2024 北京人大附中高二（上）期末

数　　学

2024 年 1 月 17 日

说明：Ⅰ卷满分 100 分、Ⅱ卷满分 50 分、全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 椭圆 C：$2x^2+y^2=2$ 的焦点坐标为（　）

A. $(-1,0)$，$(1,0)$　　B. $(0,-1)$，$(0,1)$

C. $\left(-\sqrt{3},0\right)$，$\left(\sqrt{3},0\right)$　　D. $\left(0,-\sqrt{3}\right)$，$\left(0,\sqrt{3}\right)$

2. 抛物线 $y^2=x$ 的准线方程是（　）

A. $x=-\dfrac{1}{2}$　　B. $x=-\dfrac{1}{4}$　　C. $y=-\dfrac{1}{2}$　　D. $y=-\dfrac{1}{4}$

3. 直线 $3x+\sqrt{3}y+1=0$ 的倾斜角是（　）

A. $30°$　　B. $60°$　　C. $120°$　　D. $150°$

4. 已知点 P 与 $A(0,2),B(-1,0)$ 共线，则点 P 的坐标可以为（　）

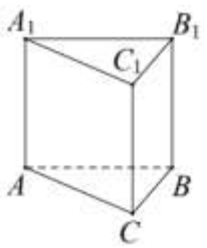
A. $(1,-1)$　　B. $(1,4)$

C. $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$　　D. $(-2,1)$

5. 已知 P 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的动点．$A(-1,0),B(1,0)$，且 $|PA|+|PB|=4$，则 $b^2=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC，则“$CB\perp BB_1$”是“$CB\perp AB$”的（　）



A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $P(-2,3,1)$ 到 x 轴的距离为（　）

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

8. 已知双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$的左右顶点分别为A_1, A_2，右焦点为F，以A_1F为直径作圆，与双曲线C的右支交于两点P, Q．若线段PF的垂直平分线过A_2，则b^2的数值为（　）

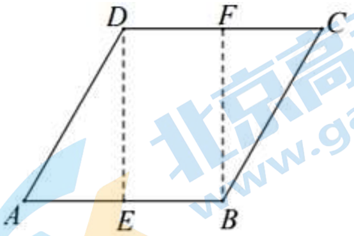
A. 3　　B. 4　　C. 8　　D. 9

9. 设动直线l与$\odot C:(x+1)^2+y^2=5$交于A, B两点．若弦长$|AB|$既存在最大值又存在最小值，则在下列所给的方程中，直线l的方程可以是（　）

A. $x+2y=a$　　B. $ax+y=2a$

C. $ax+y=2$　　D. $x+ay=a$

10. 如图，已知菱形$ABCD$的边长为2，且$\angle A=60°, E, F$分别为棱AB, DC中点．将$\triangle BCF$和$\triangle ADE$分别沿BF, DE折叠，若满足$AC//$平面$DEBF$，则线段AC的取值范围为（　）



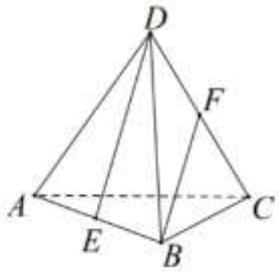
A. $\left[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$　　B. $\left[\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right]$　　C. $\left[2, 2\sqrt{3}\right)$　　D. $\left[2, 2\sqrt{3}\right]$

第二部分（非选择题 共60分）

二、填空题共5小题，每小题4分，共20分．

11. 双曲线$C: x^2-\frac{y^2}{4}=1$的渐近线方程为________．

12. 如图，已知E，F分别为三棱锥$D-ABC$的棱AB, DC的中点，则直线DE与BF的位置关系是__________（填“平行”，“异面”，“相交”）．



13. 经过点$A(0,1)$且与直线$l: x+2y-1=0$垂直的直线方程为______________．

14. 作为我国古代称量粮食的量器，米斗有着吉祥的寓意，是丰饶富足的象征，带有浓郁的民间文化韵味．右图是一件清代老木米斗，可以近似看作正四棱台，测量得其内高为12cm，两个底面内棱长分别为18cm和9cm，则估计该米斗的容积为__________cm^3．

15. 已知四边形 $ABCD$ 是椭圆 $M:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的内接四边形，其对角线 AC 和 BD 交于原点 O，且斜率之积为 $-\dfrac{1}{3}$. 给出下列四个结论：

①四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

②存在四边形 $ABCD$ 是菱形；

③存在四边形 $ABCD$ 使得 $\angle AOD=91^\circ$；

④存在四边形 $ABCD$ 使得 $|AC|^2+|BD|^2=\dfrac{64}{5}$.

其中所有正确结论的序号为__________.

三、解答题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

16. 已知圆 $C:(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与 y 轴相切.

（1）直接写出圆心 C 的坐标及 r 的值；

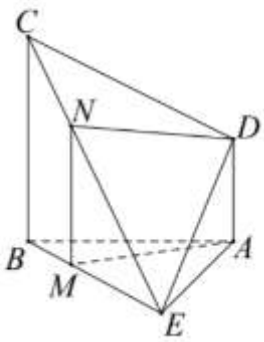
（2）直线 $l:3x-4y-1=0$ 与圆 C 交于两点 A,B，求 $|AB|$.

17. 已知直线 $l:y=kx+1$ 经过抛物线 $C:x^2=2py$ 的焦点 F，且与 C 的两个交点为 P，Q.

