

2018 北京市东城区高一（上）期末

数 学

本试卷共 100 分，考试时长 120 分钟。

第一部分（选择题 共 39 分）

一、选择题：本大题共 13 小题，每小题 3 分，共 39 分。在每个小题给出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \{x | x \text{ 是小于 9 的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, 则 $C_U A$ 等于

- A. $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ B. $\{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$
C. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ D. $\{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

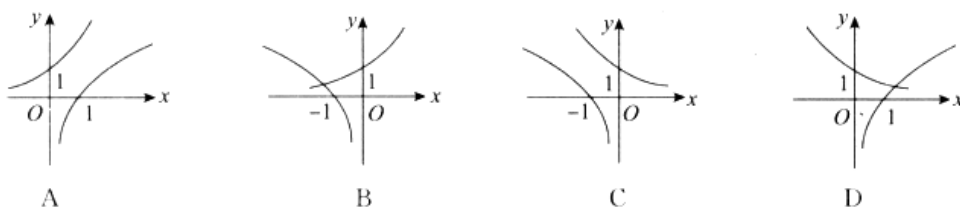
2. 函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期是

- A. π B. 2π C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{4}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数，它的定义域为 $\{x | -1 < x < 2a - 1\}$, 则 a 的值为

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

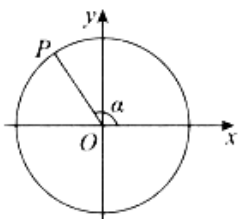
4. 在同一平面直角坐标系内， $y = 2^x$ 与 $y = \log_2(-x)$ 的图象可能是



5. 函数 $f(x) = x^3 + x^2$ 的零点的个数是

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 如图所示，角 α 的终边与单位圆交于点 P ，已知点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, 则 $\tan 2\alpha =$



- A. $\frac{24}{25}$ B. $-\frac{24}{25}$ C. $\frac{24}{7}$ D. $-\frac{24}{7}$

7. 函数 $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $x \in [-\pi, \pi]$ 是

- A. 增函数 B. 减函数 C. 偶函数 D. 奇函数

8. 把 $\sin(x - \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 可化简为

- A. $\sqrt{2} \cos x$ B. $\sqrt{2} \sin x$ C. $-\sqrt{2} \sin x$ D. $-\sqrt{2} \cos x$

9. 函数 $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{6})$, $x \in [0, \frac{11\pi}{6}]$ 的单调递减区间是

- A. $[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$ B. $[0, \frac{\pi}{6}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$

10. 若 $2\sqrt{3}\sin(x + \varphi) = \sqrt{3}\sin x - 3\cos x$, $\varphi \in (-\pi, \pi)$, 则 φ 等于

- A. $-\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{6}$ D. $-\frac{5\pi}{6}$

11. 已知 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_2 3$, $c = \log_{0.2} 0.3$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

12. 已知 $f(x) = f(2-x)$, $x \in R$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 为增函数, 设 $a = f(1)$, $b = f(2)$, $c = f(-1)$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

13. 渔民出海打鱼, 为了保证获得的鱼新鲜, 鱼被打上岸后, 要在最短的时间内将其分拣、冷藏, 若不及时处理, 打上来的鱼会很快地失去新鲜度 (以鱼肉里含有三甲胺量的多少来确定鱼的新鲜度。三甲胺是一种挥发性碱性氨, 是胺的类似物, 它是由细菌分解作用产生的, 三甲胺量积聚就表明鱼的新鲜度下降, 鱼体开始变质进而腐败)。已知某种鱼失去的新鲜度 h 与其出海后时间 t (分) 满足的函数关系式为 $h(t) = m \cdot a^t$, 若出海后 10 分钟, 这种鱼失去的新鲜度为 10%, 出海后 20 分钟, 这种鱼失去的新鲜度为 20%, 那么若不及时处理, 打上来的这种鱼会在多长时间后开始失去全部新鲜度 (已知 $\lg 2 = 0.3$, 结果取整数)

