2023 北京大兴高二（上）期末
数　　学

2023．01

> 1. 本试卷共 4 页，共两部分，21 道小题．满分 150 分。考试时间 120 分钟。
> 2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和准考证号。
> 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
> 4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他题用黑色字迹签字笔作答。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）空间向量 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=$

（A）$\overrightarrow{AB}$　　　　（B）$\overrightarrow{CB}$

（C）$\overrightarrow{OC}$　　　　（D）$\overrightarrow{BC}$

（2）圆 $x^2+y^2-2y-3=0$ 的半径是

（A）1　　　　（B）2

（C）3　　　　（D）4

（3）抛物线 $x^2=8y$ 的焦点到准线的距离为

（A）1　　　　（B）2

（C）4　　　　（D）8

（4）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2$，则 $a_2=$

（A）1　　　　（B）2

（C）3　　　　（D）4

（5）若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=-1$，$a_4=1$，则其前 n 项和的最小值为

（A）-9　　　　（B）-8

（C）-7　　　　（D）-6

（6）设 $\{a_n\}$ 是各项不为 0 的无穷数列，“$\forall n\in \mathbf{N}^*$，$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$”是“$\{a_n\}$ 为等比数列”的

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件

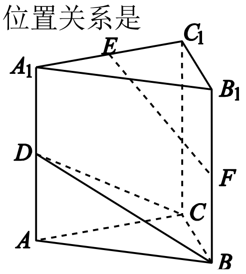
（C）充分必要条件　　　　（D）既不充分也不必要条件

（7）设 F_1，F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 P 在椭圆 C 上，$|PF_1|=4$，则 $|PF_2|=$

（A）1　　　　（B）2

（C）3　　　　（D）4

（8）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$ 平面 ABC，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$．D，E，F 分别为 AA_1，A_1C_1，BB_1 的中点，则直线 EF 与平面 BCD 的位置关系是



（A）平行

（B）垂直

（C）直线在平面内

（D）相交且不垂直

（9）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $a_1=-4$，$a_4=\dfrac{1}{2}$，则数列 $\{S_n\}$

（A）无最大项，有最小项　　（B）有最大项，无最小项

（C）无最大项，无最小项　　（D）有最大项，有最小项

（10）已知 M 是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的动点，则 M 到直线 $y=kx+1\ (k\in\mathbf{R})$ 距离的最大值为

（A）2　　（B）$\sqrt{2}+1$

（C）3　　（D）$2\sqrt{2}+1$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）3 与 7 的等差中项为_______．

（12）直线 $y=x+1$ 关于 y 轴对称的直线的方程为_______．

（13）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $x+2y=0$，则 $a=$_______．

（14）能说明“若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1<a_2$，则等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”是假命题的一个等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可以是_______．

（15）平面内，动点 M 与点 $F(1,0)$ 的距离和 M 到直线 $x=-1$ 的距离的乘积等于 2，动点 M 的轨迹为曲线 C．给出下列四个结论：

①曲线 C 过坐标原点；

②曲线 C 关于 x 轴对称；

③曲线 C 与 x 轴有 2 个交点；

④点 M 与点 $F(1,0)$ 的距离都不小于 $\sqrt{3}-1$．

其中所有正确结论的序号为_______．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知点 $A(0,1)$ 和点 $B(2,3)$ 是圆 C 直径的两个端点.

（Ⅰ）求线段 AB 的中点坐标和圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 A 作圆 C 的切线 l，求切线 l 的方程.

（17）（本小题 14 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2+a_3=5$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设$\{b_n\}$是等比数列，$b_1=2$，$b_3=2b_2$，求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和T_n.

（18）（本小题 14 分）

已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F.

（Ⅰ）求F的坐标和抛物线C的准线方程；

（Ⅱ）过点F的直线l与抛物线C交于两个不同点A，B，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求$|AB|$的长.

条件①：直线l的斜率为1；

条件②：线段AB的中点为$M(3,2)$.

注：如果选择条件①和条件②分别作答，按第一个解答计分.

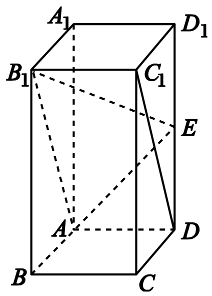
（19）（本小题 14 分）

如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，E分别是棱DD_1的中点.

（Ⅰ）求证：$C_1D//$平面AB_1E；

（Ⅱ）求平面AB_1E与平面$A_1B_1C_1D_1$夹角的余弦值；

（Ⅲ）求点C_1到平面AB_1E的距离.



