高三阶段性考试
数　学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容：集合与常用逻辑用语，不等式，函数与导数，三角函数与解三角形，向量，复数，数列。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z(1+3\mathrm{i})=4+\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $-\frac{1}{8}-\frac{11}{8}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{8}+\frac{11}{8}\mathrm{i}$

C. $\frac{7}{10}+\frac{11}{10}\mathrm{i}$　　D. $\frac{7}{10}-\frac{11}{10}\mathrm{i}$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-10<0\}$，$B=\{x|a-x>0\}$，且 $1\notin A\cap B$，则 a 的最大值是

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 5

3. 已知 $\sin\alpha+2\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=0$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$

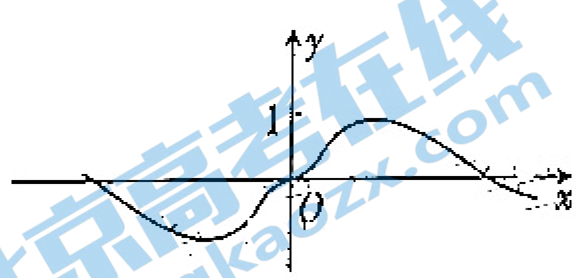
A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

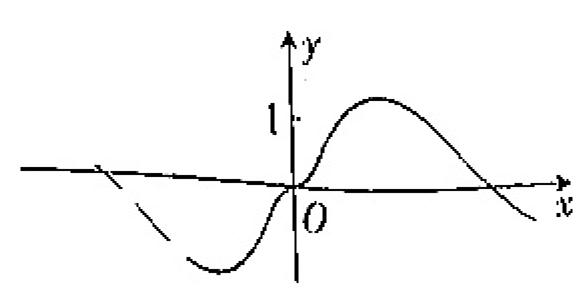
4. “$x<4$”是“$\log_2 x<2$”的

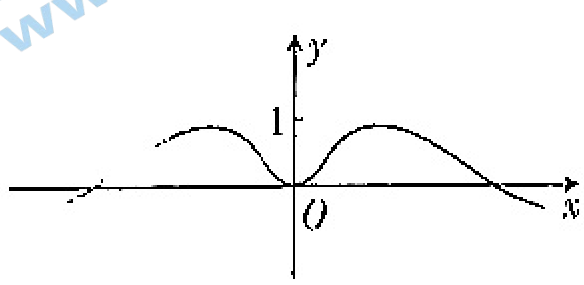
A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

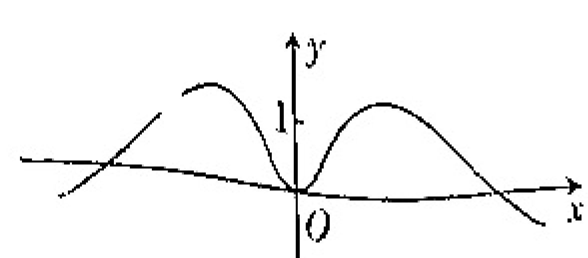
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 函数 $f(x)=\frac{2x\sin x}{x^2+1}$ 在区间 $[-4,4]$ 上的大致图象是


A


B


C


D

6. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_7=6$，则a_5+4a_9的最小值是

A. 12　　B. 24　　C. 36　　D. 48

7. 在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA}$，$E$是边$AB$的中点，$EF$与$AD$交于点$P$，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则$m+n=$

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{4}{7}$　　C. $\frac{6}{7}$　　D. 1

8. 杭州第19届亚运会又称"杭州2022年第19届亚运会"，是亚洲最高规格的国际综合性体育赛事. 本届亚运会定于2023年9月23日至10月8日在浙江杭州举办. 某国的甲、乙、丙运动员共报名参加了13个项目，其中甲和丙都报名参加了7个项目，乙报名参加了6个项目，甲、乙报名参加的项目中有2个相同，甲、丙报名参加的项目中有3个相同，同一个项目，每个国家最多只能有2名运动员报名参加，则乙、丙报名参加的项目中，相同的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4+2a_8=a_6$，则下列结论正确的是