- A. 33 分钟 B. 43 分钟 C. 50 分钟 D. 56 分钟

第二部分 (非选择题 共 61 分)

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分。

14. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2x$ 的最小值是_____。

15. 已知幂函数 $f(x)$, 它的图象过点 $(\frac{1}{2}, 4)$, 那么 $f(8)$ 的值为_____。

16. 函数 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)}$ 的定义域用集合形式可表示为_____。

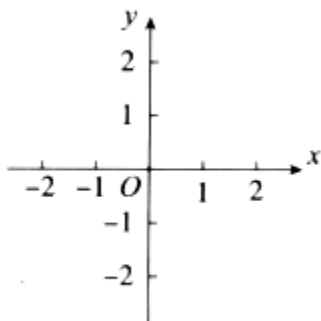
17. 红星学校高一年级开设人文社科、英语听说、数理竞赛三门选修课, 要求学生至少选修一门。某班 40 名学生均已选课, 班主任统计选课情况如下表, 由统计结果分析该班三科都选报的学生有_____人。

选择英语听说的人数	25
选择人文社科的人数	21
选择数理竞赛的人数	16
选择英语听说及数理竞赛的人数	8
选择英语听说及人文社科的人数	11
选择人文社科及数理竞赛的人数	5

三、解答题：本大题共 5 小题，共 49 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. （本题满分 10 分）

$$\text{已知函数 } f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



（I）求 $f(-\frac{2}{3})$, $f(\frac{1}{2})$ 的值；

（II）作出函数 $y = f(x)$ 的简图；

（III）由简图指出函数 $f(x)$ 的值域。

19. （本题满分 10 分）

$$\text{已知函数 } f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

（I）若 $f(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，求 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值；

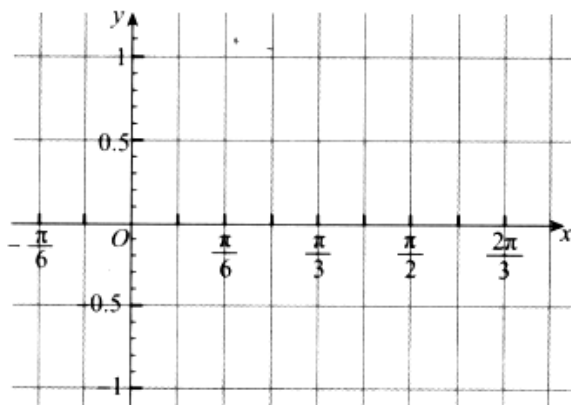
（II）设函数 $g(x) = 2[f(x)]^2 + \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ ，求函数 $g(x)$ 的值域。

20. （本题满分 10 分）

$$\text{已知函数 } f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}), 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}.$$

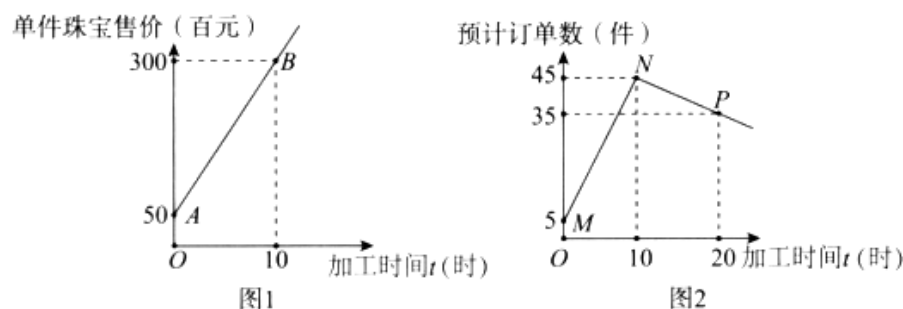
（I）列表，描点画出函数 $y = f(x)$ 的简图，并由图象写出函数 $f(x)$ 的单调区间及最值；

