right)$,即 $\frac{e^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}>\frac{e^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}$,所以 $\frac{2}{5}e^{\frac{1}{3}}>\frac{1}{3}e^{\frac{2}{5}}$,即 $2a>2b$,所以 $a>b$,又 $5a=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$,$5c=\frac{5}{3}$,又 $\frac{5}{3}=\sqrt[3]{\frac{125}{27}}>\sqrt[3]{e}$,所以 $5c>5a$,所以 $c>a$,所以 $c>a>b$. 故选 B.

9. ABD　对于 A，由题意知 $\frac{\pi}{2}<A+B<\pi$，$0<\frac{\pi}{2}-B<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$，同理 $\sin B>\cos A$，所以 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$，故 A 正确；对于 B，因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=1$，所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1$，所以 $\sin\alpha\cos\alpha=0$，所以 $\begin{cases}\sin\alpha=1,\\ \cos\alpha=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\alpha=0,\\ \cos\alpha=1,\end{cases}$ 所以 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha=1+0=1$，故 B 正确；将 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故 C 错误；对于 D，$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{2\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{\pi}{3\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right](k\in\mathbf{Z})$，所以 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\subseteq\left[-\frac{2\pi}{3\omega},\frac{\pi}{3\omega}\right]$，所以 $\begin{cases}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{6},\\ \frac{\pi}{3\omega}\geqslant\frac{\pi}{6},\end{cases}$ 解得 $\omega\leqslant 2$，所以 $0<\omega\leqslant 2$，故 D 正确. 故选 ABD.

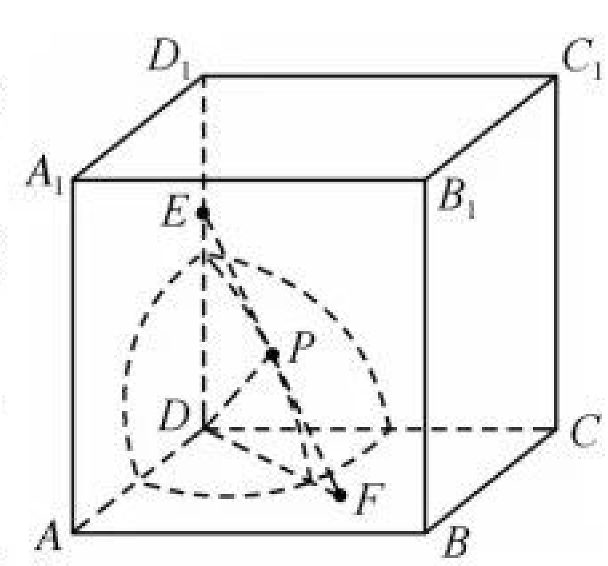
10. ACD　对于 A，因为 $a_2=a_1$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_2+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}=a_4+a_5+a_7+\cdots+a_{2n-1}=\cdots=a_{2n-2}+a_{2n-1}=a_{2n}$，故 A 正确；对于 B，由递推公式可知 a_m,a_{m+1},a_{m+2} 中有两个奇数，一个偶数，不可能成等比数列，故 B 错误，对于 C，$a_{n+4}=a_{n+3}+a_{n+2}=2a_{n+2}+a_{n+1}=3a_{n+2}-a_n$，所以 $2\times\left(\frac{3}{2}a_{n+2}\right)=a_n+a_{n+4}$，故 $a_n,\frac{3}{2}a_{n+2},a_{n+4}$ 成等差数列，所以存在 $\lambda=\frac{3}{2}$，使得 $a_n,\lambda a_{n+2},a_{n+4}$ 成等差数列，故 C 正确；对于 D，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=-1+a_3+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=-1+a_5+a_6+\cdots+a_{2n}=\cdots=-1+a_{2n-1}+a_{2n}=a_{2n+1}-1$，故 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD　设 C 的右焦点为 F'，则 $F'(2,0)$，$|PF|+|PF'|=6$，所以 $|PF|=6-|PF'|$，所以 $|PA|+|PF|=6+|PA|-|PF'|$，当 P,A,F' 三点共线，且 P 在线段 $F'A$ 的延长线上时，$|PA|-|PF'|$ 的值最小，$(|PA|-|PF'|)_{\min}=-|AF'|=-\sqrt{2}$，所以 $|PA|+|PF|$ 的最小值为 $6-\sqrt{2}$，当 P,A,F' 三点共线，且 P 在 AF' 延长线上时，$|PA|-|PF'|$ 最大，且 $(|PA|-|PF'|)_{\max}=|AF'|=\sqrt{2}$，故 $(|PA|+|PF|)_{\max}=6+\sqrt{2}$，故 A，B 均正确；易知 $\triangle PAF$ 的面积无最小值，故 C 错误；易知直线 AF 的方程为 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$，设与直线 AF 平行且与 C 相切的直线为 $y=\frac{1}{3}x+m$，与 C 的方程联立，得 $2x^2+2mx+3m^2-15=0$，由 $\Delta=4m^2-8(3m^2-15)=0$，得 $m=\pm\sqrt{6}$，显然直线 $y=\frac{1}{3}x-\sqrt{6}$ 与 AF 距离较远，易求直线 AF 与直线 $y=\frac{1}{3}x-\sqrt{6}$ 间的距离 $d=\frac{2+3\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$，当 P 为直线 $y=\frac{1}{3}x-\sqrt{6}$ 与 C 的交点时，$\triangle PAF$ 的面积最大，此时其面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{2+3\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.



