华大新高考联盟 2023 年名校高考预测卷(全国卷)

文科数学

审订单位:华中师范大学考试研究院

本试题卷共 4 页,共 23 题。满分 150 分,考试用时 120 分钟

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

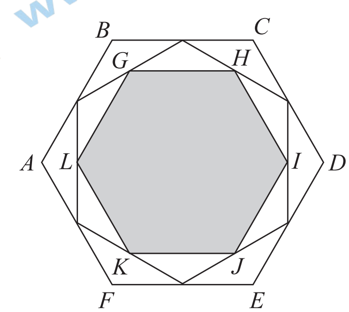
1. 若集合 $A=\{x\mid x(x+4)<0\}$,$B=\left\{y\middle|y=\frac{x}{4}+\frac{9}{x},x<0\right\}$,则 $A\cap B=$

A. $\left(-4,-\frac{3}{2}\right]$　　B. $(-4,-3]$　　C. $[-3,0)$　　D. $\left[-\frac{3}{2},0\right)$

2. $\frac{2-3i}{1+2i}+(4-i)\cdot i^{2\,023}$ 的虚部为

A. $-\frac{27}{5}$　　B. $-\frac{9}{5}$　　C. $-\frac{11}{5}$　　D. $-\frac{3}{5}$

3. 中心对称图形的叠加会产生对称美的效果,现有如下叠加:在正六边形 $ABCDEF$ 中,取六条边的中点顺次连接,得到一个六边形,将上述步骤再重复一次,得到六边形 $GHIJKL$ 如图所示,则往正六边形 $ABCDEF$ 中任意投掷一点,该点落在六边形 $GHIJKL$ 内的概率为



A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{9}{16}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. 已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$,$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,若 $f(x)=\frac{f(ex)}{\alpha+1}$,则下列说法正确的是

A. 函数 $f(x)$ 为奇函数　　B. 函数 $f(x)$ 为偶函数

C. 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增　　D. 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

5. 已知首项为$\frac{1}{2}$的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$(S_{n+1}-S_n)(a_n+1)+1=a_n$，则$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{2\,023}=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $-\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{3}$

6. 已知平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=4$，则$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$夹角的余弦值为

A. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $-\frac{\sqrt{6}}{12}$　　C. $-\frac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

7. 阿基米德在他的著作《关于圆锥体和球体》中计算了一个椭圆的面积. 当我们垂直地缩小一个圆时，我们得到一个椭圆. 椭圆的面积等于圆周率π与椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的面积为21π，点P在椭圆C上，且点P与椭圆C左、右顶点连线的斜率之积为$-\frac{9}{49}$，记椭圆C的两个焦点分别为F_1，F_2，则$|PF_1|$的值不可能为

A. 4　　B. 7　　C. 10　　D. 14

8. 已知在边长为2的正方体$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$中，点M在线段B_1D_1上（含端点位置），现有如下说法：①CM//平面A_1BD；②$CM\perp AC_1$；③点M到平面ABC_1D_1的距离的最大值为1. 则正确说法的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点$M$，$N$在双曲线$C$上，$P(-a,0)$. 若$\triangle PMN$为等边三角形，且$|PF_2|=|F_2M|=|F_2N|$，则双曲线$C$的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}x$　　C. $y=\pm x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$

10. 已知正数a,b,c满足$a,b,c\neq 1$，$a<b<c$，且$a+b=c$，记$m=\log_c(a^x+b^x)$，$n=\log_b(c^x-a^x)$，现有如下说法：

①若$a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(1,+\infty)$，都有$m<n<x$；

②若$a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(0,1)$，都有$n<x<m$；

③若$a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(0,+\infty)$，都有$|m-x|\leqslant|n-x|\leqslant|m-n|$；

④若$a,b,c\in(0,1)$，则$\forall x\in[1,+\infty)$，都有$|n-x|\leqslant|m-x|\leqslant|m-n|$.