（1）求 C 的方程；

（2）将 l 向上平移 5 个单位得到 l'，l' 与 C 交于两点 M，N. 若 $|MN|=24$，求 k 值.

18. 如图，四棱锥 $E-ABCD$ 中，$AE\perp$ 平面 $ABCD, AD\perp AB, AD\parallel BC, AE=AB=BC=2, AD=1$，过 AD 的平面分别与棱 EB,EC 交于点 M，N.



（1）求证：$AD\parallel MN$；

（2）记二面角 $A-DN-E$ 的大小为 θ，求 $\cos\theta$ 的最大值.

19. 已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个顶点分别为 $A(-2,0),B(2,0)$，离心率

$e=\frac{1}{2}, P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$为椭圆上的动点，直线$PA, PB$分别交动直线$x=t$于点$C$，$D$，过点$C$作$PB$的垂线交$x$轴于点$H$.

（1）求椭圆E的方程；

（2）$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}$是否存在最大值？若存在，求出最大值；若不存在，说明理由.

四、选择题（本大题共5小题，每小题5分，共25分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置）

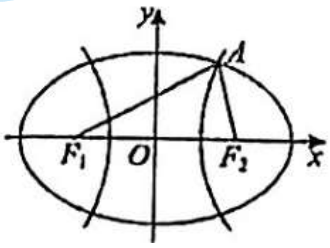
20．已知A，B是平面内两点，且$|AB|=6$，判断当P点满足下列哪个条件时其轨迹不存在（　）

A．$|PA|+|PB|=2024$　B．$|PA|-|PB|=2024$　C．$|PA|\times|PB|=2024$　D．$|PA|+|PB|=2024$

21．当实数$\lambda\neq 0$时，方程$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=\lambda$表示的曲线都是双曲线，当$\lambda$变化时，这些双曲线的焦距、离心率、渐近线中始终不变的有（　）个

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

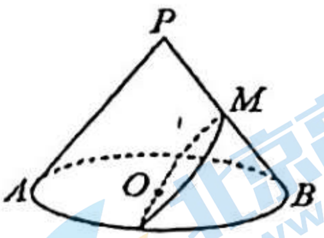
22．如图，F_1,F_2是双曲线$C_1:x^2-\frac{y^2}{8}=1$与椭圆C_2的公共焦点，点A是C_1，C_2在第一象限内的交点，若$|F_1F_2|=|F_1A|$，则下列选项正确的是（　）



A．双曲线C_1的渐近线为$y=\pm 8x$　　B．椭圆C_2的离心率为$\frac{4}{5}$

C．椭圆C_2的方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　　D．$\triangle AF_1F_2$的面积为$8\sqrt{2}$

23．如图所示的圆锥中，高$PO=4$，底面的直径$AB=8$．M为母线PB的中点．若平面α经过OM且垂直于轴截面PAB，根据圆锥曲线的定义，可以证明此时平面α与圆锥侧面的交线为抛物线的一部分，则下面四个结论中错误的是（　）

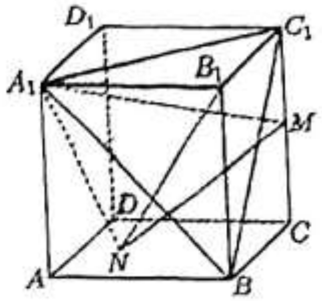


A．M为抛物线的顶点　B．直线OM为抛物线的对称轴

C．O是抛物线的焦点　D．抛物线的焦点到准线的距离为$2\sqrt{2}$

24．如图，在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M是CC_1的中点，点N是底面正方形$ABCD$内

的动点（包括边界），则下列选项正确的是（　）



A．不存在点 N 满足 $\angle A_1NM=\dfrac{\pi}{2}$　　　　B．满足 $|A_1N|=\sqrt{5}$ 的点 N 的轨迹长度是 $\dfrac{\pi}{4}$

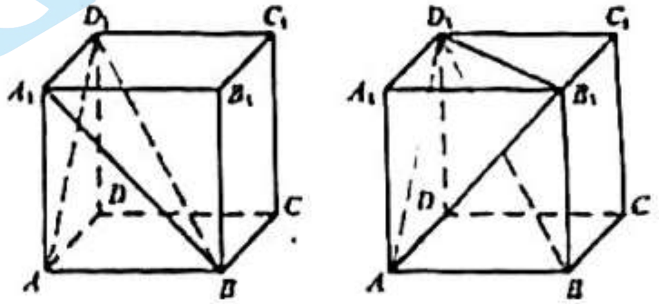
C．满足 MN // 平面 A_1BC_1 的点 N 的轨迹长度是 1　D．满足 $B_1N\perp A_1M$ 的点 M 的轨迹长度是 $\sqrt{2}$

五、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。请把结果填在答题纸上的相应位置）

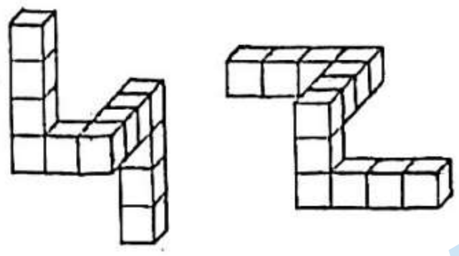
25．已知点 $B(2,0)$ 和点 $C(2,4)$，直角 $\triangle ABC$ 以 BC 为斜边，求直角顶点 A 的轨迹方程__________________。

