

## 数学试卷

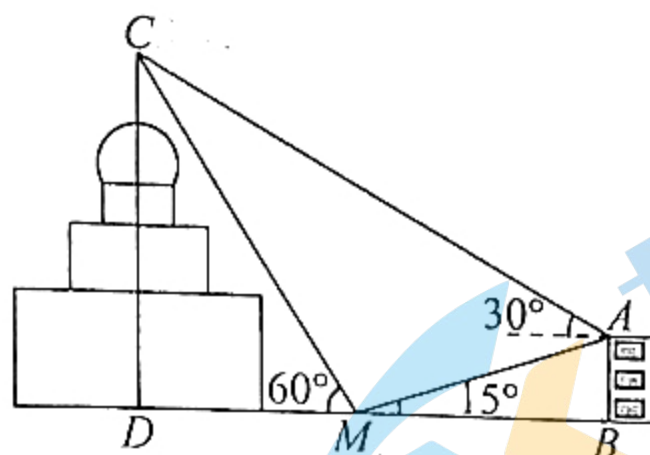
## 注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟,满分 150 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 + mx - 2 = 0\}$ , 若  $A \cap B = \{1\}$ , 则  $B =$   
 A.  $\{1, 3\}$       B.  $\{1\}$       C.  $\{1, -2\}$       D.  $\{-1, 1, 2\}$
2. 若  $z = -1 + i$ , 设  $\omega = \frac{\bar{z}}{z}$ , 则  $|\omega| =$   
 A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C.  $\frac{3}{2}$       D. 2
3. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型:  $\theta = (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt} + \theta_0$ , 其中  $t$  为时间(单位: min),  $\theta_0$  为环境温度,  $\theta_1$  为物体初始温度,  $\theta$  为冷却后温度, 假设在室内温度为  $20^\circ\text{C}$  的情况下, 一桶咖啡由  $100^\circ\text{C}$  降低到  $60^\circ\text{C}$  需要 20 min. 则  $k$  的值为  
 A.  $\frac{\ln 2}{20}$       B.  $\frac{\ln 3}{20}$       C.  $-\frac{\ln 2}{10}$       D.  $-\frac{\ln 3}{10}$
4. 已知平面  $\alpha$  和平面  $\beta$  不重合, 直线  $m$  和  $n$  不重合, 则  $\alpha // \beta$  的一个充分条件是  
 A.  $m \subset \alpha, n \subset \beta$  且  $m // n$       B.  $m \subset \alpha, n \subset \beta$  且  $m // \beta, n // \alpha$   
 C.  $m // \alpha, n // \beta$  且  $m // n$       D.  $m \perp \alpha, n \perp \beta$  且  $m // n$
5. 设  $f(x)$  是定义在实数集  $R$  上的函数, 且满足  $f(1+x) = f(1-x)$ ,  $f(2+x) = -f(2-x)$ , 则  $f(x)$  是  
 A. 偶函数, 又是周期函数      B. 偶函数, 但不是周期函数  
 C. 奇函数, 又是周期函数      D. 奇函数, 但不是周期函数
6. 若  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$  ( $0 < \theta < \pi$ ), 则  $\sin 2\theta$  的值为  
 A.  $\frac{24}{25}$       B.  $\frac{15}{16}$       C.  $-\frac{15}{16}$       D.  $-\frac{24}{25}$
7. 圣·索菲亚教堂(Saint Sophia Cathedral)坐落于中国黑龙江省, 是一座始建于 1907 年拜占庭风格的东正教教堂, 被列为第四批全国重点文物保护单位, 其中央主体建筑集球, 圆柱, 棱柱于一体, 极具对称之美, 可以让游客从任何角度都能领略它的美. 如图, 小宇为了估算索菲亚教堂的高度, 在索菲亚教堂的正东方向找到一座建筑物  $AB$ , 高为 12 m, 在它们之间的地面上的点  $M$  ( $B, M, D$  三点共线) 处测得楼顶  $A$ , 教堂顶  $C$  的仰角分别是  $15^\circ$  和  $60^\circ$ , 在楼顶  $A$  处测得塔顶  $C$  的仰角为  $30^\circ$ , 则小明估算索菲亚教堂的高度为(取  $\sqrt{3} = 1.7$ )



- A. 42.5 m                      B. 45 m                      C. 51 m                      D. 56.4 m

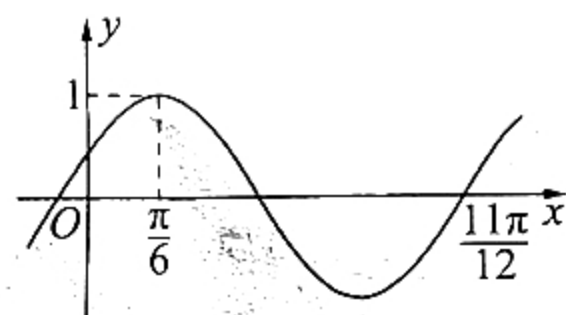
8. 已知  $a = 2 \cdot 2^{2.1}$ ,  $b = 2 \cdot 1^{2.2}$ ,  $c = 2 \cdot 1^{2.1}$ , 则