则正确说法的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知函数$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot|\sin x+\cos x|$，则下列说法错误的是

A. 函数$f(x)$的最小正周期为2π

B. 函数$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$上单调递减

C. 若$f(x_1)+f(x_2)=-\sqrt{2}$，则x_1+x_2的值可以是$\frac{3\pi}{2}$

D. 函数$g(x)=4f(x)-x$有4个零点

12. 已知函数$f(x)=(x^2+1)e^x$，若对任意$0<x_2<x_1$，$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{e^{x_1}+e^{x_2}}<\lambda(e^{x_1}-e^{x_2})$恒成立，则实数$\lambda$的取值范围为

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $(-\infty,3]$　　D. $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 为了反映城市的人口数量 x 与就业压力指数 y 之间的变量关系,研究人员选择使用非线性回归模型 $y=e^{-\frac{9}{10}}\cdot e^{\frac{7}{10}x}$ 对所测数据进行拟合,并设 $z=\ln y$,得到的数据如表所示,则 $c=$________.

x	4	6	8	10
z	2	c	5	6

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^{2-x},x\geqslant 2,\\4^{x-2},x<2,\end{cases}$ 则 $f(2x-2)\geqslant f(x+1)$ 的解集为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $a_n=\dfrac{S_n+1}{2}$,首项为 1 的正项数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n=(a_n\cdot b_n)^n$,则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $Q_n=$________.

16. 已知长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=BC<BB_1$,点 M 是线段 CC_1 上靠近点 C 的三等分点,记直线 A_1B,AD_1 的夹角为 α_1,直线 A_1B,BD 的夹角为 α_2,直线 AM,BD 的夹角为 α_3,则 α_1、α_2、α_3 之间的大小关系为________.(横线上按照从小到大的顺序进行书写)

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生按照要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17.(12 分)

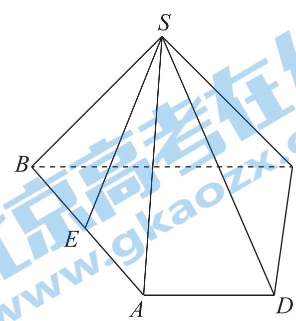
已知在△ABC 中,角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,其中 $\tan 2C=\dfrac{3}{4}$,C 为钝角,且 $\dfrac{b}{a}\cos A=2\cos B$.

(1)求角 B 的大小;

(2)若△ABC 的面积为 6,求△ABC 的周长.

18.(12 分)

如图所示,四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中,点 E 在线段 AB 上(不含端点位置),$\angle ABC=\dfrac{1}{2}\angle BAD=60°$,$AB=BC=SA=\sqrt{2}SB=\sqrt{2}SC=2AD=4$.

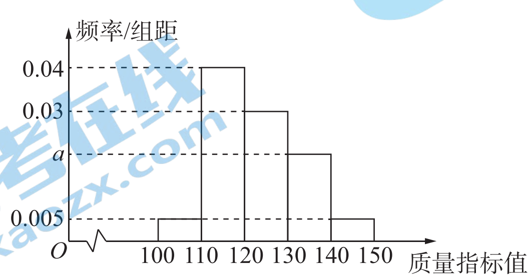


(1)求证:平面 $SBC\perp$ 平面 $ABCD$;

(2)若四面体 $BCSE$ 的体积为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,判断△BCE 是否为直角三角形.若是,请指出哪个角是直角,若不是,请说明理由.

19.(12 分)

为了检查工厂生产的某产品的质量指标,随机抽取了部分产品进行检测,所得数据统计如下图所示.



(1)求 a 的值以及这批产品质量指标的平均值;

(2)若按照分层的方法从质量指标值在[110,130)的产品中随机抽取 7 件,再从这 7 件中随机抽取 2 件,求至少有一件的指标值在[120,130)的概率;

(3)为了调查 A、B 两个机器与其生产的产品质量是否具有相关性，以便提高产品的生产效率，质检人员选取了部分被抽查的产品进行了统计，所得数据如下表所示，判断是否有 99.9%的把握认为机器类型与生产的产品质量具有相关性.

	A 机器生产	B 机器生产
优质品	200	80
合格品	120	80

附：

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$k=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

20.(12 分)

已知圆 C_1 过点$(-3,0)$，$(-1,2)$，$(1,0)$，抛物线 C_2：$y^2=2px(p>0)$过点 $A\left(\dfrac{1}{4},1\right)$.

(1)求圆 C_1 的方程以及抛物线 C_2 的方程；

(2)过点 A 作抛物线 C_2 的切线 l 与圆 C_1 交于 P,Q 两点，点 B 在圆 C_1 上，且直线 BP，BQ 均为抛物线 C_2 的切线，求满足条件的所有点 B 的坐标.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x+\lambda x^2$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线与直线 $x-y=0$ 相互垂直，探究函数 $f(x)$的单调性；

(2)若函数 $g(x)=f(x)+e^{x-1}$有唯一的极值 0，求 λ 的值.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多选，则按所做的第一题计分。

22.(10 分)[选修 4—4：坐标系与参数方程]

已知在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\dfrac{t^2+2}{t},\\ y=\dfrac{3t^4-18}{5t},\end{cases}$($t$ 为参数). 以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，点 $P\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，曲线 C'的极坐标方程为 $\rho=6\sin\theta$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=3$，且直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点.

