

2018 北京市西城区高二（下）期末

数 学(文)

2018.7

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

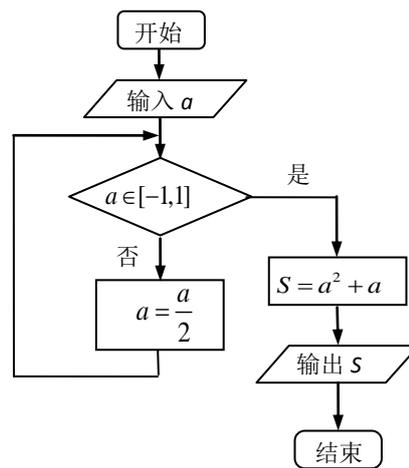
一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 设集合 $A = \{x \mid x < 2\}$, $B = \{-1, 0, 2, 4\}$, 则 $A \cap B =$ ()			
(A) $\{-1, 0, 2\}$	(B) $\{0, -1\}$	(C) $\{0, 2, 4\}$	(D) $\{-1, 4\}$
2. 下列函数中，定义域为 \mathbf{R} 的单调递减函数是 ()			
(A) $y = -x^2$	(B) $y = \frac{1}{x}$	(C) $y = (\frac{1}{2})^x$	(D) $y = \log_{0.5} x$
3. 在复平面内，复数 $\frac{2-i}{i}$ 对应的点位于 ()			
(A) 第一象限	(B) 第二象限	(C) 第三象限	(D) 第四象限
4. 如果 $a > b$, 那么下列不等式一定成立的是 ()			
(A) $ a > b $	(B) $a^3 > b^3$	(C) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(D) $2^a < 2^b$

5. 执行如图所示的程序框图，若输入的 $a \in [1, 2]$,

则输出的 S 属于 ()

- (A) $[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$
- (B) $[1, 2]$
- (C) $[-\frac{1}{4}, 0]$
- (D) $[\frac{3}{4}, 2]$



6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 “ $f(x)$ 为奇函数” 是 “ $f(0) = 0$ ” 的 ()	
(A) 充分不必要条件	(B) 必要不充分条件
(C) 充要条件	(D) 既不充分也不必要条件

7. 若 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{1}{2}$, 则 ()

(A) $a > b > c$

(B) $a > c > b$

(C) $a < b < c$

(D) $a < c < b$

8. 某电影院共有 n ($n \leq 3000$) 个座位. 某天, 这家电影院上、下午各演一场电影. 看电影的是甲、乙、丙三所中学的学生, 三所学校的观影人数分别是 985 人, 1010 人, 2019 人 (同一所学校的学生有的看上午场, 也有的看下午场, 但每人只能看一场). 已知无论如何排座位, 这天观影时总存在这样的一个座位, 上、下午在这个座位上坐的是同一所学校的学生, 那么 n 的可能取值有 ()

(A) 12 个

(B) 11 个

(C) 10 个

(D) 前三个答案都不对

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 把答案填在题中横线上.

9. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, 2^x + x^2 > 1$, 则 $\neg p$: _____.

10. 曲线 $y = \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处切线的斜率为_____.

11. 当 $x > 1$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x-1} + x$ 的最小值为_____.

12. 已知实数 a, b 满足 $5^a = 4, 4^b = 25$, 则 $(ab)^2 =$ _____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} + 1, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$ 则 $f(1) + f(-1) =$ _____; 使得方程 $f(x) = b$ 有且仅有两解的实数 b 的

取值范围为_____.

14. 某个产品有若干零部件构成, 加工时需要经过 6 道工序, 分别记为 A, B, C, D, E, F. 其中, 有些工序因为是制造不同的零部件, 所以可以在几台机器上同时加工; 有些工序因为是对同一个零部件进行处理, 所以存在加工顺序关系. 若加工工序 Y 必须要在工序 X 完成后才能开工, 则称 X 为 Y 的紧前工序. 现将各工序的加工次序及所需时间 (单位: 小时) 列表如下:

工 序	A	B	C	D	E	F
加工时间	3	4	2	2	2	1
紧前工序	无	C	无	C	A, B	D

现有两台性能相同的生产机器同时加工该产品, 则完成该产品的最短加工时间是__小时.

(假定每道工序只能安排在一台机器上, 且不能间断.)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \log_a x$ ，且 $f(2) = \frac{1}{2}$.

