海淀区 2022—2023 学年第一学期期末练习

高三数学

2023.01

数

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|x>0\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[-2,3]$　（B）$[0,3]$　（C）$(0,+\infty)$　（D）$[-2,+\infty)$

（2）在复平面内，复数 $\frac{1}{2-\mathrm{i}}$ 对应的点在

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

（3）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}-1$，在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是

（A）$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$　（B）$(\frac{1}{2},1)$　（C）$(1,2)$　（D）$(2,3)$

（4）已知 $a=\lg 5$，$b=\sin\frac{\pi}{7}$，$c=2^{\frac{1}{3}}$，则

（A）$a<b<c$　（B）$b<a<c$　（C）$b<c<a$　（D）$a<c<b$

（5）若圆 $x^2+y^2-2x-2ay+a^2=0$ 截直线 $x-2y+1=0$ 所得弦长为 2，则 $a=$

（A）-1　（B）0　（C）1　（D）2

（6）已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1=3$，$a_4+a_6=-10$. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，记 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_8=$

（A）-32　（B）-80　（C）-192　（D）-224

（7）某校高一年级计划举办足球比赛，采用抽签的方式把全年级 6 个班分为甲、乙两组，每组 3 个班，则高一（1）班、高一（2）班恰好都在甲组的概率是

（A）$\frac{1}{3}$　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{1}{5}$　（D）$\frac{1}{6}$

（8）设 α,β 是两个不同的平面，直线 $m\subset\alpha$，则“对 β 内的任意直线 l，都有 $m\perp l$”是“$\alpha\perp\beta$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知函数 $f(x)=\cos 2x$ 在区间 $[t, t+\frac{\pi}{3}]$ $(t\in\mathbf{R})$ 上的最大值为 $M(t)$，则 $M(t)$ 的最小值为

（A）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$-\frac{1}{2}$

（10）在实际生活中，常常要用到如图 1 所示的“直角弯管”. 它的制作方法如下：如图 2，用一个与圆柱底面所成角为 45°的平面截圆柱，将圆柱截成两段，再将这两段重新拼接就可以得到“直角弯管”. 在制作“直角弯管”时截得的截口是一个椭圆，若将圆柱被截开的一段（如图 3）的侧面沿着圆柱的一条母线剪开，并展开成平面图形，则截口展开形成的图形恰好是某正弦型函数的部分图象（如图 4）. 记该正弦型函数的最小正周期为 T，截口椭圆的离心率为 e. 若圆柱的底面直径为 2，则

（A）$T=2\pi$, $e=\frac{1}{2}$

（B）$T=2\pi$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（C）$T=4\pi$, $e=\frac{1}{2}$

（D）$T=4\pi$, $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$

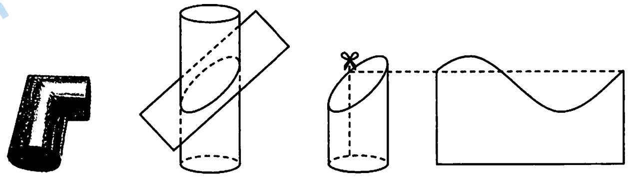


图 1　　图 2　　图 3　　图 4

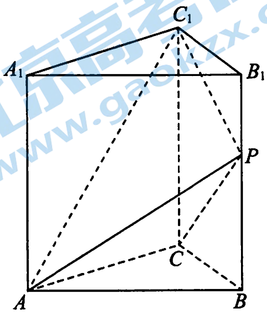
第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）抛物线 $y^2=2x$ 的焦点坐标为 ________.

（12）在 $(x-\frac{2}{x})^4$ 的展开式中，x^2 的系数为 ________.

（13）如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P 是棱 BB_1 上一点，$AB=AA_1=2$，则三棱锥 $P-ACC_1$ 的体积为 ________.



（14）设 O 为原点，双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 F，点 P 在 C 的右支上.

则 C 的渐近线方程是 ________；$\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OP}|}$ 的取值范围是 ________.

（15）已知函数 $f(x)=x^2-2x+2t$，$g(x)=e^x-t$. 给出下列四个结论：

① 当 $t=0$ 时，函数 $y=f(x)g(x)$ 有最小值；

② $\exists t\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f(x)g(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递增；

③ $\exists t\in\mathbf{R}$，使得函数 $y=f(x)+g(x)$ 没有最小值；

④ $\exists t\in\mathbf{R}$，使得方程 $f(x)+g(x)=0$ 有两个根且两根之和小于 2.