(1)求△PAB 的面积；

(2)若△OAB 的外接圆与曲线 C'交于 M,N 两点，求直线 MN 的极坐标方程.

23.(10 分)[选修 4—5：不等式选讲]

已知函数 $f(x)=|ax+1|$，且 $f(x)\leqslant 4$ 的解集为$\left[-\dfrac{5}{3},1\right]$.

(1)求不等式 $f(x)+|x+3|>6$ 的解集；

(2)若关于 x 的不等式 $f(p)-3^q\leqslant|3p-2|+\lambda\cdot 3^{-q}$对任意的 p,q 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

机密★启用前(全国卷文科数学)

华大新高考联盟2023年名校高考押题卷

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【命题立意】本题考查集合的运算、一元二次不等式的解法、对勾函数的值域，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$A=\{x|x(x+4)<0\}=\{x|-4<x<0\}$，$B=\left\{y\left|y=\frac{x}{4}+\frac{9}{x},x<0\right.\right\}=\{y|y\leqslant-3\}$，故 $A\cap B=(-4,-3]$，故选 B.

2.【答案】A

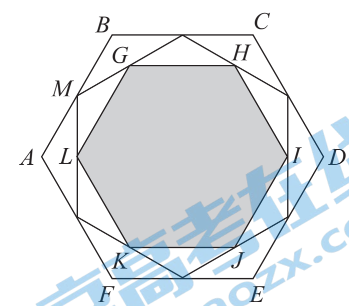
【命题立意】本题考查复数的运算、复数的概念，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$\frac{2-3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+(4-\mathrm{i})\mathrm{i}^{2\,023}=\frac{(2-3\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}-(4-\mathrm{i})\mathrm{i}=\frac{-4-7\mathrm{i}}{5}-4\mathrm{i}-1=-\frac{9}{5}-\frac{27}{5}\mathrm{i}$，故所求虚部为 $-\frac{27}{5}$，故选 A.

3.【答案】C

【命题立意】本题考查几何概型，考查数学运算、逻辑推理、直观想象、数学建模的核心素养.

【解析】不妨设 $AB=4$，则 $GL=2\cdot GM\cdot\cos 30^\circ=2\cdot BM\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ=3$，故所求概率 $P=\frac{6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2}{6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2}=\frac{9}{16}$，故选 C.



4.【答案】B

【命题立意】本题考查幂函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$x^\alpha=\frac{\mathrm{e}^\alpha x^\alpha}{\alpha+1}$，则 $\mathrm{e}^\alpha=\alpha+1$，易知该方程有唯一解 $\alpha=0$，故 $f(x)=x^0$，易知该函数为偶函数，故选 B.

5.【答案】D

【命题立意】本题考查数列的递推公式、数列的周期性，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$a_{n+1}(a_n+1)+1=a_n$，则 $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$；而 $a_1=\frac{1}{2}$，则 $a_2=-\frac{1}{3}$，$a_3=-2$，$a_4=3$，$a_5=\frac{1}{2}$，…，故数列 $\{a_n\}$ 的周期为 4. 又 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4=1$，则 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{2\,023}=\frac{1}{3}$，故选 D.

6.【答案】A

【命题立意】本题考查平面向量的数量积，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

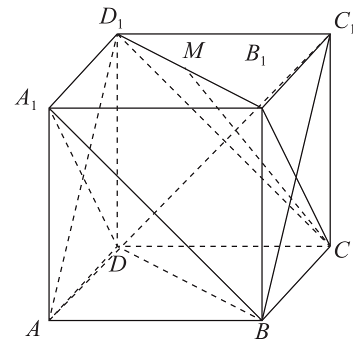
【解析】依题意，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{4}$，故 $|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{9-6\times\frac{3}{4}+9}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，故 $\cos\langle\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{3}{4}-3}{\frac{3\sqrt{6}}{2}\cdot 1}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，故选 A.

7.【答案】D

【命题立意】本题考查椭圆的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，得$\begin{cases} ab=21, \\ -\dfrac{b^2}{a^2}=-\dfrac{9}{49}, \end{cases}$解得 $a=7,b=3$，则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{10}$，故 $7-2\sqrt{10}=a-c\leqslant|PF_1|\leqslant c+a=2\sqrt{10}+7$，故选 D.