12. $(-1,0]$　因为 $\frac{a+2-a}{2}=1$，所以在数轴上集合 A 的端点关于点 1 对称，从而 A 中的三个整数为 0，1，2，所以 $-1<a\leqslant 0$，且 $2\leqslant 2-a<3$，即 $-1<a\leqslant 0$.

13. $\frac{45\pi}{4}$　连接 DF，则 $\triangle EDF$ 为直角三角形，在 $\mathrm{Rt}\triangle EDF$ 中，$EF=6$，P 为 EF 的中点，连接 DP，则 $DP=\frac{1}{2}EF=3$，所以点 P 在以 D 为球心，半径 $R=3$ 的球面上，又点 P 只能落在正方体的表面或其内部，所以点 P 的轨迹的面积等于该球面面积的 $\frac{1}{8}$，即 $S_1=\frac{1}{8}\times 4\pi R^2=\frac{9\pi}{2}$，又几何体在正方体的面 $ABCD$，面 ADD_1A_1，面 CDD_1C_1 上的部分面积的和为 $S_2=3\times\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{27\pi}{4}$，故所求几何体的表面积 $S=S_1+S_2=\frac{9\pi}{2}+\frac{27\pi}{4}=\frac{45\pi}{4}$.



14. 4 048　令 $x=y=0$，得 $f(0)=2\ 024$，令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)-2\ 024$，所以 $f(-x)-2\ 024=-[f(x)-2\ 024]$，故 $h(x)=f(x)-2\ 024$ 为奇函数，所以 $f(x)=h(x)+2\ 024$. 令 $G(x)=\frac{x\sqrt{2\ 024-x^2}}{2\ 024+x^2}+h(x)$，则 $G(-x)=-G(x)$，即 $G(x)$ 为奇函数，所以 $G(x)_{\max}+G(x)_{\min}=0$. 而 $g(x)=\frac{x\sqrt{2\ 024-x^2}}{2\ 024+x^2}+h(x)+2\ 024=G(x)+2\ 024$，所以 $M+m=G(x)_{\max}+2\ 024+G(x)_{\min}+2\ 024=4\ 048$.

15. 解：(1) 因为从这 300 名学生中随机抽取 1 人，抽到对此感兴趣的学生的概率为 $\frac{7}{10}$，

所以对此项活动感兴趣的学生数为 $300\times\frac{7}{10}=210$ 人，不感兴趣的有 90 人，…… 2 分

所以 2×2 列联表为：

	对空间站开展的公益活动感兴趣	对空间站开展的公益活动不感兴趣	合计
男生	120	30	150
女生	90	60	150
合计	210	90	300

…… 3 分

零假设为 H_0：对空间站开展的公益活动感兴趣与性别无关联，

根据列联表，经计算得

$\chi^2=\frac{300(120\times60-90\times30)^2}{150\times150\times210\times90}=\frac{100}{7}\approx14.286>10.828=x_{0.001}$，…… 5 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为对该项目感兴趣与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.001. …… 6 分

(2) 由分层随机抽样知在抽取的 7 人中，男生有 $120\times\frac{7}{210}=4$ 人，女生有 $90\times\frac{7}{210}=3$ 人，