(I) 求 $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{3}) + f(\frac{3}{4})$ 的值;

(II) 写出能够说明“任给 $x \in (0, +\infty)$ ， $f(x+1) \geq kx + b$ ”是假命题的一组数 k, b 的值.

16. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = m(x-2m)(x+m+3)$ ，其中 $m \in \mathbf{R}$.

(I) 若 $m=1$ ，解不等式 $f(x) > 0$;

(II) 记不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 M ，若 $-3 \notin M$ ，求 m 的取值范围.

17. (本小题满分 13 分)

设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增，在区间 $(1, 3)$ 上单调递减.

(I) 求 a, b 满足的关系;

(II) 求证: $b \geq 3$.

18. (本小题满分 13 分)

现行的个税法修正案规定: 个税免征额由原来的 2000 元提高到 3500 元，并给出了新的个人所得税税率表:

全月应纳税所得额	税率 (%)
不超过 1500 元的部分	3%
超过 1500 元至 4500 元的部分	10%
超过 4500 元至 9000 元的部分	20%
超过 9000 元至 35000 元的部分	25%
...	...

例如某人的月工资收入为 5000 元，那么他应纳个人所得税为: $(5000 - 3500) \times 3\% = 45$ (元).

(I) 若甲的月工资收入为 6000 元，求甲应纳的个人所得税;

(II) 设乙的月工资收入为 x ($x < 10000$) 元，应纳个人所得税为 y 元，求 y 关于 x 的函数;

(III) 若丙某月应纳的个人所得税为 1000 元，给出丙的月工资收入。(结论不要求证明)

19. (本小题满分 14 分)

设函数 $f(x) = (x-2)e^x - ax^2 + 2ax - a$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (I) 当 $a \leq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;
- (II) 当 $a > e$ 时, 证明: 函数 $f(x)$ 不可能存在两个零点.

20. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + 2$.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (II) 若函数 $y = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围;
- (III) 设函数 $g(x) = x - \frac{2}{x}$, 其中 $x > 0$. 证明: $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的下方.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B 2. C 3. C 4. B 5. D 6. A 7. C 8. A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $\exists x \in \mathbf{R}, 2^x + x^2 \leq 1$ 10. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 11. 3

12. 4 13. 0, [0,1) 14. 8

注：一题两空的题目，第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15. (本小题满分 13 分)

(I) 解：由题意 $\log_a 2 = \frac{1}{2}$,

所以 $a^{\frac{1}{2}} = 2$, 即 $a = 4$ 3 分

则 $f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) = \log_4 \frac{1}{2} + \log_4 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{3}{4}$
 $= \log_4 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)$ 6 分

$= \log_4 \frac{1}{4}$
 $= -1$ 8 分

(II) 解：答案不唯一，如 $k = -1$, $b = 1$ 13 分

16. (本小题满分 13 分)

(I) 解：由题意，得不等式 $(x-2)(x+4) > 0$,

解得 $x > 2$, 或 $x < -4$,

所以不等式的解集为 $\{x | x > 2, \text{ 或 } x < -4\}$ 5 分

(II) 解：因为不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集为 M , 且 $-3 \notin M$,

所以 $f(-3) > 0$, 即 $m^2(-3-2m) > 0$, (*) 8 分

当 $m = 0$ 时, 不等式 (*) 不成立; 10 分

当 $m \neq 0$ 时, 不等式 (*) 等价于 $-3-2m > 0$,

解得 $m < -\frac{3}{2}$.

综上, m 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{3}{2})$ 13 分

17. (本小题满分 13 分)

(I) 解: 求导, 得 $f'(x) = x^2 + 2ax + b$ 2 分

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增, 在区间 $(1,3)$ 上单调递减,

所以 $f'(1) = 1 + 2a + b = 0$.

即 $2a + b + 1 = 0$ 4 分

(II) 解: 由 (I), 得 $1 + 2a + b = 0$, 即 $2a = -b - 1$.

所以 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{b+1}{2}x^2 + bx$, $f'(x) = x^2 - (b+1)x + b = (x-b)(x-1)$ 6 分

当 $b \leq 1$ 时, 得当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) = (x-b)(x-1) > 0$,

此时, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 这与题意不符. 9 分

当 $b > 1$ 时,

随着 x 的变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, b)$	b	$(b, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(b, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, b)$ 上单调递减.

..... 11 分

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, 3)$ 上单调递减,

所以 $b \geq 3$ 时符合题意.