8.【答案】C



【命题立意】本题考查空间线面的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】因为平面 A_1BD∥平面 CB_1D_1，所以 CM∥平面 A_1BD，故①正确；因为 $AC_1\perp$平面 CB_1D_1，$CM\subset$平面 CB_1D_1，故 $CM\perp AC_1$，故②正确；当点 M 在端点 B_1 时，点 M 到平面 ABC_1D_1 的距离为最大值$\sqrt{2}$，故③错误. 故选 C.

9.【答案】D

【命题立意】本题考查双曲线的方程与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】由双曲线的对称性可知，点 M,N 在双曲线 C 的右支上，且$\angle MPF_2=30°$；又$|F_2P|=|F_2M|=a+c$，故$\angle PF_2M=120°$. 连接 F_1M，则$|F_1M|-|F_2M|=2a$，故$|F_1M|=3a+c$，在$\triangle MF_1F_2$ 中，由余弦定理可得$|F_1M|^2=|F_1F_2|^2+|F_2M|^2-2|F_1F_2||F_2M|\cos 120°$，即$(3a+c)^2=(2c)^2+(a+c)^2-2\times 2c\times(a+c)\times\cos 120°$，整理得 $4a^2+ac-3c^2=0$，解得$\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{3}$，故$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}x$，故选 D.

10.【答案】C

【命题立意】本题考查指对数函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

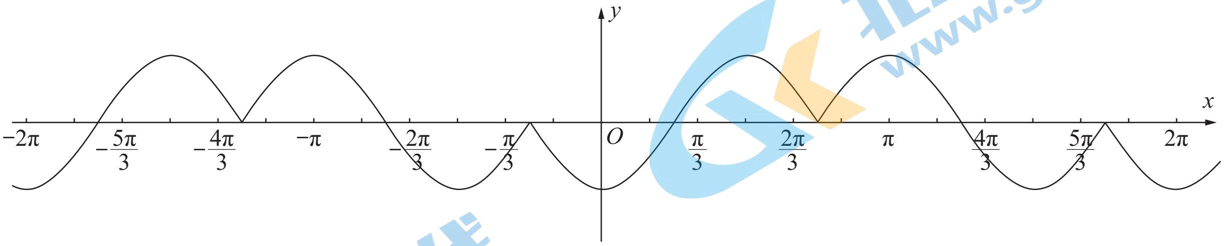
【解析】令 $m-x=\log_c(a^x+b^x)-\log_c c^x=\log_c\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^x+\left(\dfrac{b}{c}\right)^x\right]=f(x)$，因为 $y=\left(\dfrac{a}{c}\right)^x+\left(\dfrac{b}{c}\right)^x$ 在定义域上单调递减，$y=\log_c x$ 在定义域上单调递增，故 $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，故 $f(x)<f(1)=\log_c 1=0$，故 $m-x<0$，即 $m<x$；令 $n-x=\log_b(c^x-a^x)-\log_b b^x=\log_b\left[\left(\dfrac{c}{b}\right)^x-\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\right]=g(x)$，因为 $y=\left(\dfrac{c}{b}\right)^x-\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ 在定义域上单调递增，$y=\log_b x$ 在定义域上单调递增，故 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $g(x)>g(1)=\log_b 1=0$，故 $n-x>0$，即 $n>x$. 综上所述，若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(1,+\infty)$，都有 $1<m<x<n$，故①错误；同理可得，②正确；若 $x=1$，则$|m-x|=|n-x|=|m-n|=0$；若 $x>1$，由①的推论可知，$n>x>m>1$，则$|n-x|<|m-n|$，而 $c^m-b^x=c^x-b^n=a^x$，故$\dfrac{c^m-b^x}{b^m}>\dfrac{c^x-b^n}{b^x}$，则$\left(\dfrac{c}{b}\right)^m-b^{x-m}>\left(\dfrac{c}{b}\right)^x-b^{n-x}$，故 $b^{x-m}<b^{n-x}$，故 $0<x-m<n-x$，故$|m-x|<|n-x|<|m-n|$；若 $0<x<1$，同理可得，$|m-x|<|n-x|<|m-n|$；故若 $a,b,c\in(1,+\infty)$，则$\forall x\in(0,+\infty)$，都有$|m-x|\leqslant|n-x|\leqslant|m-n|$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，则③正确；同理可得，④正确. 故选 C.