其中所有正确结论的序号是 ________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$．用五点法画 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}]$ 上的图象时，取点列表如下：

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0

(Ⅰ)直接写出 $f(x)$ 的解析式及其单调递增区间；

(Ⅱ)在 $\triangle ABC$ 中，$f(B)=\frac{1}{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$a+c=6$，求 $\triangle ABC$ 的面积．

(17)(本小题 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp DC$，$AB//DC$，$AB=\frac{1}{2}DC$，$PD=AD=1$，M 为棱 PC 的中点．

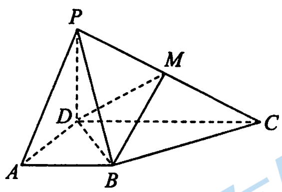
(Ⅰ)证明：$BM//$ 平面 PAD；

(Ⅱ)再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知，求二面角 $P-DM-B$ 的余弦值．

条件①：$PB=\sqrt{3}$；

条件②：$BD\perp BC$．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．



(18)(本小题 14 分)

H 地区农科所统计历年冬小麦每亩产量的数据，得到频率分布直方图(如图 1)，考虑到受市场影响，预测该地区明年冬小麦统一收购价格情况如表 1(该预测价格与亩产量互不影响)．

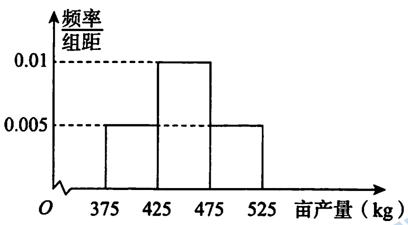


图 1

明年冬小麦统一收购价格（单位：元/kg）	2.4	3
概率	0.4	0.6

表 1

假设图 1 中同组的每个数据用该组区间的中点值估算，并以频率估计概率．

(Ⅰ)试估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率；

(Ⅱ)设 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 X 元，求 X 的分布列和数学期望；

(Ⅲ)H 地区农科所研究发现，若每亩多投入 125 元的成本进行某项技术改良，则可使每亩冬小麦产量平均增加 50 kg．从广大种植户的平均收益角度分析，你是否建议农科所推广该项技术改良？并说明理由．

(19)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)$.

(Ⅰ)判断 0 是否为 $f(x)$ 的极小值点，并说明理由;

(Ⅱ)证明: $\dfrac{f(x)}{x^2}>-\dfrac{1}{2}x+1$.

(20)(本小题 15 分)

已知椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $P(-2,1)$ 和 $Q(2\sqrt{2},0)$.

(Ⅰ)求椭圆 E 的方程;

(Ⅱ)过点 $G(0,2)$ 作直线 l 交椭圆 E 于不同的两点 A, B，直线 PA 交 y 轴于点 M，直线 PB 交 y 轴于点 N. 若 $|GM|\cdot|GN|=2$，求直线 l 的方程.

(21)(本小题 15 分)

对于一个有穷正整数数列 Q，设其各项为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，各项和为 $S(Q)$，集合 $\{(i,j)|a_i>a_j,1\le i<j\le n\}$ 中元素的个数为 $T(Q)$.

(Ⅰ)写出所有满足 $S(Q)=4$，$T(Q)=1$ 的数列 Q;

(Ⅱ)对所有满足 $T(Q)=6$ 的数列 Q，求 $S(Q)$ 的最小值;

(Ⅲ)对所有满足 $S(Q)=2023$ 的数列 Q，求 $T(Q)$ 的最大值.

海淀区2022—2023学年第一学期期末练习

高三数学

参考答案

一、选择题

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	D	B	C	B	C	A	D	B

二、填空题

（11）$(\frac{1}{2},0)$　　（12）-8　　（13）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

（14）$y=\pm\sqrt{3}x$；$(1,2]$　　（15）①②④

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}]\ (k\in\mathbf{Z})$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(B)=\sin(2B+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

因为 $0<B<\pi$，

所以 $\frac{\pi}{6}<2B+\frac{\pi}{6}<2\pi+\frac{\pi}{6}$.