（20）（本小题 15 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$过点$P(2,1)$，且$a=2b$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程和离心率；

（Ⅱ）设O为原点，直线OP与直线l平行，直线l与椭圆C交于不同的两点M，N，直线PM，PN分别与x轴交于点E，F.当E，F都在y轴右侧时，求证：$|OE|+|OF|$为定值.

（21）（本小题14分）

已知$\{a_n\}$为无穷递增数列，且对于给定的正整数k，总存在i，j，使得$a_i\leqslant k$，$a_j\geqslant k$，其中$i\leqslant j$．令b_k为满足$a_i\leqslant k$的所有i中的最大值，c_k为满足$a_j\geqslant k$的所有j中的最小值.

（Ⅰ）若无穷递增数列$\{a_n\}$的前四项是$1,2,3,5$，求b_4和c_4的值；

（Ⅱ）若$\{a_n\}$是无穷等比数列，$a_1=1$，公比q为大于1的整数，$b_3<b_4=b_5$，$c_3=c_4$，求q的值；

（Ⅲ）若$\{a_n\}$是无穷等差数列，$a_1=1$，公差为$\dfrac{1}{m}$，其中m为常数，且$m>1$，$m\in\mathbf{N}^*$，求证：$b_1,b_2,\cdots,b_k,\cdots$和$c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots$都是等差数列，并写出这两个数列的通项公式.

参考答案

一、**选择题**（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	C	A	C	B	D	D	B

二、**填空题**（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）5　　（12）$x+y-1=0$　　（13）2

（14）$a_n=-(-1)^{n+1}$（答案不唯一）　　（15）②③④

注：第（15）题只写一个且正确给 3 分，只写两个且正确给 4 分。

三、**解答题**（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意知，线段 AB 的中点为圆心 C

设圆 C $(x_。, y_。)$，

$x_。=\dfrac{0+2}{2}=1$，……1 分

$y_。=\dfrac{1+3}{2}=2$，……1 分

所以圆心 C $(1,2)$．

故线段 AB 中点的坐标为 $(1,2)$．……1 分

直径 $|AB|=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}$ ……1 分

$=2\sqrt{2}$．……1 分

所以圆 C 的半径为 $\sqrt{2}$．……1 分

所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$．……1 分

（Ⅱ）设切线 l 的斜率为 k，

由题意知，$l\perp CA$．……1 分

所以 $kk_{AC}=-1$．……2 分

因为 $k_{AC}=\dfrac{2-1}{1-0}=1$，……1 分

所以 $k=-1$．……1 分

又因为点 $A(0,1)$ 在直线上，

所以直线 l 的方程为 $y=-x+1$．……2 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d．

因为 $a_2+a_3=5$，

所以 $2a_1+3d=5$．……2 分

因为 $a_1=1$，

所以 $d=1$． ……2 分

所以 $a_n=n$． ……2 分

（Ⅱ） 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．

因为 $b_3=2b_2$， 所以 $q=2$． ……2 分

所以 $b_n=2^n$． ……2 分

所以 $T_n=a_1+b_1+a_2+b_2+\cdots+a_n+b_n$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=\dfrac{n(1+n)}{2}+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=\dfrac{n^2+n}{2}+2^{n+1}-2$． ……4 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ） 由题设知，焦点 F 的坐标为 $(1,0)$． ……3 分

准线方程为 $x=-1$． ……3 分

（Ⅱ）**选条件①**

直线 l 的方程为 $y=x-1$． ……2 分

由 $\begin{cases} y=x-1, \\ y^2=4x \end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$． ……1 分

设 $A(x_1,y_1)$， $A(x_2,y_2)$， 则

$x_1+x_2=6$． ……1 分

由抛物线的定义知，$|AB|=x_1+x_2+p$ ……3 分

所以 $|AB|=6+2\ \ =8$． 故 $|AB|$ 的长为 8． ……1 分

选条件②

设 $A(x_1,y_1)$， $A(x_2,y_2)$，

因为 AB 的中点为 $M(3,2)$，

由中点坐标公式知， $x_1+x_2=6$． ……4 分

由抛物线的定义知，$|AB|=x_1+x_2+p$， ……3 分

所以所以 $|AB|=6+2\ \ =8$．

故 $|AB|$ 的长为 8． ……1 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ） 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

因为 $AD\,//\,B_1C_1$， 且 $AD=B_1C_1$，

所以四边形 ADC_1B_1 为平行四边形． ……1 分

所以 $AB_1//DC_1$． ……1 分

又 $DC_1\not\subset$ 平面 AB_1E， ……1 分

$AB_1 \subset$ 平面 AB_1E，

所以 $DC_1 //$ 平面 AB_1E． ……1 分

（Ⅱ）如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$， $B_1(1,0,2)$， $E(0,1,1)$， $C_1(1,1,2)$．