- A.  $a < c < b$                       B.  $c < b < a$                       C.  $b < c < a$                       D.  $c < a < b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象如图所示，则

- A.  $\omega = 2$   
 B.  $\varphi = \frac{\pi}{6}$   
 C. 对任意的  $x$  都有  $f(x) \geq f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$



D.  $f(x)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  上的零点之和为  $\frac{\pi}{3}$

10. 已知  $D, E$  是  $\triangle ABC$  边  $BC$  的三等分点，点  $P$  在线段  $DE$  上，若  $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ ，则  $xy$  的值可以是

- A.  $\frac{1}{9}$                       B.  $\frac{2}{9}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{3}$

11. 公比为  $q$  的等比数列  $\{a_n\}$ ，其前  $n$  项和为  $S_n$ ，前  $n$  项积为  $T_n$ ，满足  $a_1 > 1, a_{2021} \cdot a_{2022} > 1$ ，

$\frac{a_{2021} - 1}{a_{2022} - 1} < 0$ 。则下列结论正确的是

- A.  $0 < q < 1$                       B.  $a_{2021} \cdot a_{2023} > 1$   
 C.  $S_n$  的最大值为  $S_{2023}$                       D.  $T_n$  的最大值为  $T_{2021}$

12. 设函数  $f(x) = e^{|x|} \cos x$ ，则下列命题中是真命题的是

- A.  $f(x)$  是偶函数  
 B.  $f(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$  单调递增  
 C.  $f(x)$  相邻两个零点之间的距离为  $\pi$   
 D.  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上有 2 个极大值点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 + a_3 + a_5 = 3$ ，则其前 5 项和  $S_5 =$  \_\_\_\_\_。

14. 已知向量  $a = (1, 2), b = (-4, 3)$ ，若  $a \perp (ka - b)$ ，则  $k =$  \_\_\_\_\_。

15. 三棱锥  $P-ABC$  中， $PA = AB = PB = AC = 2, CP = 2\sqrt{2}$ ，点  $D$  是侧棱  $PB$  的中点，且  $CD = \sqrt{7}$ ，则三棱锥  $P-ABC$  的外接球  $O$  的表面积 \_\_\_\_\_。

16. 不等式  $|x^2 - 2x| - ax - a < 0$  的解集中只存在两个整数，则正数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_。

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明步骤或演算步骤。

17.(10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $S_n = 2(a_n - 1), n \in \mathbb{N}^*$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18.(12 分)

已知在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边,  $D$  为  $AB$  边上中点,  $2c - \sqrt{3}b = 2a \cos B$ ,

$\tan B = -\sqrt{3}$ .

(1) 求角  $A$ ;

(2) 在下列三个条件中选择一个作为已知, 求  $CD$ .

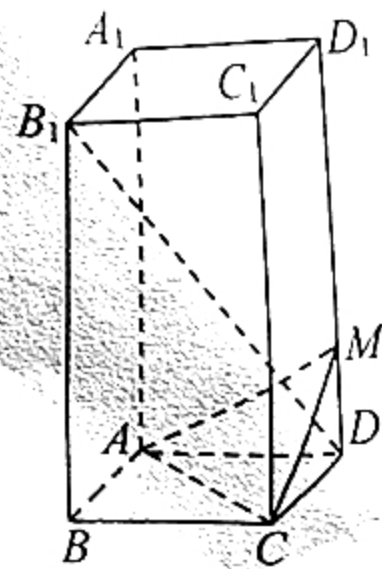
①  $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ ; ②  $AC$  边上的高为 1; ③ 周长为  $4 + 2\sqrt{3}$ .

19.(12 分)

如图, 在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $AA_1 \perp$  平面  $ABCD$ .  $AA_1 = 2AB = 2$ , 点  $M$  在  $DD_1$  上, 且  $B_1D \perp$  平面  $ACM$ .

(1) 求  $\frac{DM}{DD_1}$  的值;

(2) 求二面角  $D - AC - M$  的正弦值.



20.(12分)已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , $a_1=1$ , $S_n^2+mS_{n+1}=a_{n+1}^2$ ,其中 $m$ 为常数.

(1)证明: $S_{n+1}=2S_n+m$ ;

(2)是否存在实数 $m$ ,使得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列?若存在,求出 $m$ ;若不存在,请说明理由.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=\frac{4-3x}{x^2-a}$ , $a\in\mathbf{R}$ .

(1)若 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $-5$ ,求 $a$ 的值;

(2)若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值,求 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值.

22.(12分)

已知函数 $f(x)=e^{1-x}+\ln x+ax^2-a$ ,且 $x>1$ , $a\in\mathbf{R}$ .

(1)若 $a=0$ ,证明: $f(x)$ 单调递增;

(2)若 $f(x)<\frac{1}{x}$ ,求 $a$ 的取值范围.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: [www.gaokzx.com](http://www.gaokzx.com)

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。