绝密启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　考试类型：A

2024届高三年级摸底考试

数学

本试卷共4页，22小题，满分150分，考试用时120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型和考生号填涂在答题卡相应位置上。
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应的题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再填涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知$U=\mathbf{R},A=\{x|-1<x<3\},B=\{x|\ x\le 2\}$，则$\complement_U(A\cup B)=$

A. $[3,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

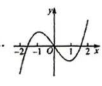
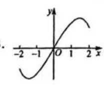
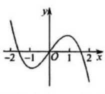
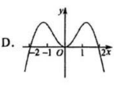
2.已知复数z满足$(z+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，则$z$的共轭复数$\overline{z}=$

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$　　C. $-2+\mathrm{i}$　　D. $-2-\mathrm{i}$

3. 已知曲线$y=ax\mathrm{e}^x+\ln x$在点$(1,a\mathrm{e})$处的切线方程为$y=3x+b$，则

A. $a=\mathrm{e},b=-2$　　B. $a=\mathrm{e},b=2$　　C. $a=\mathrm{e}^{-1},b=-2$　　D. $a=\mathrm{e}^{-1},b=2$

4. 函数$y=(2^x-2^{-x})\cos x$在区间$[-2,2]$上的图象大致为

A. 
B. 
C. 
D. 

5.为丰富同学们的暑假生活，暑假期间学校给同学们安排了6场线上讲座，其中讲座A只能安排在第一或最后一场，讲座B和C必须相邻，问不同的安排方法共有

A. 144种　　B. 96种　　C. 56种　　D. 34种

6. 现随机安排甲、乙等4位同学参加校运会跳高、跳远、投铅球比赛，要求每位同学参加一项比赛，每项比赛至少一位同学参加，事件A="甲参加跳高比赛"，事件B="乙参加跳高比赛"，事件C="乙参加跳远比赛"，则

A. 事件A与B相互独立　　B. 事件A与C为互斥事件　　C. $P(B|A)=\frac{1}{9}$　　D. $P(C|A)=\frac{5}{12}$

7. F_1,F_2分别是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，直线$l$为双曲线$C$的一条渐近线，$F_1$关于直线$l$的对称点为$F_1'$，且$F_1'$在以$F_2$为圆心、$b$为半径的圆上，则双曲线$C$的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

8. 符号$[x]$表示不超过实数x的最大整数，如$[2.3]=2$，$[-1.9]=-2$.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=5$，$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$.若$b_n=[\log_2 a_{n+1}]$，S_n为数列$\left\{\frac{8100}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和，则$[S_{2025}]=$

A. 2023　　B. 2024　　C. 2025　　D. 2026

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$，则下列结论正确的是

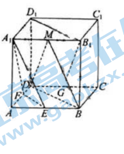
A. $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$　　B. $\tan\theta=\frac{4}{3}$　　C. $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$　　D. $\cos 2\theta=\frac{24}{25}$

10.若$a,b,c\in\mathbf{R}$，则下列命题正确的是

A. 若$ab\ne 0$且$a<b$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. 若$0<a<1$，则$a^2<a$

C. 若$b>a>0$且$c>0$，则$\frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}$　　D. $a^2+b^2+1\ge 2(a-2b-2)$

11.如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F,G,M均是所在棱的中点，则下列说法正确的是



A. B_1G // DM　　B. B_1G // 平面A_1EF

C. 平面BDM // 平面A_1EF　　D. B_1G // A_1F

12.已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$满足$xf'(x)-f(x)=x^2(\ln x+1)$，且$f(1)=0$，则

A. $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增　　B. $f(x)$在$(\frac{1}{2},1)$上有极小值

C. $\frac{f(x)}{x}$的最小值为-1　　D. $f(x)$的最小值为0

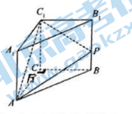
二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分，把答案填在答题卡相应横线上。

13. $(3x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^8$的展开式中，$x^{-2}$项的系数为________.

14. 如果平面向量$\boldsymbol{a}=(1,-2),\boldsymbol{b}=(-6,3)$,那么向量$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影向量为________.

15. 已知正数a,b满足$a=b^2,\log_b a=\frac{a}{b}$，则函数$f(x)=\sqrt{\frac{1}{b}-\log_a x}$的定义域为________.

16. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，$AC=\sqrt{7}$，$BC=3$，点P在棱BB_1上，且$PA\perp PC_1$，当$\triangle APC_1$的面积取最小值时，三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为________.