A. $a_7=0$　　B. S_7最大

C. $S_5=S_9$　　D. $S_{13}=0$

10. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则

A. $f(0)=0$　　B. $f(x)$是奇函数

C. $x=0$为$f(x)$的极小值点　　D. 若$f(1)=1$，则$f(2023)=2023$

11. 设函数$f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$在$(0,\pi)$上恰有两个极值点，两个零点，则$\omega$的取值可能是

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{13}{6}$

12. 已知函数$y=a^x$与$y=\log_a x$的图象只有一个交点，则a的取值可能为

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\sqrt{e}$　　D. $e^{\frac{1}{e}}$

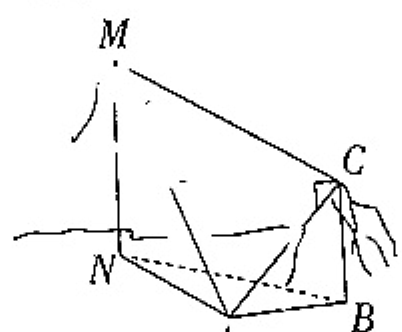
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量$\boldsymbol{m}=(-1,2)$，$\boldsymbol{n}=(-3,1)$，若$(\boldsymbol{m}+k\boldsymbol{n})\perp\boldsymbol{m}$，则$k=$ ▲ .

14. 若$f(x)=\frac{1}{a^x+1}-m(a>0,a\neq1)$是奇函数，则$m=$ ▲ .

15. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若$f'(x)$是$f(x)$的导函数，$f''(x)$是$f'(x)$的导函数，则曲线$y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的曲率$K=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$. 已知函数$f(x)=x^2-x$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的曲率为 ▲ .

16. 如图，为测量山高MN，选择A和另一座山的山顶C为测量观测点，从A点测得C点的仰角$\angle CAB=45°$，从A点测得M点的仰角$\angle MAN=45°$，从C点测得M点的仰角为α. 已知山高$BC=3$(百米)，$\tan\alpha=\frac{2}{7}$，$\angle NAB=120°$，则山高$MN=$ ▲ (百米).



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，且 $a\cos C+c\cos A=4b\cos B$.

(1)求 $\cos B$ 的值；

(2)若 $b=2\sqrt{19}$，且△ABC 的面积为 $6\sqrt{15}$，求△ABC 的周长.

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=\log_3(x+a)-\log_3(5-2x)$，且 $f(1)=0$.

(1)求 a 的值及 $f(x)$ 的定义域；

(2)求不等式 $f(x)>1$ 的解集.

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的图象经过点 $A(\frac{\pi}{3},-2)$，且 $f(x)$ 图象上相邻的两条对称轴之间的距离是 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2)若对任意的 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，不等式 $|f(x)-m|\leqslant 2$ 恒成立，求 m 的取值范围.

20. (12 分)

某企业计划对甲、乙两个项目共投资 200 万元，且每个项目至少投资 10 万元. 依据前期市场调研可知，甲项目的收益 $p(t)$(单位：万元)与投资金额 t(单位：万元)满足关系式 $p(t)=at^3+21t$；乙项目的收益 $g(t)$(单位：万元)与投资金额 t(单位：万元)满足关系式 $g(t)=-2a(t-b)^2$ $(b<200)$. 设对甲项目投资 x 万元，两个项目的总收益为 $f(x)$(单位：万元)，且当对甲项目投资 30 万元时，甲项目的收益为 180 万元，乙项目的收益为 120 万元.

(1)求 $f(x)$ 的解析式.

(2)试问如何安排甲、乙这两个项目的投资金额，才能使总收益 $f(x)$ 最大? 并求出 $f(x)$ 的最大值.

21. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $na_{n+1}-(n+1)a_n=1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若数列 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=\frac{3^n-1}{2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率；

(2)当 $x\in(0,+\infty)$ 时，比较 $f(x)$ 与 x 的大小；

(3)若函数 $g(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}$，且 $f(e^{\frac{a}{2}})=g(b)-1$ $(a>0,b>0)$，证明：$f(b^2)+1>g(a+1)$.

密 封 线 内 不 要 答 题