所以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,2)$， $\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$， $\overrightarrow{B_1C_1}=(0,1,0)$， $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$．

设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}\quad 即 \begin{cases}x+2z=0,\\ y+z=0.\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $x=-2$， $y=-1$．

于是 $\boldsymbol{m}=(-2,-1,1)$． ……2 分

又因为平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$， ……1 分

设平面 AB_1E 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 夹角为 θ，

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|$ ……2 分

$$=\left|\frac{-2\times0+(-1)\times0+1\times2}{\sqrt{6}\times2}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

所以平面 AB_1E 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$． ……1 分

（Ⅲ） 因为 $\overrightarrow{B_1C_1}=(0,1,0)$，

所以 C_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}$ ……2 分

$=\dfrac{|0\times(-2)+1\times(-1)+0\times1|}{\sqrt{6}}$ ……1 分

$=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$． ……1 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ） 由题设，得 $\begin{cases}a=2b,\\ \dfrac{2^2}{a^2}+\dfrac{1^2}{b^2}=1.\end{cases}$

解得 $a^2=8$， $b^2=2$． ……2 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$． ……1 分

因为 $a=2\sqrt{2}$， $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{6}$， ……1分

所以离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……1分

（Ⅱ）依题意，直线 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$． ……1分

由直线 OP 与直线 l 平行知，

直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$. ……1分

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+m, \\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $x^2+2mx+2m^2-4=0$. ……1 分

由 $\Delta=4(4-m^2)>0$ 得 $-2<m<2$.

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$， 则

$x_1+x_2=-2m$ ， $x_1x_2=2m^2-4$ . . ……1分

直线 PM 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)+1$ . . ……1分

令 $y=0$ ，得点 E 的横坐标 $x_E=-\frac{x_1-2}{y_1-1}+2$. ……1分

同理可得点 F 的横坐标 $x_F=-\frac{x_2-2}{y_2-1}+2$.

因为点 E ， F 都在原点的右侧，所以 $x_E>0$ ， $x_F>0$ ，

$$|OE|+|OF|=|x_E|+|x_F|=x_E+x_F$$

$$=4-(\frac{x_1-2}{y_1-1}+\frac{x_2-2}{y_2-1})$$

$$=4-\frac{(x_1-2)(y_2-1)+(x_2-2)(y_1-1)}{(y_1-1)(y_2-1)}$$

$$=4-\frac{(x_1-2)(\frac{1}{2}x_2+m-1)+(x_2-2)(\frac{1}{2}x_1+m-1)}{(y_1-1)(y_2-1)}$$ ……1分

$$=4-\frac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)}{(y_1-1)(y_2-1)}$$ ……1分

因为 $x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-4(m-1)=2m^2-4+(m-2)(-2m)-4(m-1)$

$=2m^2-4-2m^2+4m-4m+4=0$ ……1分

所以 $|OE|+|OF|=4$. ……1分

所以 $|OE|+|OF|$ 为定值.

（21）（共 14 分）

解：（Ⅰ） 由题意知， $\{a_n\}$ 是无穷递增数列且 $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=5$.

所以 $a_1<a_2<a_3<4, 4<a_4<a_5<\cdots$.

由题意知， $b_4=3, c_4=4$. ……4 分

（Ⅱ） 由题意知， $\{a_n\}$ 是无穷递增等比数列， $a_1=1$ ，公比 q 是大于1的整数.

方法一

①当 $q=2$ 时， $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8, a_5=16$，

故 $a_1<a_2<3, 3<a_3<a_4<\cdots$， 所以 $b_3=2$， $c_3=3$.

$a_1<a_2<4, a_3=4, 4<a_4<a_5<\cdots$， 所以 $b_4=3$， $c_4=3$.

$a_1<a_2<a_3<5, 5<a_4<a_5<\cdots$， 所以 $b_5=3$.

所以当 $q=2$ 时， $b_3<b_4=b_5$， $c_3=c_4$ 成立. ……2 分

②当 $q=3$ 时， $a_1=1, a_2=3, a_3=9, a_4=27, a_5=81\cdots$，

故 $a_1<a_2\leqslant 3, 3<a_3<a_4<\cdots$， 所以 $b_3=2$

故 $a_1<a_2<4, 4<a_3<a_4<\cdots$， 所以 $b_4=2$.

则 $b_3=b_4=2$，所以 $q=3$ 不满足题意. ……1 分

③当 $q=4$ 时， $a_1=1, a_2=4, a_3=16, a_4=64$，…

故 $a_1<3, 3<a_2<a_3<\cdots$， 所以 $b_3=1$， $c_3=2$.