（II）若 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$)，求 $f(x_1 + x_2)$ 的值。



21. (本题满分 10 分)

珠宝加工匠人贾某受命单独加工某种珠宝首饰若干件，要求每件首饰都按统一规格加工，单件首饰的原材料成本为 25 (百元)，单件首饰设计的越精致，做工要求就越高，耗时也就越多，售价也就越高，单件首饰加工时间 t (单位：时， $t \in \mathbb{N}$) 与其售价间的关系满足图 1 (由射线 AB 上离散点构成)，首饰设计得越精致，就越受到顾客喜爱，理应获得的订单就越多，但同时，价格也是一个不可忽视的制约顾客选择的因素，单件首饰加工时间 t (时) 与预计订单数的关系满足图 2 (由线段 MN 和射线 NP 上离散点组成)。原则上，单件首饰的加工时间不能超过 55 小时，贾某的报酬为这批首饰销售毛利润的 5%，其他成本概不计算。



(I) 如果贾某每件首饰加工 12 小时，预计会有多少件订单；

(II) 设贾某生产这批珠宝首饰产生的利润为 S ，请写出加工时间 t (时) 与利润 S 之间的函数关系式，并求利润 S 最大时，预计的订单数。

注：利润 $S = (\text{单件售价} - \text{材料成本}) \times \text{订单件数} - \text{贾某工资}$

毛利润 = 总销售额 - 材料成本

22. (本题满分 9 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$, $g(x) = f(x) - 3$ 。

(I) 判断并证明函数 $g(x)$ 的奇偶性；

(II) 判断并证明函数 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性；

(III) 若 $f(m^2 - 2m + 7) \geq f(2m^2 - 4m + 4)$ 成立，求实数 m 的取值范围。

数学试题答案

一、选择题：本大题共 13 小题，每小题 3 分，共 39 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
答案	A	A	D	B	C	C	D	D	D	A	B	D	B

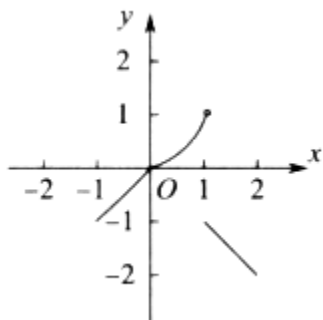
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分。

题号	14	15	16	17
答案	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{64}$	$\{x \frac{1}{2} < x \leq 1\}$	2

三、解答题：本大题共 5 小题，共 49 分。

18. 解：(I) $f(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}, f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. 6 分

(II) 简图如下图所示：



8 分

(III) 由 (II) 的图象知，函数的值域是 $[-2, 1)$ 。 10 分

19. 解：(I) $\because f(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$$\therefore \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}. \quad 6 \text{ 分}$$

$$(II) \quad g(x) = 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(2x + \frac{\pi}{6})$$

$$= 1 - \cos(2x - \frac{\pi}{2}) + \cos(2x + \frac{\pi}{6})$$

$$= 1 - \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{3}{2} \sin 2x + 1$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) + 1$$

$$= \sqrt{3} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1,$$

$$\because -1 \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1,$$

$$\therefore 1 - \sqrt{3} \leq \sqrt{3} \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \leq 1 + \sqrt{3},$$

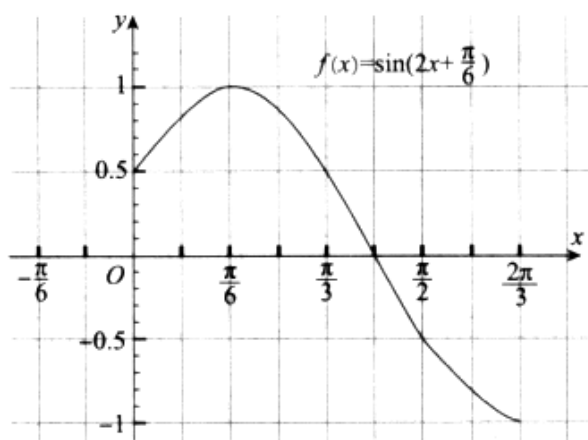
$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 的值域为 } [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}].$$