所以 $2B+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

即 $B=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

即 $12=a^2+c^2-ac$.

即 $12=(a+c)^2-3ac$.

即 $12=36-3ac$.

即 $ac=8$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$.

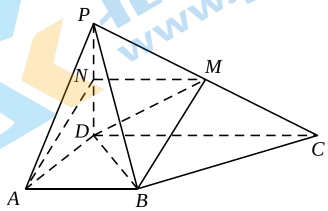
（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）取 PD 中点 N，连接 AN,MN.

在 $\triangle PCD$ 中，M,N 分别为 PC,PD 的中点，所以 $MN \parallel DC$，$MN=\frac{1}{2}DC$，

因为 $AB \parallel DC$，$AB=\frac{1}{2}DC$，

所以 $AB \parallel MN$，$AB=MN$.

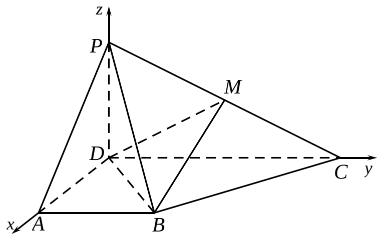


所以四边形 $ABMN$ 为平行四边形，因此 $BM \parallel AN$.

又因为 $BM \not\subset$ 平面 PAD，$AN \subset$ 平面 PAD，

所以 $BM \parallel$ 平面 PAD.

（Ⅱ）选择条件①



因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$，$AD,DC \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD \perp AD$，$PD \perp DC$. 又因为 $AD \perp DC$，

所以建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PD \perp BD$.

所以在 Rt$\triangle PBD$ 中，$PD=1$，$PB=\sqrt{3}$，可得 $BD=\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AD=1$，$BD=\sqrt{2}$，所以 $AB=1$，又因为 $AB=\frac{1}{2}DC$，所以 $DC=2$.

由题意得 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，$M(0,1,\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{DM}=(0,1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设平面 BDM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+\frac{1}{2}z=0,\\ x+y=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=1,z=2$.

所以平面 BDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$.

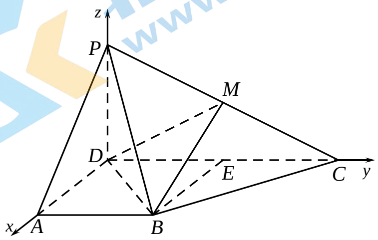
易知 $\overrightarrow{DA}$ 为平面 PDM 的一个法向量.

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DA}|}=\frac{1}{\sqrt{6}\cdot 1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

因为二面角 $P-DM-B$ 为钝角，所以二面角 $P-DM-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

选择条件②

因为 $PD \perp$ 平面 $ABCD$， $AD, DC \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD \perp AD$， $PD \perp DC$，又因为 $AD \perp DC$，所以建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$.



取 CD 的中点 E，连接 BE.

因为 $AB \parallel DC$， $AB=\frac{1}{2}DC$，所以 $AB \parallel DE$， $AB=DE$，

又因为 $AD \perp DC$，所以四边形 $ABED$ 为矩形.

在 $\triangle BCD$ 中，因为 $BD \perp BC$，所以 $BE=\frac{1}{2}DC$.

又因为 $AB=\frac{1}{2}DC$，所以 $AB=BE$.

所以四边形 $ABED$ 为正方形，即 $AB=AD=1$， $DC=2$.

由题意得 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,1)$，$M(0,1,\frac{1}{2})$，

所以 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$， $\overrightarrow{DM}=(0,1,\frac{1}{2})$， $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$.

设平面 BDM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+\frac{1}{2}z=0,\\ x+y=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=1, z=2$.

所以平面 BDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$.

易知 $\overrightarrow{DA}$ 为平面 PDM 的一个法向量.

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DA}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DA}|}=\frac{1}{\sqrt{6}\cdot 1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

因为二面角 $P-DM-B$ 为钝角，所以二面角 $P-DM-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由图可知，亩产量是 400 kg 的概率约为 $0.005\times 50=0.25$，亩产量是 450 kg 的概率约为 $0.01\times 50=0.5$，亩产量是 500 kg 的概率约为 $0.005\times 50=0.25$.

估计 H 地区明年每亩冬小麦统一收购总价为 1500 元的概率为 $0.25\times 0.6=0.15$.