26．在平面直角坐标系中，过 $(1,1)$ 且斜为 k 的直线 l 的方程为_________，联立该直线 l 方程与椭圆方程 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，消去 y，可以得到关于 x 的一元二次方程为__________________。

27．有下面两组几何体，根据要求填写所有符合条件的序号．



第①组：两个三棱锥分别是左图中的 A_1-ABD_1 和右图中的 B_1-ABD_1．



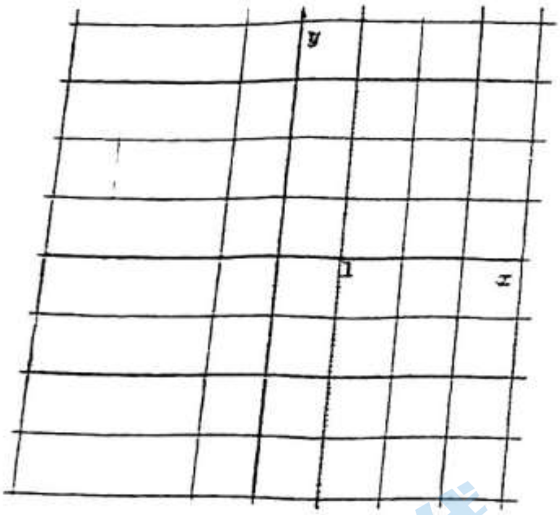
第②组：两个均由棱长为 1 的正方体组成的组合体。

其中，第_________组中的两个几何体的体积相同，第_________组中的两个几何体不同．

（两个几何体相同指的是它们可以通过整体平移或旋转后重合．）

28．已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_1,y_2)$ 满足：$x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=1,x_2^{\ 2}+y_2^2=1,x_1x_2+y_1y_2=-\dfrac{1}{2}$，则代数式 $|3x_1-4y_1|+|3x_2-4y_2|$ 的取值范围是_________。

29．在平面直角坐标兼中画出方程 $x^2\left(x^2-2\right)=\left(y^2+1\right)\left(y^2-1\right)$ 表示的曲线。


y
1
x

参考答案

I 卷

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】B

【分析】

先化为标准方程 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，求得 $a^2=2,b^2=1,c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，判断焦点位置，写焦点坐标.

【详解】因为椭圆 C： $2x^2+y^2=2$，

所以标准方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$，

解得 $a^2=2,b^2=1,c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

因为焦点在 y 轴上，

所以焦点坐标为 $(0,-1)$，$(0,1)$.

故选：B

【点睛】本题主要考查椭圆的几何性质，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

2.【答案】B

【分析】

由抛物线的标准方程及性质，直接求解.

【详解】由抛物线方程 $y^2=x$ 可知 $2p=1$， $p=\dfrac{1}{2}$，

故准线方程为： $x=-\dfrac{p}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

故选：B.

3.【答案】C

【分析】先求解出直线的斜率，然后根据倾斜角与斜率的关系求解出倾斜角的大小.

【详解】因为直线方程为 $3x+\sqrt{3}y+1=0$，所以斜率 $k=-\dfrac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$，

设倾斜角为 θ，所以 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，所以 $\theta=120°$，

故选：C.

4.【答案】B

【分析】三点共线转化为向量共线，利用共线条件逐个判断即可.

【详解】设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y-2),\overrightarrow{AB}=(-1,-2)$，

由 P,A,B 三点共线，则 $\overrightarrow{AP}//\overrightarrow{AB}$，所以 $-2x+(y-2)=0$，

则 $2x-y+2=0$.

选项 A，$2\times1-(-1)+2=5\neq0$，不满足 $2x-y+2=0$，故 A 错误；

选项 B，$2\times1-4+2=0$，满足 $2x-y+2=0$，故 B 正确；

选项 C，$2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-(-1)+2=2\neq0$，不满足 $2x-y+2=0$，故 C 错误；

选项 D，$2\times(-2)-1+2=-3\neq0$，不满足 $2x-y+2=0$，故 D 错误.

故选：B.

5.【答案】C

【分析】根据题意，结合椭圆的定义，得到点 P 的轨迹表示以 A,B 为焦点的椭圆，进而求得 b^2 的值.

【详解】因为 $A(-1,0),B(1,0)$，可得 $|AB|=2$，则 $|PA|+|PB|=4>|AB|=2$，

由椭圆的定义，可得点 P 的轨迹表示以 A,B 为焦点的椭圆，

其中 $2a=4,2c=1$，可得 $a=2,c=1$，所以 $b^2=a^2-c^2=3$，

又因为点 P 在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，所以 $b^2=3$.

故选：C.

6.【答案】B

【分析】由面面垂直的性质定理可证明“$CB\perp BB_1$”是“$CB\perp AB$”的必要条件，由底面为正三角形的直三棱柱模型，可知“$CB\perp BB_1$”不是“$CB\perp AB$”的充分条件.

【详解】①已知侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC，且侧面 $ABB_1A_1\cap$ 底面 $ABC=AB$，

又 $BC\subset$ 平面 ABC，

若 $BC\perp AB$，则由面面垂直的性质定理可得 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，则 $CB\perp BB_1$，

所以则“$CB\perp BB_1$”是“$CB\perp AB$”的必要条件；

②若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，底面 ABC 是正三角形，

则 $BB_1\perp$ 底面 ABC，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，则满足条件侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC.