10 分

20. 解: (I) 列表如下:

$2x + \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1

作出函数 $y = f(x)$ 的简图如图所示:



由图象可知, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[0, \frac{\pi}{6}]$, 单调递减区间是 $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$;

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 1; 当 $x = \frac{2\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 -1。 7 分

(II) 若 $f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2)$, 由 (I) 中简图知, 点 $(x_1, f(x_1))$ 与点 $(x_2, f(x_2))$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称。

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{于是 } f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

10 分

21. 解: (I) 预计订单函数 $f(t) (t \in N)$ 为

$$f(t) = \begin{cases} 4t + 5, 0 \leq t \leq 10, \\ -t + 55, 10 < t \leq 55. \end{cases}$$

$$\therefore f(12) = -12 + 55 = 43. \quad 6 \text{ 分}$$

(II) 预计订单函数为

$$f(t) = \begin{cases} 4t + 5, 0 \leq t \leq 10, \\ -t + 55, 10 < t \leq 55. \end{cases}$$

售价函数为 $g(t) = 25t + 50$ 。

$\therefore$ 利润函数为

$$S(t) = \begin{cases} (25t + 50 - 25)(4t + 5)(1 - 5\%), 0 \leq t \leq 10, \\ (25t + 50 - 25)(-t + 55)(1 - 5\%), 10 < t \leq 55. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{95}{4}(t+1)(4t+5), 0 \leq t \leq 10, \\ -\frac{95}{4}(t+1)(t-55), 10 < t \leq 55. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{95}{4}(4t^2 + 9t + 5), 0 \leq t \leq 10, \\ -\frac{95}{4}(t^2 - 54t - 55), 10 < t \leq 55. \end{cases}$$

故利润最大时, $t = 27$, 此时预计的订单数为 28 件。 10 分

22. 解: (I) $g(x)$ 为奇函数。证明如下: 函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0, \text{且} x \neq 1, \text{且} x \neq -1\}$,

$$\because g(x) = f(x) - 3 = \frac{-1}{x-1} + \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x+1},$$

$$g(-x) = \frac{-1}{-x-1} + \frac{-1}{-x} + \frac{-1}{-x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}, -g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1},$$

$\therefore g(-x) = -g(x)$, 故 $g(x)$ 为奇函数。 3 分

(II) $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 任取 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{则 } g(x_1) - g(x_2) = \frac{-1}{x_1-1} + \frac{-1}{x_1} + \frac{-1}{x_1+1} - \left(\frac{-1}{x_2-1} + \frac{-1}{x_2} + \frac{-1}{x_2+1} \right)$$

$$= \frac{-1}{x_1-1} - \frac{-1}{x_2-1} + \frac{-1}{x_1} - \frac{-1}{x_2} + \frac{-1}{x_1+1} - \frac{-1}{x_2+1}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}$$

$$= (x_1 - x_2) \left[\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right].$$

$$\because x_1, x_2 \in (1, +\infty), x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_1 - x_2 < 0, \frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} > 0, \frac{1}{x_1 x_2} > 0, \frac{1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0,$$

$$\therefore g(x_1) - g(x_2) < 0, \text{ 即 } g(x_1) < g(x_2), \text{ 故 } g(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增。} \quad 6 \text{ 分}$$

(III) 由 $f(x) = g(x) + 3$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } m^2 - 2m + 7 \geq 6, 2m^2 - 4m + 4 \geq 2 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{故 } m^2 - 2m + 7 \geq 2m^2 - 4m + 4,$$

$$\text{即 } m^2 - 2m - 3 \leq 0,$$

$$\text{解得 } -1 \leq m \leq 3. \quad 9 \text{ 分}$$

注: 若学生有其他解法, 可参考给分。

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980