三、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(本小题满分10分) 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$\tan B=\sqrt{3},\cos C=\frac{1}{3}$，且$b=3\sqrt{6}$.

（1）求$\cos A$的值；

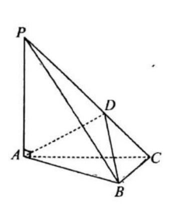
（2）求$\triangle ABC$的面积.

18.(本小题满分12分)已知数列$\{a_n\}$各项都不为0，前n项和为S_n，且$3a_n-2=S_n$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=-1$，$b_{n+1}=b_n+n$.

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）令$c_n=\frac{2a_nb_n}{n+1}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

19.(本小题满分12分)某研究机构为了解某地年轻人的阅读情况，通过随机抽样调查了100位年轻人，对这些人每天的阅读时间（单位：分钟）进行统计，得到样本的频率分布直方图，如图所示.



（1）根据频率分布直方图，估计这100位年轻人每天阅读时间的平均数$\overline{x}$（单位：分钟）(同一组数据用该组数据区间的中点值表示)；

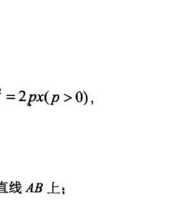
（2）若年轻人每天阅读时间X近似地服从正态分布$N(\mu,100)$，其中μ近似为样本平均数$\overline{x}$，求$P(64<X\le 94)$；

（3）为了进一步了解年轻人的阅读方式，研究机构采用分层抽样的方法从每天阅读时间位于分组$[50,60)$，$[60,70)$，$[80,90)$的年轻人中抽取10人，再从中任选3人进行调查，求抽到每天阅读时间位于$[80,90)$的人数ξ的分布列和数学期望.

参考数据：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则①$P(\mu-\delta<X\le\mu+\delta)=0.6827$；

②$P(\mu-2\delta<X\le\mu+2\delta)=0.9545$；③$P(\mu-3\delta<X\le\mu+3\delta)=0.9973$.

20.(本小题满分12分)如图所示，在三棱锥$P-ABC$中，已知$PA\perp$平面ABC，平面$PAB\perp$平面PBC.



（1）证明：$BC\perp$平面PAB；

（2）若$PA=AB=6$，$BC=3$，在线段PC上（不含端点），是否存在点D，使得二面角$B-AD-C$的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$？若存在，则确定D的位置；若不存在，则说明理由.

21.(本小题满分12分)已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-2ax$，实数a为常数.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）当$a=1$时，求函数$g(x)=f(x)-\cos x$在$(-\frac{\pi}{2},+\infty)$上的零点个数.

22.(本小题满分12分)已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,抛物线$C_2:(y-m)^2=2px(p>0)$，且$C_1,C_2$的公共弦$AB$过椭圆$C_1$的右焦点：

（1）当$AB\perp x$轴时,求m,p的值，并判断抛物线C_2的焦点是否在直线AB上；

（2）求m,p的值，使得抛物线C_2的焦点恰在直线AB上.

2024 届高三年级摸底考试数学参考答案

选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	B	C	C	B	D	D	B	ABC	BD	ABC	AB

填空题

13． 252　　14. $(-\frac{7}{5},\frac{14}{5})$　　15. $(0,2]$　　16． 28π

17.(本小题满分 10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知

$\tan B=\sqrt{3},\cos C=\frac{1}{3}$，且 $b=3\sqrt{6}$.（1）求 $\cos A$ 的值；（2）求 $\triangle ABC$ 的面积；

解: (1)$\because \tan B=\sqrt{3},0<B<\pi,\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

$\because \cos C=\frac{1}{3},0<B<\pi,\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.,

$\therefore \cos A=-\cos(B+C)=-\cos(\frac{\pi}{3}+C)=-(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

2.由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{3\sqrt{6}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8$.

$\because \sin A=\sin(B+C)=\sin(\frac{\pi}{3}+C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 8\times 3\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}=6\sqrt{2}+8\sqrt{3}$.

18. (本小题满分 12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 各项都不为 0，前 n 项和为 S_n，且 $3a_n-2=S_n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-1$，$b_{n+1}=b_n+n$.　（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；（2）令

$c_n=\frac{2a_nb_n}{n+1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n.

解:(1) 由 $3a_n-2=S_n$，可得 $3a_{n-1}-2=S_{n-1}(n\geq 2)$，两式相减得 $3a_n-3a_{n-1}=S_n-S_{n-1}=a_n$，整理得 $a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}$，因为数列 $\{a_n\}$ 各项都不为0，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为公比的等比数列.