又 $BC\subset$ 平面 ABC，则 $CB\perp BB_1$，但 BC 与 AB 不垂直.

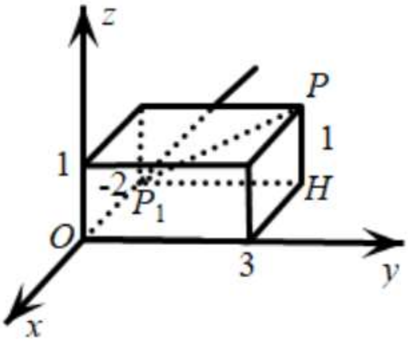
所以“$CB\perp BB_1$”不是“$CB\perp AB$”的充分条件.

综上所述，“$CB\perp BB_1$”是“$CB\perp AB$”的必要不充分条件.

故选：B.

7.【答案】D

【分析】结合空间直角坐标系，数形结合利用勾股定理求解点 $P(-2,3,1)$ 到 x 轴的距离.

【详解】

在空间直角坐标系$O-xyz$中，

过P作$PH\perp$平面xOy，垂足为H，则$PH\perp x$轴，

在坐标平面xOy内，过H作$HP_1\perp x$轴，与x轴交于P_1，

由$P(-2,3,1)$，则$P_1(-2,0,0)$，$H(-2,3,0)$，

由$PH\cap HP_1=H$，$PH\subset$平面PHP_1，$HP_1\subset$平面PHP_1，

则x轴$\perp$平面PHP_1，$PP_1\subset$平面PHP_1，

则x轴$\perp PP_1$，故PP_1即点$P(-2,3,1)$到x轴的距离，

则$PP_1=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

故选：D.

8.【答案】C

【分析】由双曲线方程得$a=1$，结合圆的性质及线段垂直平分线的性质得A_2是A_1F的中点，得到a,c关系求c，进而求出b^2.

【详解】由双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得$a=1$，$A_1(-1,0),A_2(1,0),F(c,0)$，

由题意，点P在以A_1F为直径的圆上，则$A_1P\perp PF$，

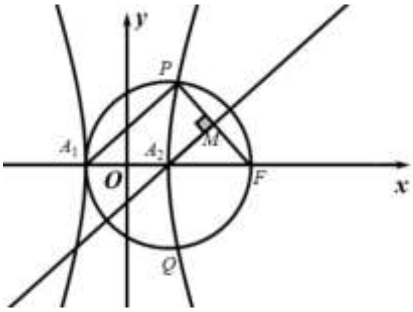
取PF的中点M，由线段PF的垂直平分线过A_2，则$A_2M\perp PF$，

则$A_1P//A_2M$，故A_2是A_1F的中点，$|A_1A_2|=|A_2F|$

且$|A_1A_2|=2a=2,|A_2F|=c-a=c-1$，所以$c-1=2$，解得$c=3$，

故$b^2=c^2-a^2=9-1=8$.

故选：C.



9.【答案】D

【分析】由动直线恒与圆相交得直线过圆内一定点，再验证弦长取最值即可.

【详解】$\odot C:(x+1)^2+y^2=5$，圆心$C(-1,0)$，半径$r=\sqrt{5}$，

选项 A，由直线$x+2y=a$斜率为$-\dfrac{1}{2}$，可得动直线为为平行直线系，

圆心$C(-1,0)$到直线$x+2y-a=0$的距离$d=\dfrac{|-1-a|}{\sqrt{5}}$，

当$a\le -6$或$a\ge 4$时，$d\ge\sqrt{5}$，直线与圆不相交，不满足题意，故 A 错误；

选项 B，由直线$ax+y=2a$可化为$a(x-2)+y=0$，

则直线恒过$(2,0)$，因为$(2+1)^2>5$，点$(2,0)$在圆外，

故直线不一定与圆相交，故 B 错误；

选项 C，由直线$ax+y=2$恒过$(0,2)$，点$(0,2)$在圆上，

当$a=\dfrac{1}{2}$时，直线方程可化为$x+2y-4=0$，

此时圆心$C(-1,0)$到直线$x+2y-4=0$的距离$d=\dfrac{|-1-4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}=r$，

圆与直线相切，不满足题意，故 C 错误；

选项 D，由直线方程$x+ay=a$可化为$x+a(y-1)=0$，

则直线恒过$M(0,1)$，且点M在圆C内，故直线恒与圆C相交，

当直线过圆心C时，弦长最长，由$(-1,0)$在直线$x+a(y-1)=0$上，

可得$a=-1$，$|AB|$取到最大值；

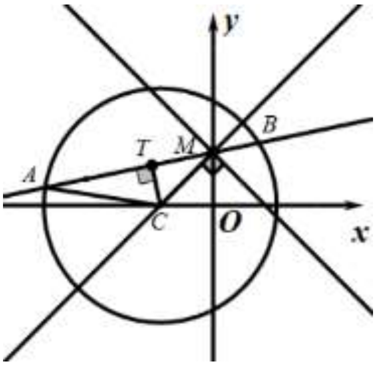
如图，取AB中点T，则$CT\perp AB$，圆心到直线的距离$d=|CT|\le|CM|$

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5-d^2}$，当$d$取最大值$|CM|$时，弦长最短，

即当直线与CM垂直时，弦长最短，由CM的斜率为$k_{CM}=\dfrac{0-1}{-1-0}=1$

此时直线斜率为$k=1=\dfrac{1}{a}$，即当$a=1$时，$|AB|$取到最小值.故 D 正确.