所以随机变量 X 可能的取值为 0，1，2，3， …… 7 分

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$， …… 9 分

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$， …… 11 分

所以分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

…… 12 分

所以 $E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$. …… 13 分

16. 解：(1) 因为 $1+\cos 2C=\cos 2A+\cos 2B-2\sin A\sin B$，

所以 $2-2\sin^2 C=1-2\sin^2 A+1-2\sin^2 B-2\sin A\sin B$， …… 2 分

所以 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=-\sin A\sin B$，…… 3 分

由正弦定理，得 $a^2+b^2-c^2=-ab$， …… 4 分

由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$， …… 5 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$. …… 6 分

(2)因为$\angle ACD=\angle BCD$，且 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$，

所以$\frac{1}{2}ab\sin\angle ACB=\frac{1}{2}a\cdot CD\sin\angle BCD+\frac{1}{2}b\cdot CD\sin\angle ACD$，

化简，得 $ab=a\cdot CD+b\cdot CD$，解得 $CD=\frac{ab}{a+b}$，…………………………………… 9 分

由(1)，得 $a^2+b^2+ab=25$，即$(a+b)^2-ab=25$，…………………………………… 11 分

由 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，得$(a+b)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant 25$，解得 $a+b\leqslant\frac{10\sqrt{3}}{3}$$\left(\text{当且仅当 } a=b=\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{ 时取等号}\right)$，又 $a+b>5$，所以

$5<a+b\leqslant\frac{10\sqrt{3}}{3}$. …………………………………… 12 分

而 $CD=\frac{ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-25}{a+b}=a+b-\frac{25}{a+b}$，且是关于 $a+b$ 的增函数，

所以当 $a+b=\frac{10\sqrt{3}}{3}$时，$(CD)_{\max}=\frac{10\sqrt{3}}{3}-\frac{25}{\frac{10\sqrt{3}}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$. …………………………………… 15 分

17.(1)证明：连接 BD 交 CE 于点 G，连接 FG，

因为 $DE/\!/BC$，所以$\frac{DG}{GB}=\frac{DE}{BC}$，…………………………………… 1 分

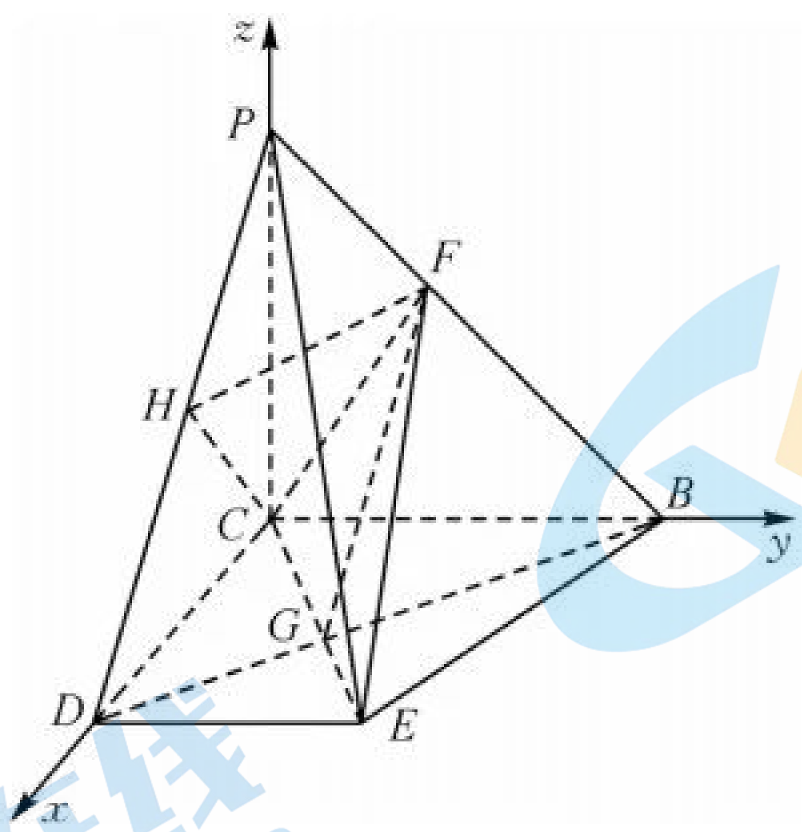
在$\triangle ABC$ 中，因为 $DE/\!/BC$，所以$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$， …………………………………… 2 分

所以$\frac{DG}{GB}=\frac{DE}{BC}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{DG}{DB}=\frac{2}{5}=\frac{PF}{PB}$，