令 $n=1$，则 $3a_1-2=S_1=a_1$，解得 $a_1=1$，故 $a_n=(\frac{3}{2})^{n-1}$.

由题知 $b_{n+1}-b_n=n$，所以 $b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)+b_1$

$$=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1-1=\frac{n^2-n-2}{2}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

(2)由（1）得 $c_n=\frac{2a_nb_n}{n+1}=(n-2)(\frac{3}{2})^{n-1}$，

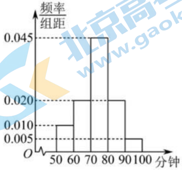
所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=(-1)(\frac{3}{2})^0+0\times(\frac{3}{2})^1+\cdots+(n-2)(\frac{3}{2})^{n-1}$，

$\frac{3}{2}T_n=(-1)(\frac{3}{2})^1+0\times(\frac{3}{2})^2+\cdots+(n-2)(\frac{3}{2})^n$，

两式相减得 $-\frac{1}{2}T_n=(-1)+\dfrac{\frac{3}{2}[1-(\frac{3}{2})^{n-1}]}{1-\frac{3}{2}}-(n-2)\times(\frac{3}{2})^n=-4+(6-\frac{3}{2}n)\times(\frac{3}{2})^{n-1}$，

所以 $T_n=(2n-8)(\frac{3}{2})^n+8$.

19.(本小题满分 12 分)某研究机构为了解某地年轻人的阅读情况,通过随机抽样调查了100位年轻人，对这些人每天的阅读时间（单位：分钟）进行统计，得到样本的频率分布直方图，如图所示.



（1）根据频率分布直方图，估计这100位年轻人每天阅读时间的平均数 $\overline{x}$（单位：分钟）；（同一组数据用该组数据区间的中点值表示）

（2）若年轻人每天阅读时间 X 近似地服从正态分布 $N(\mu,100)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$，求 $P(64<X\leq 94)$；

（3）为了进一步了解年轻人的阅读方式，研究机构采用分层抽样的方法从每天阅读时间位于分组 $[50,60)$，$[60,70)$，$[80,90)$ 的年轻人中抽取 10 人，再从中任选 3 人进行调查，求

抽到每天阅读时间位于$[80,90)$的人数ξ的分布列和数学期望.

参考数据：若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则① $P(\mu-\delta<X\le\mu+\delta)=0.6827$；

② $P(\mu-2\delta<X\le\mu+2\delta)=0.9545$；③ $P(\mu-3\delta<X\le\mu+3\delta)=0.9973$.

解: (1)根据频率分布直方图得:

$\overline{x}=(55\times0.01+65\times0.02+75\times0.045+85\times0.02+95\times0.005)\times10=74$.

(2)由题意知$X\sim N(74,100)$，即$\mu=74,\sigma=10$，

所以$P(64<X\le94)=P(\mu-\delta<X\le\mu+2\delta)=\dfrac{0.6827+0.9545}{2}=0.8186$.

(3)由题意可知$[50,60)$，$[60,70)$和$[80,90)$的频率之比为：$1:2:2$，

故抽取的10人中$[50,60)$，$[60,70)$和$[80,90)$分别为：2人，4人，4人，

随机变量ξ的取值可以为$0,1,2,3$，

$P(\xi=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(\xi=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，故$\xi$的分布列为:

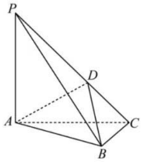
ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

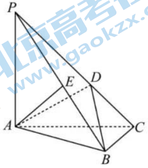
所以$E(\xi)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$.

20. (本小题满分12分)如图所示，在三棱锥$P-ABC$中，已知$PA\perp$平面ABC，平面$PAB\perp$平面PBC.

（1）证明：$BC\perp$平面PAB；

（2）若$PA=AB=6$，$BC=3$，在线段PC上（不含端点），是否存在点D，使得二面角$B-AD-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，若存在，确定点D的位置；若不存在，说明理由.





解: (1)证明: 过点 A 作 $AE\perp PB$ 于点 E，因为平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，且平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，$AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp$ 平面 PBC，

又 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp BC$，又 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $PA\perp BC$，

又因为 $AE\cap PA=A$，AE，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB.