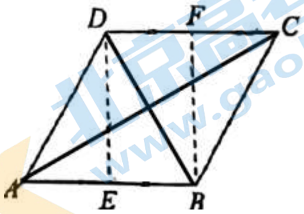
故选：D.



10.【答案】A

【分析】借助空间直观想象，折叠前在平面图形中求出 AC 的长度，折叠过程中证明平面 $EAB//$ 平面 FDC，面面距离即为 AC 的最小值，由此得到 AC 的范围.

【详解】



折叠前，连接 AC, BD.

由题意，在菱形 $ABCD$ 中，$AB = BC = 2$，

$\angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$，

则由余弦定理得，$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC = 4 + 4 - 2\times 2\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 12$，

所以，$AC = 2\sqrt{3}$，故在折叠过程中，$AC \le 2\sqrt{3}$.

折叠后，若 $AC//$ 平面 $DEBF$，

则 $AC \not\subset$ 平面 $DEBF$，则 $AC < 2\sqrt{3}$，故 BD 项错误；

折叠前，在菱形 $ABCD$ 中，$BA = BD = 2$，$\angle DAB = 60^\circ$，

则 $\triangle ABD$ 是正三角形，

由 E, F 分别为棱 AB, DC 中点，

则 $DE \perp AB, BF \perp DC, AB//DC$，所以 $DE//BF$.

折叠后，$DE \perp AE, DE \perp EB, AE \cap EB = E$，

又 $AE \subset$ 平面 EAB，且 $EB \subset$ 平面 EAB，

则 $DE \perp$ 平面 EAB，同理 $BF \perp$ 平面 FDC，所以平面 $EAB//$ 平面 FDC，

则平面 EAB 与平面 FDC 的距离即为 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}\times 2 = \sqrt{3}$，

由点 $A \in$ 平面 EAB，点 $C \in$ 平面 FDC，则 $AC \ge \sqrt{3}$.

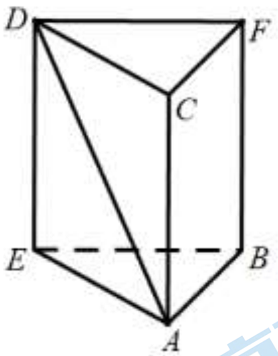
在折叠过程中，当 $\angle DFC=\angle AEB=60^\circ$ 时，由 $AE=EB, DF=FC$，

则 $\triangle EBA, \triangle DFC$ 均为正三角形，可构成如图所示的正三棱柱 $DFC-EBA$，

满足 $AC//$ 平面 $DEBF$，此时 $AC=DE=\sqrt{3}$.

所以 AC 最小值为 $\sqrt{3}$，故 A 正确，C 项错误.

故选：A.



第二部分（非选择题 共 60 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11. 【答案】$y=\pm 2x$

【分析】利用双曲线的性质即可求得渐近线方程.

【详解】由双曲线的相关知识可知：$a=1$，$b=2$

所以焦点在 x 轴双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 2x$

故答案为：$y=\pm 2x$

12. 【答案】异面

【分析】假设共面推出矛盾.

【详解】假设直线 DE, BF 共面，$EB\subset$ 平面 $DEBF$，

由 $A\in EB$，则 $AB\subset$ 平面 $DEBF$，

同理，$DC\subset$ 平面 $DEBF$，故 AB, CD 共面，

这与 $D-ABC$ 是三棱锥矛盾，故假设错误，故直线 DE, BF 异面.

故答案为：异面.

13. 【答案】$2x-y+1=0$

【分析】求出所求直线的斜率，利用点斜式方程可得出所求直线的方程.

【详解】直线 $l: x+2y-1=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

则与直线 $l: x+2y-1=0$ 垂直的直线的斜率为 2，

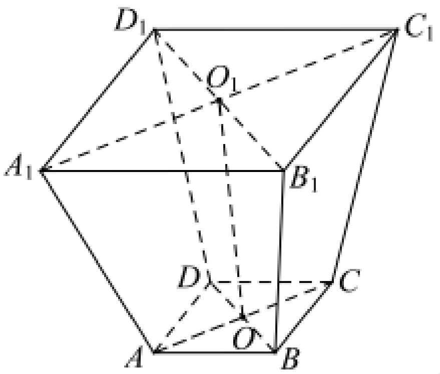
则直线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$.

故答案为：$2x-y+1=0$

14.【答案】2268

【分析】先画出正四棱台的直观图，再利用台体的体积公式即可求解.

【详解】根据题意，正四棱台的直观图如下：



由题意可知，高 $OO_1=h=12\text{cm}$，

下底面正方形的变长 $AB=9\text{cm}$，其面积 $S_1=9\times9=81\left(\text{cm}^2\right)$，

上底面正方形的变长 $AB=18\text{cm}$，其面积 $S_2=18\times18=324\left(\text{cm}^2\right)$，

由台体的体积公式可得，该正四面体的体积：

$$V=\frac{1}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)h=\frac{1}{3}\times\left(81+\sqrt{81\times324}+324\right)\times12=2268\left(\text{cm}^3\right).$$

故该米斗的容积为 2268cm^3.

故答案为：2268.