所以 $PD/\!/FG$. …………………………………… 4 分

又 $FG\subset$平面 CEF，$PD\not\subset$平面 CEF，

所以 $PD/\!/$平面 CEF. …………………………………… 6 分



(2)解：因为 $DE\perp CD$，$DE\perp PD$，$CD\cap PD=D$，$CD,PD\subset$平面 PCD，

所以 $DE\perp$平面 PCD，又 $PC\subset$平面 PCD，所以 $DE\perp PC$， …………………………………… 7 分

又 $DE/\!/BC$，

所以 $PC\perp BC$，所以 CP,CD,CB 两两垂直. …………………………………… 8 分

以 C 为坐标原点，CD,CB,CP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，则 $D(2,0,0)$，

$B(0,3,0)$，$E(2,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，$F\left(0,\frac{6}{5},\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)$，

所以$\overrightarrow{CE}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CF}=\left(0,\frac{6}{5},\frac{6\sqrt{3}}{5}\right)$，$\overrightarrow{PD}=(2,0,-2\sqrt{3})$，

设$\overrightarrow{PH}=t\overrightarrow{PD}(0<t<1)$，则$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PH}=(2t,0,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}t)$. …………………………………… 9 分

设平面 CEF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{6}{5}(y+\sqrt{3}z)=0,\\ 2(x+y)=0,\end{cases}$

令 $z=1$，解得 $x=\sqrt{3}$，$y=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$， …… 10 分

设平面 CFH 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CH}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{6}{5}(b+\sqrt{3}c)=0,\\ 2[ta+\sqrt{3}(1-t)c]=0,\end{cases}$

令 $c=t$，解得 $a=\sqrt{3}(t-1)$，$b=-\sqrt{3}t$，所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}(t-1),-\sqrt{3}t,t)$. …… 11 分

设二面角 $H-CF-E$ 的大小为 θ，由题意知 $|\cos\theta|=\frac{1}{7}$， …… 12 分

所以 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|7t-3|}{\sqrt{7t^2-6t+3}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{7}$，

解得 $t=\frac{1}{2}$，或 $t=\frac{5}{14}$，即 $\frac{PH}{PD}=\frac{1}{2}$，或 $\frac{PH}{PD}=\frac{5}{14}$. …… 15 分

18. 解：(1) 由题意得点 C 到点 F 的距离等于到直线 $x=-1$ 的距离，

由抛物线的定义知点 C 的轨迹是以坐标原点 O 为顶点，以 $F(1,0)$ 为焦点的抛物线， …… 2 分

设 $y^2=2px(p>0)$，则 $\frac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，

故 Γ 的方程为 $y^2=4x$. …… 4 分

(2) 当 $y>0$ 时，$y=2\sqrt{x}$，所以 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，设 $P(m,2\sqrt{m})(m>0)$，

则 $y'|_{x=m}=\frac{1}{\sqrt{m}}$，即 l_1 的斜率为 $\frac{1}{\sqrt{m}}$，

因为 $l_1\perp l_2$，所以 l_2 的斜率为 $-\sqrt{m}$， …… 7 分

所以 l_2 的方程为 $y-2\sqrt{m}=-\sqrt{m}(x-m)$，所以 $x=m+2-\frac{1}{\sqrt{m}}y$，

代入 $y^2=4x$，得 $y^2+\frac{4}{\sqrt{m}}y-4m-8=0$，

设 $Q(x_1,y_1)$，则 $y_1+2\sqrt{m}=-\frac{4}{\sqrt{m}}$，所以 $y_1=-2\sqrt{m}-\frac{4}{\sqrt{m}}$， …… 10 分

所以 $\left(-2\sqrt{m}-\frac{4}{\sqrt{m}}\right)^2=4x_1$，即 $x_1=m+\frac{4}{m}+4$，故 $Q\left(m+\frac{4}{m}+4,-2\sqrt{m}-\frac{4}{\sqrt{m}}\right)$，

所以 $|PQ|=\sqrt{\left(\frac{4}{m}+4\right)^2+\left(-4\sqrt{m}-\frac{4}{\sqrt{m}}\right)^2}=4\sqrt{m+3+\frac{3}{m}+\frac{1}{m^2}}$. …… 13 分

令 $u(m)=m+3+\frac{3}{m}+\frac{1}{m^2}(m>0)$，则 $u'=1-\frac{3}{m^2}-\frac{2}{m^3}=\frac{m^3-3m-2}{m^3}=\frac{(m-2)(m+1)^2}{m^3}$，