综上, $b \geq 3$ 13 分

18. (本小题满分 13 分)

(I) 解: 甲的月工资收入为 6000 元, 其应纳的个人所得税为

$$(5000 - 3500) \times 3\% = (6000 - 5000) \times 3\% = 30 \text{ (元)}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(II) 解: 当 $x \leq 3500$ 时, 乙应纳个人所得税 $y = 0$ 元. 4 分

当 $3500 < x \leq 5000$ 时, 乙应纳个人所得税 $y = (x - 3500) \times 3\% = 0.03x - 105$ 元.

..... 6 分

当 $5000 < x \leq 8000$ 时, 乙应纳个人所得税

$$y = (5000 - 3500) \times 3\% + (x - 5000) \times 10\% = 0.1x - 455 \text{ 元}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $8000 < x < 10000$ 时, 乙应纳个人所得税

$$y = (5000 - 3500) \times 3\% + (8000 - 5000) \times 10\% + (x - 8000) \times 20\% = 0.2x - 1255 \text{ 元}.$$

$$\text{所以 } y = \begin{cases} 0, & x \leq 3500, \\ 0.03x - 105, & 3500 < x \leq 5000, \\ 0.1x - 455, & 5000 < x \leq 8000, \\ 0.2x - 1255, & 8000 < x < 10000. \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(III) 丙的月工资收入为11275元. 13 分

19. (本小题满分 14 分)

(I) 解: 求导, 得 $f'(x) = (x-1)e^x - 2ax + 2a = (x-1)(e^x - 2a)$, 3 分

因为 $a \leq 0$, 所以 $e^x - 2a > 0$,

所以当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 为减函数;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 为增函数. 5 分

故当 $x=1$ 时, $f(x)$ 存在极小值 $f(1) = -e$; $f(x)$ 不存在极大值. 6 分

(II) 证明: 解方程 $f'(x) = (x-1)(e^x - 2a) = 0$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = \ln 2a$ 7 分

由 $a > e$, 得 $\ln 2a > 1$.

随着 x 的变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \ln 2a)$	$\ln 2a$	$(\ln 2a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大 值	↘	极小 值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \ln 2a)$ 上单调递减.

..... 10 分

又因为 $f(1) = -e < 0$,

..... 12 分

所以函数 $f(x)$ 至多在区间 $(\ln 2a, +\infty)$ 存在一个零点;

所以, 当 $a > e$ 时函数 $f(x)$ 不可能存在两个零点. 14 分

20. (本小题满分 14 分)

(I) 解: 求导, 得 $f'(x) = \ln x + 1$, 1 分

又因为 $f(1) = 2$, $f'(1) = 1$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - y + 1 = 0$ 3 分

(II) 解: 设函数 $F(x) = f(x) + ax = x \ln x + ax + 2$,

求导, 得 $F'(x) = \ln x + a + 1$,

因为函数 $F(x) = f(x) + ax$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F'(x) = \ln x + a + 1 \geq 0$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上恒成立, 4 分

即 $a \geq -\ln x - 1$ 恒成立. 5 分

又因为函数 $h(x) = -\ln x - 1$ 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) < h(e) = -2$,

所以 $a \geq -2$ 8 分

(III) 证明: 设 $h(x) = f(x) - g(x) = x \ln x + 2 - x + \frac{2}{x}$, $x > 0$ 9 分

求导, 得 $h'(x) = \ln x - \frac{2}{x^2}$.

设 $m(x) = h'(x) = \ln x - \frac{2}{x^2}$, 则 $m'(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} > 0$ (其中 $x > 0$).

所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $m(x)$ (即 $h'(x)$) 为增函数. 10 分

又因为 $h'(1) = -2 < 0$, $h'(e) = 1 - \frac{2}{e^2} > 0$,

所以, 存在唯一的 $x_0 \in (1, e)$, 使得 $h'(x_0) = \ln x_0 - \frac{2}{x_0^2} = 0$ 11 分

且 $h'(x)$ 与 $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\searrow	$h(x_0)$	\nearrow

所以, 函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) \geq h(x_0)$ 12 分

又因为 $x_0 \in (1, e)$, $h'(x_0) = \ln x_0 - \frac{2}{x_0^2} = 0$,

所以 $h(x_0) = x_0 \ln x_0 + 2 - x_0 + \frac{2}{x_0} = 2 - x_0 + \frac{4}{x_0} > 2 - e + \frac{4}{e} > 0$,

所以 $h(x) > 0$, 即 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的下方. 14 分