15.【答案】①③④

【分析】利用椭圆的对称性判断①；利用菱形的对角线互相垂直可判断②；利用正切函数的和差公式与性质判断③；利用斜率关系得到 $|OA|^2+|OB|^2$ 的表达式，然后利用基本不等式求 $|AC|^2+|BD|^2$ 的最大值，可判断④.

【详解】因为四边形 $ABCD$ 是椭圆 $M:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的内接四边形，AC 和 BD 交于原点 O，

由椭圆的对称性可知 $|OA|=|OC|$ 且 $|OB|=|OD|$，

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，故①正确；

假设对角线 AC 和 BD 的斜率分别为 k_1,k_2，

若四边形 $ABCD$ 是菱形，则其对角线互相垂直，即 $k_1\cdot k_2=-1$，

而这与 $k_1\cdot k_2=-\frac{1}{3}$ 矛盾，所以不存在四边形 $ABCD$ 是菱形，故②错误；

不妨设直线 AC 的倾斜角为 α，直线 BD 的倾斜角为 β，且 $\alpha>\beta$，

则 $\tan\alpha=k_1,\tan\beta=k_2>0$，又 $k_1\cdot k_2=-\frac{1}{3}$，则 $k_1=-\frac{1}{3k_2}$，

则 $\tan\angle AOD=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{3k_2}-k_2\right)$

$\le -\dfrac{3}{2}\times 2\sqrt{\dfrac{1}{3k_2}\cdot k_2}=-\sqrt{3}=\tan 120^\circ$，

又 $0^\circ<\angle AOD<180^\circ$，则 $90^\circ<\angle AOD<120^\circ$，

所以存在四边形 $ABCD$ 使得 $\angle AOD=91^\circ$，故③正确；

直线 AC 的方程 $y=k_1x$，直线 BD 的方程 $y=k_2x$，

由 $\begin{cases} y=k_1x \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得 $x^2+2(k_1x)^2=2$，即 $x^2=\dfrac{2}{2k_1^2+1}$，可得 $x_A^2=x_C^2=\dfrac{2}{2k_1^2+1}$，

同理可得 $x_B^2=x_D^2=\dfrac{2}{2k_2^2+1}$，

则 $|OA|^2+|OB|^2=\dfrac{2(k_1^2+1)}{2k_1^2+1}+\dfrac{2(k_2^2+1)}{2k_2^2+1}=2+\dfrac{1}{2k_1^2+1}+\dfrac{1}{2k_2^2+1}$，

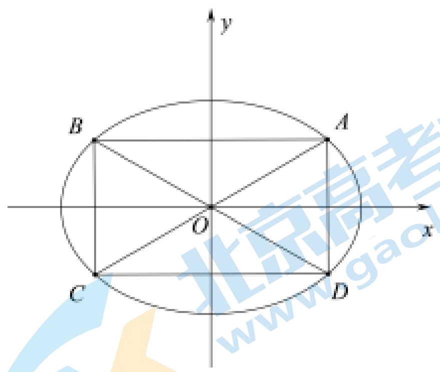
由 $k_1\cdot k_2=-\dfrac{1}{3}$，得 $k_2^2=\dfrac{1}{9k_1^2}$，令 $k_1^2=t,k_2^2=\dfrac{1}{9t}(t>0)$，

则 $|OA|^2+|OB|^2=2+\dfrac{1}{2t+1}+\dfrac{1}{\dfrac{2}{9t}+1}=2+\dfrac{1}{2t+1}+\dfrac{9t}{9t+2}$

$=3+\dfrac{1}{2t+1}+\dfrac{-2}{9t+2}=3+\dfrac{9t+2-2(2t+1)}{(2t+1)(9t+2)}$

$=3+\dfrac{5t}{18t^2+13t+2}=3+\dfrac{5}{18t+\dfrac{2}{t}+13}\le 3+\dfrac{5}{2\sqrt{18t\cdot\dfrac{2}{t}}+13}=3+\dfrac{1}{5}=\dfrac{16}{5}$，

当且仅当 $18t=\dfrac{2}{t}$，即 $t=\dfrac{1}{3},k_1^2=k_2^2=\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立；



于是 $|AC|^2+|BD|^2=(2|OA|)^2+(2|OB|)^2=4(|OA|^2+|OB|^2)\le\dfrac{64}{5}$，

当且仅当 $k_1^2=k_2^2=\frac{1}{3}$，即四边形 $ABCD$ 矩形时，等号成立，

所以存在四边形 $ABCD$ 使得 $|AC|^2+|BD|^2=\frac{64}{5}$，故④正确.

故答案为：①③④.

【点睛】关键点睛：本题结论④的解决关键是利用弦长公式得到 $|AC|^2+|BD|^2$ 关于 t 的表达式，从而利用基本不等式即可得解.

三、解答题共 4 小题，共 40 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）圆心 $C(2,0)$，$r=2$

（2）$2\sqrt{3}$

【分析】（1）由圆的方程得圆心坐标，结合图形，圆与 y 轴相切得半径；

（2）法一由弦长公式求解；法二利用几何法勾股定理求解.

【小问 1 详解】

圆 $C:(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$，

则圆心 $C(2,0)$，因为圆 $C:(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与 y 轴相切，则半径 $r=2$.

【小问 2 详解】

由（1）知，圆的方程为 $C:(x-2)^2+y^2=4$，圆心 $C(2,0)$，半径为 2.