(2)假设在线段 PC 上（不含端点），存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

以 B 为原点，分别以 $\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BA}$ 为 x 轴，y 轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系，

则 $A(0,6,0)$，$B(0,0,0)$，$C(3,0,0)$，$P(0,6,6)$，

$\overrightarrow{AC}=(3,-6,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,6)$，$\overrightarrow{PC}=(3,-6,-6)$，$\overrightarrow{BA}=(0,6,0)$，

设平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3x-6y=0,\\ 6z=0,\end{cases}$ 取 $x=2$，$y=1$，$z=0$，

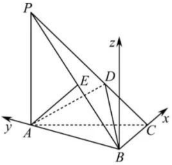
所以 $\vec{m}=(2,1,0)$ 为平面 ACD 的一个法向量，

因为 D 在线段 PC 上（不含端点），所以

可设 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PC}=(3\lambda,-6\lambda,-6\lambda)$，$0<\lambda<1$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}=(3\lambda,-6\lambda,6-6\lambda)$，

设平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，



$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6y=0,\\ 3\lambda x-6\lambda y+(6-6\lambda)z=0,\end{cases}$

取 $x=2\lambda-2$，$y=0$，$z=\lambda$，所以 $\vec{n}=(2\lambda-2,0,\lambda)$ 为平面 ABD 的一个法向量，

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{2\times(2\lambda-2)+1\times0+0\times\lambda}{\sqrt{5}\times\sqrt{(2\lambda-2)^2+\lambda^2}}$， 又 $0<\lambda<1$， 由 已 知 可 得

$$\frac{2\times(2\lambda-2)}{\sqrt{5}\times\sqrt{(2\lambda-2)^2+\lambda^2}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$$

解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$（舍去），所以，存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

此时 D 是 PC 上靠近 C 的三等分点.

21.（本小题满分 12 分）已知函数 $f(x)=e^x-2ax$，实数 a 为常数.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a=1$ 时，求函数 $g(x)=f(x)-\cos x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},+\infty)$ 上的零点个数.

解：(1)$\because f(x)=e^x-2ax$，$\therefore f'(x)=e^x-2a$，

①当 $a\le0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln(2a)$，故 $x\in(-\infty,\ln(2a))$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x\in(\ln(2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上，当 $a\le0$ 时，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(2a))$ 单调递减，在 $(\ln(2a),+\infty)$ 单调递增.

(2)由已知得 $g(x)=e^x-2x-\cos x$，$x\in(-\dfrac{\pi}{2},+\infty)$，则 $g'(x)=e^x+\sin x-2$.

①当 $x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 时，因为 $g'(x)=(e^x-1)+(\sin x-1)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 上单调递减. 所以 $g(x)>g(0)=0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 上无零点.

②当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，因为 $g'(x)$ 单调递增，且 $g'(0)=-1<0$，$g'(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-1>0$，

所以存在 $x_0\in(-\frac{\pi}{2},0)$，使 $g'(x_0)=0$．当 $x\in[0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\frac{\pi}{2}]$ 时，

$g'(x)>0$．

所以 $g(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，且 $g(0)=0$．

所以 $g(x_0)<0$．设 $h(x)=e^x-2x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $h'(x)=e^x-2$．

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln 2$．所以 $h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增．

所以 $h(x)_{\min}=h(\ln 2)=2-2\ln 2>0$．所以 $h(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$．所以 $g(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}-\pi>0$．

所以 $g(x_0)\cdot g(\frac{\pi}{2})<0$．所以 $g(x)$ 在 $(x_0,\frac{\pi}{2})$ 上存在一个零点．所以 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 有 2 个零点．

③当 $x\in(\frac{\pi}{2},+\infty)$ 时，$g'(x)=e^x+\sin x-2>e^{\frac{\pi}{2}}-3>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上单调递增．因为 $g(\frac{\pi}{2})>0$，所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上无零点．

综上所述，$g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上的零点个数为 2．

21. (本小题满分 12 分)已知椭圆 C_1: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,抛物线 C_2: $(y-m)^2=2px(p>0)$，

且 C_1,C_2 的公共弦 AB 过椭圆 C_1 的右焦点.

(1)当 $AB\perp x$ 轴时,求 m , p 的值，并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上；

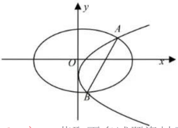
(2)求 m , p 的值，使得抛物线 C_2 的焦点在直线 AB 上.