（Ⅱ） X 的所有可能取值为 960，1080，1200，1350，1500.

$P(X=960)=0.25\times 0.4=0.1$， $P(X=1080)=0.5\times 0.4=0.2$，

$P(X=1200)=0.25\times 0.4+0.25\times 0.6=0.1+0.15=0.25$，

$P(X=1350)=0.5\times 0.6=0.3$， $P(X=1500)=0.25\times 0.6=0.15$.

X 的分布列为

X	960	1080	1200	1350	1500
P	0.1	0.2	0.25	0.3	0.15

$E(X)=960\times0.1+1080\times0.2+1200\times0.25+1350\times0.3+1500\times0.15=1242$.

（3）建议农科所推广该项技术改良.

设增产前每亩冬小麦产量为ξ kg，增产后每亩冬小麦产量为η kg，则$\eta=\xi+50$.

设增产后的每亩冬小麦总价格为 Y 元，

由分析可知 $E(Y)=E(X)+50\times(2.4\times0.4+3\times0.6)$

所以增产的 50 kg 会产生增加的收益是$50\times(2.4\times0.4+3\times0.6)=138>125$，故建议农科所推广该项技术改良.

19. （本小题 14 分）

（Ⅰ）解法一：0 是 $f(x)$ 的极小值点，

理由如下：

当 $x>0$ 时，$\ln(x+1)>0$，所以 $f(x)=x\ln(x+1)>0$.

当 $-1<x<0$ 时，$0<x+1<1$，可知 $\ln(x+1)<0$，所以 $f(x)=x\ln(x+1)>0$.

而 $f(0)=0$，

由极小值点的定义知，0 是 $f(x)$ 的极小值点.

（Ⅰ）解法二：0 是 $f(x)$ 的极小值点，

理由如下：

对函数求导得 $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$.

当 $x>0$ 时，$\ln(x+1)>0,\dfrac{x}{x+1}>0$，

所以 $f'(x)>0$.

当 $-1<x<0$ 时，$0<x+1<1$，可知 $\ln(x+1)<0,\dfrac{x}{x+1}<0$，

所以 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增,在区间 $(-1,0)$ 上单调递减.

所以 0 是 $f(x)$ 的极小值点.

（Ⅱ）证明：$\dfrac{f(x)}{x^2}>-\dfrac{1}{2}x+1$ 等价于 $\dfrac{\ln(x+1)}{x}>-\dfrac{1}{2}x+1$，即 $\dfrac{\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x}{x}>0$.

记 $g(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}x^2-x\ (x>-1)$.

求导得 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}+x-1=\dfrac{x^2}{x+1}$.

当 $x>-1$ 时易知 $g'(x)\geq0$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0)=0$，

可得当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，

即当 $x>0$ 时，不等式 $\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x>0$ 成立.

即当 $x>0$ 时，不等式 $\frac{f(x)}{x^2}>-\frac{1}{2}x+1$ 成立.

当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<g(0)=0$，

即当 $-1<x<0$ 时，不等式 $\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2-x<0$ 成立.

即当 $-1<x<0$ 时，不等式 $\frac{f(x)}{x^2}>-\frac{1}{2}x+1$ 成立.

综合上述，不等式 $\frac{f(x)}{x^2}>-\frac{1}{2}x+1$ 成立.

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）将点 $P(-2,1)$，$Q(2\sqrt{2},0)$ 坐标带入椭圆 E 的方程，得

$$\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ \frac{8}{a^2}=1.\end{cases}$$ 解得 $a^2=8,b^2=2$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）若直线 l 斜率不存在，即直线 l 为 $x=0$ 时，A 和 M 点重合，B 和 N 点重合，分别为椭圆的上下顶点 $(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})$，此时 $|GM|\cdot|GN|=(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})=2$，符合题意.

若直线 l 斜率存在，设直线 AB 的方程为 $y=kx+2$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$（$x_1\neq-2$ 且 $x_2\neq-2$）.

联立方程 $\begin{cases}y=kx+2\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得，$(4k^2+1)x^2+16kx+8=0$.

$\Delta=(16k)^2-32(4k^2+1)=32(4k^2-1)>0$，$\therefore k^2>\frac{1}{4}$，即 $k>\frac{1}{2}$ 或 $k<-\frac{1}{2}$.