11.【答案】D

【命题立意】本题考查三角函数的图象与性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot|\sin x+\cos x|=\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x, -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x, \dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi, \end{cases}$ $(k\in$

Z)，作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，观察可知，A、B 正确；若 $f(x_1)+f(x_2)=-\sqrt{2}$，可以取 $x_1=0$，$x_2=\frac{3\pi}{2}$，故 C 正确；由于 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{x}{4}$ 有 5 个交点，故函数 $g(x)=4f(x)-x$ 有 5 个零点，故 D 错误. 故选 D.



12.【答案】D

【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)=(x^2+2x+1)e^x=(x+1)^2e^x>0$，故 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+1)e^{x_1}-(x_2^2+1)e^{x_2}$，故 $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{e^{x_1}+e^{x_2}}<\lambda(e^{x_1}-e^{x_2})\Leftrightarrow(x_1^2+1)e^{x_1}-\lambda e^{2x_1}<(x_2^2+1)e^{x_2}-\lambda e^{2x_2}$，令 $g(x)=(x^2+1)e^x-\lambda e^{2x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=(x+1)^2e^x-2\lambda e^{2x}$，令 $g'(x)\leqslant 0$，故 $2\lambda\geqslant\frac{(x+1)^2}{e^x}$，令 $h(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$，故 $h'(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，即函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $2\lambda\geqslant h(1)=\frac{4}{e}$，解得 $\lambda\geqslant\frac{2}{e}$，故实数 λ 的取值范围为 $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$，故选 D.

二、填空题

13.【答案】3.

【命题立意】本题考查回归直线方程及其应用，考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】依题意，$z=\ln y=\ln(e^{-\frac{9}{10}}\cdot e^{\frac{7}{10}x})=\frac{7}{10}x-\frac{9}{10}$；而回归直线方程 $z=\frac{7}{10}x-\frac{9}{10}$ 过点 $\left(7,\frac{13+c}{4}\right)$，故 $\frac{13+c}{4}=\frac{7\times7}{10}-\frac{9}{10}$，解得 $c=3$.

14.【答案】$\left[\frac{5}{3},3\right]$.

【命题立意】本题考查分段函数的图象与性质、一元二次不等式的解法，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】依题意，$f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，且 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减；令 $g(x)=f(x+2)$ 为偶函数，故 $f(2x-2)\geqslant f(x+1)\Leftrightarrow f(2x-4+2)\geqslant f(x-1+2)\Leftrightarrow g(2x-4)\geqslant g(x-1)\Leftrightarrow|2x-4|\leqslant|x-1|\Leftrightarrow\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant 3$.

15.【答案】$\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}$.

【命题立意】本题考查等比数列的基本运算，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=\frac{S_1+1}{2}$，解得 $a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{S_n+1}{2}$，$a_{n-1}=\frac{S_{n-1}+1}{2}$，两式相减可得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项、2 为公比的等比数列，故 $a_n=2^{n-1}$. 记 $T_n=b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n=(2^{n-1}b_n)^n$，故当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{(2^{n-1}b_n)^n}{(2^{n-2}b_{n-1})^{n-1}}$，即 $b_n=\frac{2^{n(n-1)}(b_n)^n}{2^{(n-1)(n-2)}(b_{n-1})^{n-1}}$，故 $\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1}=\frac{2^{(n-1)(n-2)}}{2^{n(n-1)}}=\frac{1}{4^{n-1}}$，因

为 $b_n>0$，故 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{4}$，故数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项、$\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，故 $Q_n=\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}$.

16.【答案】$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$.

【命题立意】本题考查空间线面的位置关系，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】记 $BB_1=a$，$AB=BC=b$，故 $\cos\alpha_1=\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}>\frac{1}{2}$，故 $\alpha_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$\cos\alpha_2=\frac{b}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}<\frac{1}{2}$，故 $\alpha_2\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，易知 $\alpha_3=\frac{\pi}{2}$，故 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$.

三、解答题

17.【命题立意】本题考查正余弦定理、三角形的面积公式，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，有 $b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$，

由正弦定理，得 $\sin B\cdot\cos A=2\sin A\cdot\cos B$，则 $\tan B=2\tan A$. ……………………………… (1 分)

$\because \tan 2C=\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=\frac{3}{4}$，$\therefore 3\tan^2 C+8\tan C-3=0$. ……………………………… (2 分)

$\because C$ 为钝角，$\therefore \tan C=-3\left(\tan C=\frac{1}{3}\text{舍去}\right)$， ……………………………… (3 分)

$\therefore \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\frac{3\tan B}{\tan^2 B-2}=-3$， …………… (4 分)