解: (1)当 $AB\perp x$ 轴时，点 A、B 关于 x 轴对称，所以 $m=0$，直线 AB 的方程为:

$x=1$，从而点 A 的坐标为 $(1,\frac{3}{2})$ 或 $(1,-\frac{3}{2})$．因为点 A 在抛物线上，所以 $\frac{9}{4}=2p$，即 $p=\frac{9}{8}$.

此时 C_2 的焦点坐标为 $(\frac{9}{16},0)$，该焦点不在直线 AB 上.

(2)解法一:由（1）知直线 AB 的斜率存在，



故可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$ ①

设 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，

则 x_1,x_2 是方程①的两根，$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$.

由 $\begin{cases} (y-m)^2=2px \\ y=k(x-1) \end{cases}$ 消去 y 得 $(kx-k-m)^2=2px$. ②

因为 C_2 的焦点 $F'(\dfrac{p}{2},m)$ 在直线 $y=k(x-1)$ 上，

所以 $m=k(\dfrac{p}{2}-1)$，即 $m+k=\dfrac{kp}{2}$.代入②有 $(kx-\dfrac{kp}{2})^2=2px$.

即 $k^2x^2-p(k^2+2)x+\dfrac{k^2p^2}{4}=0$. ③

由于 x_1,x_2 也是方程③的两根，所以 $x_1+x_2=\dfrac{p(k^2+2)}{k^2}$.

从而 $\dfrac{8k^2}{3+4k^2}=\dfrac{p(k^2+2)}{k^2}$. 解得 $p=\dfrac{8k^4}{(4k^2+3)(k^2+2)}$ ④

又 AB 过 C_1、C_2 的焦点，

所以 $|AB|=(x_1+\dfrac{p}{2})+(x_2+\dfrac{p}{2})=x_1+x_2+p=(2-\dfrac{1}{2}x_1)+(2-\dfrac{1}{2}x_2)$，

则 $p=4-\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)=4-\dfrac{12k^2}{4k^2+3}=\dfrac{4k^2+12}{4k^2+3}$. ⑤

由④⑤式得 $\dfrac{8k^4}{(4k^2+3)(k^2+2)}=\dfrac{4k^2+12}{4k^2+3}$，即 $k^4-5k^2-6=0$. 解得 $k^2=6$.

于是 $k=\pm\sqrt{6},p=\dfrac{4}{3}$.因为 C_2 的焦点 $F'(\dfrac{2}{3},m)$ 在直线 $y=\pm\sqrt{6}(x-1)$ 上，

所以 $m=\pm\sqrt{6}(\dfrac{2}{3}-1)$，即 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

由上知：$m=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$p=\dfrac{4}{3}$.

解法二：设 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2). 因为 AB 既过 C_1 的右焦点 $F(1,0)$，又过 C_2 的

焦点 $F'(\frac{p}{2},m)$，所以 $|AB|=(x_1+\frac{p}{2})+(x_2+\frac{p}{2})=x_1+x_2+p=(2-\frac{1}{2}x_1)+(2-\frac{1}{2}x_2)$.

即 $x_1+x_2=\frac{2}{3}(4-p)$.　①

由(1)知 $x_1\neq x_2, p\neq 2$，于是直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{m-0}{\frac{p}{2}-1}=\frac{2m}{p-2}$，②

且直线 AB 的方程是 $y=\frac{2m}{p-2}(x-1)$，所以 $y_1+y_2=\frac{2m}{p-2}(x_1+x_2-2)=\frac{4m(1-p)}{3(p-2)}$.　③

又因为 $\begin{cases}3x_1^2+4y_1^2=12\\3x_2^2+4y_2^2=12\end{cases}$，所以 $3(x_1+x_2)+4(y_1+y_2)\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$.　④

将①②③代入④得 $m^2=\frac{3(p-4)(p-2)^2}{16(1-p)}$.　⑤

因为 $\begin{cases}(y_1-m)^2=2px_1\\(y_2-m)^2=2px_2\end{cases}$，所以 $y_1+y_2-2m=2p\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$.　⑥

将②③代入⑥得 $m^2=\frac{3p(p-2)^2}{16-10p}$.　⑦

由⑤⑦得 $\frac{3(p-4)(p-2)^2}{16(1-p)}=\frac{3p(p-2)^2}{16-10p}$.即 $3p^2+20p-32=0$，

解得 $p=\frac{4}{3}$ 或 $p=-8$(舍去). 将 $p=\frac{4}{3}$ 代入⑤得 $m^2=\frac{2}{3}$，$\therefore m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由上知：　$m=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，　$p=\frac{4}{3}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ″ 精益求精、专业严谨 ″ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。