$x_1+x_2=\frac{-16k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8}{4k^2+1}$.

$k_{PA}=\frac{y_1-1}{x_1+2}$，所以直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1+2}(x+2)+1$，取 $x=0$ 得 $M(0,\frac{2(y_1-1)}{x_1+2}+1)$.

同理可得 $N(0,\frac{2(y_2-1)}{x_2+2}+1)$.

由 $|GM|\cdot|GN|=2$ 得 $\left|\frac{2(y_1-1)}{x_1+2}+1-2\right|\cdot\left|\frac{2(y_2-1)}{x_2+2}+1-2\right|=2$，

即 $\left|\frac{2(kx_1+1)}{x_1+2}-1\right|\cdot\left|\frac{2(kx_2+1)}{x_2+2}-1\right|=2$.

所以 $(2k-1)^2\left|\frac{x_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2}{x_2+2}\right|=2$，

即 $(2k-1)^2\left|\dfrac{x_1x_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|=2$.

$$(2k-1)^2\left|\dfrac{\dfrac{8}{4k^2+1}}{\dfrac{8}{4k^2+1}-\dfrac{32k}{4k^2+1}+4}\right|=2,$$

即 $\dfrac{(2k-1)^2}{|4k^2-8k+3|}=1$，

因为 $k>\dfrac{1}{2}$，

所以得 $\dfrac{|2k-1|}{|2k-3|}=1$，

即 $k=1$.

经检验符合题意，此时直线 l 为 $y=x+2$.

综上所述，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=x+2$.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）1,2,1 和 3,1.

（Ⅱ）$S(Q)$ 的最小值为 7.

首先证明 $S(Q)\geqslant 7$：由题知 $C_n^2\geqslant 6$ 得 $n\geq 4$.

① 当 $n=4$ 时，应有数列中各项均不相同，此时有 $S(Q)\geq 1+2+3+4=10$；

② 当 $n=5$ 时，由于数列中各项必有不同的数，进而有 $S(Q)\geq 6$. 若 $S(Q)=6$，满足上述要求的数列中有四项为 1，一项为 2，此时 $T(Q)\leq 4$，不符；

③ 当 $n\geqslant 6$ 时，同②可得 $S(Q)\geqslant 7$.

综上所述，有 $S(Q)\geqslant 7$. 同时当 Q 为 2,2,1,1,1 时，$S(Q)=7$，所以 $S(Q)$ 的最小值为 7.

（Ⅲ）$T(Q)$ 的最大值为 511566.

下面分五步证明当 $T(Q)$ 最大时，数列 Q 应满足：

① 存在大于 1 的项，否则此时有 $T(Q)=0$；

② $a_n=1$，否则将 a_n 拆分成 a_n 个 1 后 $T(Q)$ 变大；

③ 当 $t=1,2,\cdots,n-1$ 时，有 $a_t\geqslant a_{t+1}$，否则交换 a_t,a_{t+1} 的顺序后 $T(Q)$ 变为 $T(Q)+1$.
进一步有 $a_t-a_{t+1}\in\{0,1\}$，否则有 $a_t\geqslant a_{t+1}+2$，此时将 a_t 改为 a_t-1，并在数列末尾添加一项 1，此时 $T(Q)$ 变大；

④ 各项只能为 2 或 1，否则由①②③可得数列 Q 中存在相邻的两项 $a_t=3,\ a_{t+1}=2$，设此时 Q 中有 x 项为 2，则将 a_t 改为 2，并在数列末尾添加一项 1 后，$T(Q)$ 的值至少变为 $T(Q)+x+1-x=T(Q)+1$；

⑤ 由上可得数列 Q 为 $2,2,\cdots,2,1,1,\cdots 1$ 的形式，设其中有 x 项为 2，有 y 项为 1，则有 $2x+y=2023$，

从而有 $T(Q)=xy=(2023-2x)x=-2x^2+2023x$，由二次函数性质可得，当且仅当 $\begin{cases} x=506 \\ y=1011 \end{cases}$ 时，

$T(Q)$ 最大，为 511566.

综上可得 $T(Q)$ 的最大值为 511566.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ＂ 精益求精、专业严谨 ＂ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。