法一：设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立 $\begin{cases}3x-4y-1=0\\ \left(x-2\right)^2+y^2=4\end{cases}$，得 $25x^2-70x+1=0$，

$\Delta=(-70)^2-4\times25=4800>0$，

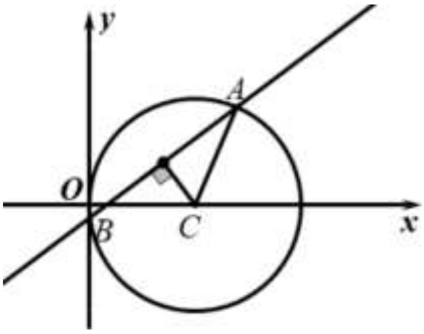
则 $x_1+x_2=\frac{14}{5},x_1x_2=\frac{1}{25}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}\,|x_1-x_2|=\frac{5}{4}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{5}{4}\sqrt{\left(\frac{14}{5}\right)^2-\frac{4}{25}}=2\sqrt{3}$；

法二：圆心 $C(2,0)$ 到直线 $l:3x-4y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|2\times3-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1<2$，

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

故 $|AB|=2\sqrt{3}$.



17.【答案】（1） $x^2=4y$

（2） $k=\pm\sqrt{3}$

【分析】（1）由直线 l 与 y 轴交点得焦点 F ，待定 p 可得方程；

（2）联立直线 l' 与抛物线 C 的方程，由已知弦长利用弦长公式建立关于 k 的方程，求解可得.

【小问 1 详解】

抛物线 $C:x^2=2py$ 的焦点 F 在 y 轴上，

直线 $l:y=kx+1$，令 $x=0$，得 $y=1$，则焦点 $F(1,0)$，

所以 $\frac{p}{2}=1$，即 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$；

【小问 2 详解】

直线 $l:y=kx+1$ 向上平移 5 个单位得到 $l':y=kx+6$，

由 $\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+6\end{cases}$，消 y 得 $x^2-4kx-24=0$，

设直线 l' 与 C 交于两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $\Delta=16k^2+96>0$，且 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-24$，

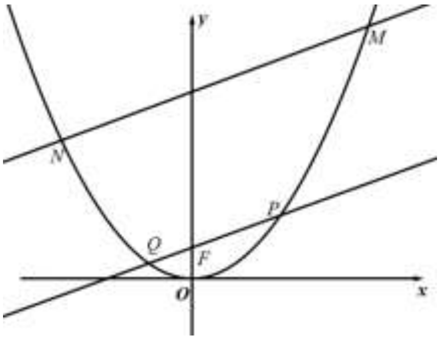
$$|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(4k)^2-4\times(-24)}=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+6},$$

由 $|MN|=24$，化简整理得 $k^4+7k^2-30=0$，

解得 $k^2=-10$（舍）或 $k^2=3$，

所以 $k=\pm\sqrt{3}$.



18.【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【分析】（1）由线面平行判定定理与性质定理可证；

（2）建立空间直角坐标系，设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BE},\lambda\in[0,1]$，利用法向量方法，用 λ 表示两平面法向量夹角的余弦，再由向量夹角与二面角大小关系求 $\cos\theta$ 最大值.

【小问 1 详解】

因为 $AD//BC$， $AD\not\subset$ 平面 BCE， $BC\subset$ 平面 BCE，

所以 $AD//$ 平面 BCE .

因为过 AD 的平面分别与棱 EB,EC 交于 M,N，

所以 $AD//MN$；

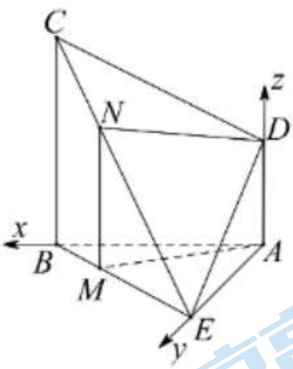
【小问 2 详解】

因为 $AE\perp$ 平面 $ABCD$， $AB\subset$ 平面 $ABCD$， $AD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $AE\perp AB, AE\perp AD$，

又因为 $AB\perp AD$，

如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，



则 $B(2,0,0),C(2,0,2),E(0,2,0),D(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{ED}=(0,-2,1),\overrightarrow{EC}=(2,-2,2),\overrightarrow{BE}=(-2,2,0),\overrightarrow{AD}=(0,0,1)$，

设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BE},\lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=(2,0,0)+\lambda(-2,2,0)=(2-2\lambda,2\lambda,0)$，

设平面 AND 即平面 $AMND$ 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=(2-2\lambda)x_1+2\lambda y_1=0\end{cases}$，令 $x=\lambda$，则 $y=\lambda-1$，

于是 $\vec{m}=(\lambda,\lambda-1,0)$；

设平面 END 即平面 ECD 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{ED}=-2y_2+z_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EC}=2x_2-2y_2+2z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=1$，则 $z_2=2,x_2=-1$，

于是 $\vec{n}=(-1,1,2)$，

所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}}$，

因为 $\lambda\in[0,1]$，所以 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right]$，

由二面角 $A-DN-E$ 的大小为 θ，

根据 $\vec{m}=(\lambda,\lambda-1,0),\vec{n}=(-1,1,2)$ 的方向判断可得 $\theta=\pi-\langle\vec{m},\vec{n}\rangle$，

所以，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\cos\theta$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

19.【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）存在；12

【分析】（1）由离心率及顶点坐标结合 $b^2+c^2=a^2$ 即可求解；

（2）结合两点式得直线 PA,PB 方程，进而得到点 C,D 坐标，由直线 CH 与直线 PB 垂直得到直线 CH 的斜率，结合点斜式得直线 CH 的方程，进而的到点 H 坐标，结合数量积的坐标运算及二次函数的最值即可求解.