易知函数 $u(m)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $u(m)_{\min}=u(2)=\frac{27}{4}$，所以 $|PQ|_{\min}=4\times\sqrt{\frac{27}{4}}=6\sqrt{3}$. …… 17 分

19. 解：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=-e^{-x}-x$，所以 $f'(x)=e^{-x}-1$，故 $f'(-1)=e-1$， …… 2 分

又 $f(-1)=-e+1$，

所以所求切线方程为 $y-(-e+1)=(e-1)(x+1)$，即 $y=(e-1)x$. …… 4 分

(2) $f'(x)=ae^x+e^{-x}-(a+1)=\frac{ae^{2x}-(a+1)e^x+1}{e^x}=\frac{(ae^x-1)(e^x-1)}{e^x}$， …… 5 分

因为 $a\in(0,1)$，所以 $\ln\frac{1}{a}>0$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln\frac{1}{a}$，或 $x<0$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\ln\frac{1}{a}$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，在 $x=\ln\frac{1}{a}$ 处取得极小值，即 $x_1=0$，$x_2=\ln\frac{1}{a}$. ………… 7 分

所以 $f(x_1)=f(0)=a-1<0$，$f(x_2)=f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a+(a+1)\ln a$，

因为 $f(x)$ 在 $\left(0,\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，所以 $f(x_2)<f(x_1)<0$，

要使 $f(x_1)+\lambda f(x_2)>0$，则 $\lambda<0$， ………… 9 分

$f(x_1)+\lambda f(x_2)=a-1+\lambda[1-a+(a+1)\ln a]=(1-\lambda)a+\lambda-1+\lambda(a+1)\ln a$，

令 $h(a)=(1-\lambda)a+\lambda-1+\lambda(a+1)\ln a$，则 $h(a)>0$，且 $h(1)=0$，

$h'(a)=1-\lambda+\lambda\ln a+\frac{\lambda(a+1)}{a}=1+\lambda\ln a+\frac{\lambda}{a}$， ………… 10 分

令 $m(a)=1+\lambda\ln a+\frac{\lambda}{a}$，当 $0<a<1$ 时，$m'(a)=\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda}{a^2}=\frac{\lambda(a-1)}{a^2}>0$，

所以 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $m(a)<1+\lambda$， ………… 12 分

①当 $1+\lambda\leqslant 0$，即 $\lambda\leqslant -1$ 时，$m(a)<0$，所以 $h'(a)<0$，

故 $h(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，又 $h(1)=0$，所以当 $a\in(0,1)$ 时，$h(a)>0$，符合题意； ………… 13 分

②当 $1+\lambda>0$ 时，则 $-1<\lambda<0$，$0<1+\lambda<1$.

首先证明：当 $x>2$ 时，$\ln x<\frac{x}{2}$，即证明 $p(x)=\ln x-\frac{x}{2}<0$.

当 $x>2$ 时，$p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}<0$，$p(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $p(x)<p(2)=\ln 2-1<0$，即 $\ln x<\frac{x}{2}$. ………… 14 分

而 $m(a)=1+\lambda\left(\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}\right)<0\Leftrightarrow\frac{1}{a}-\ln\frac{1}{a}>-\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow\frac{1}{a}>\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda}$，

当 $\frac{1}{a}>2$ 时，要使 $\frac{1}{a}>\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{\lambda}$，因为 $\ln\frac{1}{a}<\frac{1}{2a}$，只需 $\frac{1}{a}>\frac{1}{2a}-\frac{1}{\lambda}$，即需 $a<-\frac{\lambda}{2}$. ………… 15 分

当 $-1<\lambda<0$ 时，$0<-\frac{\lambda}{2}<\frac{1}{2}$，只需取 $0<a_0<-\frac{\lambda}{2}$，则有 $m(a_0)<0$.

又 $m(1)=1+\lambda>0$，由零点存在定理及 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

可得存在唯一的 $a_1\in(a_0,1)$，使得 $m(a_1)=0$.

所以当 $a\in(a_1,1)$ 时，$m(a)>0$，$h'(a)>0$，$h(a)$ 在 $(a_1,1)$ 上单调递增，

所以 $h(a)<h(1)=0$，这与题设条件矛盾，所以 $-1<\lambda<0$ 不符合题意.

综上所述，实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,-1]$. ………… 17 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！