$a_1<4, a_2=4, 4<a_3<a_4<\cdots$， 所以 $b_4=2$， $c_4=2$.

$a_1<a_2<5, 5<a_3<a_4<\cdots$， 所以 $b_5=2$.

所以当 $q=4$ 时， $b_3<b_4=b_5$， $c_3=c_4$ 成立. ……2 分

④当 $q\geqslant 5$ 时， $a_1=1, a_2=q\geqslant 5, a_3=q^2\geqslant 25$，…

故 $a_1<3, 3<a_2<a_3<\cdots$， 且 $a_1<4, 4<a_2<a_3<\cdots$

则 $b_3=b_4=1$，所以当 $q\geqslant 5$ 时，不满足题意. ……1 分

综上，当 $q=2$，或 $q=4$ 时，满足， $b_3<b_4=b_5$， $c_3=c_4$ 成立.

方法二

由题意知， $b_3=1$，或 2.

①当 $b_3=1, b_4=b_5=2$ 时，由题意知， $a_2=4$

若 $a_2=4$， 即 $a_1=1, a_2=4, a_3=16, a_4=64$，…，

此时 $q=4$， $b_3=1, b_4=2$， 且 $b_5=2$， $c_3=c_4=2$.

所以当 $q=4$ 时满足题意. ……2 分

②当 $b_3=2, b_4=b_5=3$ 时，由题意知， $a_2=2$

若 $a_2=2$， 即 $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=8,\cdots$，

此时 $q=2$， $b_3=2, b_4=b_5=3$， $c_3=c_4=3$.

所以当 $q=2$ 时满足题意. ……2 分

③以下说明当 $q=3$， $q\geqslant 5$ 时，不成立.

当 $q=3$ 时，即 $a_1=1, a_2=3, a_3=9$，…， 故 $b_3=b_4=2$ 不满足题意. …1 分

当 $q\geqslant 5$ 时， $a_1=1, a_2=q\geqslant 5, a_3=q^2\geqslant 25$，…

故 $a_1<3, 3<a_2<a_3<\cdots$，且 $a_1<4, 4<a_2<a_3<\cdots$

则 $b_3=b_4=1$，所以当 $q\geqslant 5$ 时，不满足题意．……1 分

（III） **方法一**

由 $\{a_n\}$ 是无穷递增等差数列，$a_1=1$，公差为 $\dfrac{1}{m}$ 知，

所以 $a_n=1+(n-1)\dfrac{1}{m}$． ……1分

因为 $m>1, m\in\mathbf{N}^*$，

所以 $a_{(k-1)m+1}=k$，$k\in\mathbf{N}^*$．

由 b_k，c_k 分别为满足 $a_i\leqslant k$，$a_j\geqslant k$ 的所有 i，j 中的最大值和最小值，

且 $a_1<a_2<a_3<\cdots$ 知，

$b_k=c_k=(k-1)m+1$． ……1 分

所以 $b_{k+1}-b_k=c_{k+1}-c_k=km+1-(k-1)m-1=m$． ……1 分

因为 m 为常数，

所以 $b_1, b_2, \cdots, b_k, \cdots$ 和 $c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots$ 都是首项1，公差为 m 等差数列．

所以 $b_k=km-m+1$，$c_k=km-m+1$． ……1 分

方法二

因为 $a_1=1$，所以 $b_1=c_1=1$．

令 $b_k=i$，即 $a_i\leqslant k$ 且 $a_{i+1}>k$．

所以 $1+(i-1)\dfrac{1}{m}\leqslant k$，且 $1+\dfrac{i}{m}>k$．

所以 $1+(i-1)\dfrac{1}{m}+1\leqslant k+1$．

所以 $1+(i+m-1)\dfrac{1}{m}\leqslant k+1$．

即 $a_{i+m}\leqslant k+1$．

因为 $a_{i+m+1}=1+(i+m)\dfrac{1}{m}=1+\dfrac{i}{m}+1>k+1$．

即 $a_{i+m+1}>k+1$．

所以 $b_{k+1}=i+m$． ……2 分

所以 $b_{k+1}-b_k=(i+m)-i=m$． ……1 分

同理 $c_{k+1}-c_k=(i+m)-i=m$

所以 $b_1, b_2, \cdots, b_k, \cdots$ 和 $c_1, c_2, \cdots, c_k, \cdots$ 都是首项1，公差为 m 等差数列．

所以 $b_k=km-m+1$，$c_k=km-m+1$． ……1 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。