【小问 1 详解】

由 $e=\dfrac{1}{2}=\dfrac{c}{a}$，又两个顶点分别为 $A(-2,0),B(2,0)$，

则 $a=2,c=1$，$b^2=a^2-c^2=3$，

故椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

【小问 2 详解】

$P\left(x_0,y_0\right)\left(y_0\neq 0\right)$为椭圆上的动点，则$x_0\neq\pm 2$，故直线$PA,PB$的斜率存在且不为0，

则直线PA：$\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{x+2}{x_0+2}$，即$y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，则点$\boldsymbol{C(t,\dfrac{y_0}{x_0+2}(t+2))}$，

则直线PB：$\dfrac{y}{y_0}=\dfrac{x-2}{x_0-2}$，即$y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，则点$\boldsymbol{D(t,\dfrac{y_0}{x_0-2}(t-2))}$，

则直线CH的斜率为$\boldsymbol{\dfrac{2-x_0}{y_0}}$，故直线$CH$：$\boldsymbol{y-\dfrac{y_0}{x_0+2}(t+2)=\dfrac{2-x_0}{y_0}(x-t)}$，

令$y=0$，得$\boldsymbol{x_H=t+\dfrac{(t+2)y_0^2}{x_0^2-4}}$，

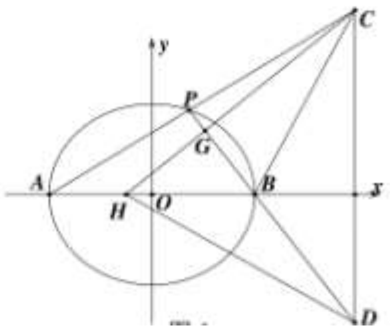
又$P\left(x_0,y_0\right)$在椭圆上，则$\boldsymbol{\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0{}^2}{3}=1}$，整理得$y_0^2=\dfrac{3\left(4-x_0^2\right)}{4}$，

所以$\boldsymbol{x_H=t-\dfrac{3}{4}(t+2)=\dfrac{t-6}{4}}$，则$H\left(\dfrac{t-6}{4},0\right)$，

所以$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}=\left(\dfrac{3t+6}{4},\dfrac{(t+2)y_0}{x_0+2}\right)\cdot\left(\dfrac{3t+6}{4},\dfrac{(t-2)y_0}{x_0-2}\right)=\dfrac{(3t+6)^2}{16}+\dfrac{\left(t^2-4\right)y_0{}^2}{x_0{}^2-4}$

$=\dfrac{(3t+6)^2}{16}-\dfrac{3\left(t^2-4\right)}{4}=-\dfrac{3(t-6)^2}{16}+12$

综上，存在$t=6$，使得$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}$有最大值$12$.



【点睛】按题意结合两点式，点斜式求得点坐标，结合数量积运算及二次函数的最值即可求，思路相对明确，运算要细心，是中档题.

Ⅱ卷

一、选择题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

20．B　21．B　22．D　23．C　24．D

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

25．$(x-2)^2+(y-2)^2=4(x\neq 2)$（没有限制条件得 3 分，其他情况 0 分）

26．$y=k(x-1)+1$（第一空 3 分）

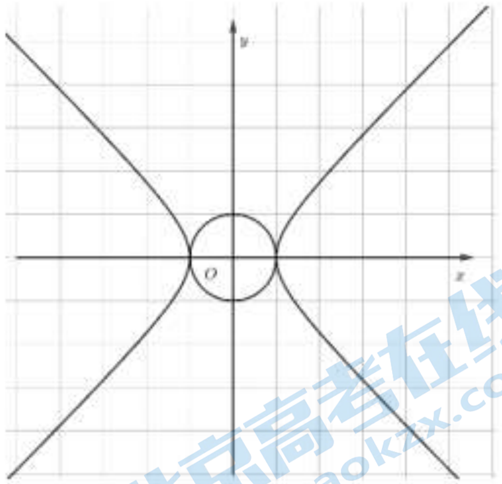
$\left(4k^2+1\right)x^2+\left(-8k^2+8k\right)x+4k^2-8k=0$（第二空 2 分，不按降幂排列正确也得分）

27．①②　①②　（第一空 3 分，第二空 2 分，两空没写全均只得 1 分）

28. $\left[\frac{5\sqrt{3}}{2},5\sqrt{3}\right]$（按得分点判，出现 1 个正确端点得 2 分，两个端点均正确的前提下开闭 1 分）

29.

评分标准：



按画出图形中正确的部分图形判：

单位圆 2 分，等轴双曲线 2 分，双曲线的渐近线 1 分得分示例：

正确画出单位圆和等轴双曲线包括其渐近线，得 5 分；

正确画出单位圆和等轴双曲线，没画渐近线，得 4 分：

画出的图形中包含了单位圆，但出现其他错误图形，得 2 分；

画出的图形中包含了等轴双曲线，但出现了其他错误图形，得 2 分…