解得 $\tan B=1$($\tan B=-2$ 舍去)，即 $B=\frac{\pi}{4}$. ……………………………… (5 分)

(2)$\because \tan C=-3$，$\therefore \sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$. ……………………………… (6 分)

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A=\pi-(B+C)$，

$\therefore \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……………………………… (8 分)

由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}$，$\therefore a=c\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{3}c$， ……………… (9 分)

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}c\times c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{c^2}{6}=6$，解得 $c=6$，$a=2\sqrt{2}$， …………… (11 分)

由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=2\sqrt{5}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6$. ……………………………… (12 分)

18.【命题立意】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的表面积与体积，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)证明：设点 M 为 BC 的中点，连接 SM，MA.

由题意得 $SM\perp BC$，且 $SM=2$， ……………………………… (1 分)

$\therefore$ 在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理可得 $MA=2\sqrt{3}$，则 $MA\perp BC$. ……………………………… (2 分)

易得 $MC/\!/AD$，且 $MC=AD=2$，则四边形 $AMCD$ 为矩形，$\therefore AM/\!/CD$. ……………………………… (3 分)

在 $\triangle SAM$ 中，$SA^2=AM^2+SM^2$，$\therefore SM\perp MA$， ……………………………… (4 分)

而 $MA\cap BC=M$，$\therefore SM\perp$ 平面 $ABCD$， ……………………………… (5 分)

而 $SM\subset$平面 SBC,故平面 $SBC\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………………………… (6 分)

(2)由(1)知平面 $ABCD\perp$平面 SBC,

设点 E 到平面 SBC 的距离为 h_E. ∴$V_{B\text{-}SEC}=V_{E\text{-}SBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle SBC}\cdot h_E=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, …………………………… (8 分)

∴$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times h_E=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,∴$h_E=\sqrt{3}=\frac{1}{2}AM$,∴点 E 为线段 AB 的中点, …………… (10 分)

在$\triangle EBC$ 中,$BC=4$,$\angle EBC=60°$,$EB=2$,易得$\angle BCE=30°$,$\angle BEC=90°$. …………………… (12 分)

19.【命题立意】本题考查频率分布直方图、独立性检验、古典概型的概率,考查数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】(1)由题图可知,$0.005\times2\times10+a\times10+0.03\times10+0.04\times10=1$,

解得 $a=0.02$, ………………………………………………………………………………………… (1 分)

质量指标的平均值 $\bar{x}=105\times0.05+115\times0.4+125\times0.3+135\times0.2+145\times0.05=123$. ……… (3 分)

(2)依题意,质量指标值在[110,120)的有 4 件,记为 1、2、3、4,质量指标值在[120,130)的有 3 件,记为 A、B、C,

则随机抽取 2 件,所有的情况为(1,2),(1,3),(1,4),(1,A),(1,B),(1,C),(2,3),(2,4),(2,A),(2,B),(2,C),(3,4),(3,A),(3,B),(3,C),(4,A),(4,B),(4,C),(A,B),(A,C),(B,C),共 21 件, … (5 分)

其中满足条件的为(1,A),(1,B),(1,C),(2,A),(2,B),(2,C),(3,A),(3,B),(3,C),(4,A),(4,B),(4,C),(A,B),(A,C),(B,C),共 15 件, ………………………………………………………………… (6 分)

故所求概率 $P=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}$. ………………………………………………………………………… (7 分)

(3)完善表格如下:

	A 机器生产	B 机器生产	总计
优质品	200	80	280
合格品	120	80	200
总计	320	160	480

在本次试验中,K^2 的观测值 $k=\frac{480\times(16\ 000-9\ 600)^2}{280\times200\times320\times160}\approx6.857<10.828$,

故没有 99.9%的把握认为机器类型与生产的产品质量具有相关性. ……………………………… (12 分)

20.【命题立意】本题考查抛物线的方程、圆的方程、直线与抛物线的位置关系,考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)设圆 C_1:$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

故$\begin{cases}9-3D+F=0,\\5-D+2E+F=0,\\1+D+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=2,\\E=0,\\F=-3,\end{cases}$ 故圆 C_1:$x^2+y^2+2x-3=0$, ……………………… (3 分)

将 $A\left(\frac{1}{4},1\right)$代入 $y^2=2px$ 中,解得 $p=2$,故抛物线 C_2 的方程为 $y^2=4x$. ……………………… (4 分)

(2)设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,设切线 l_{BP}:$x-x_1=t_1(y-y_1)$,l_{BQ}:$x-x_2=t_2(y-y_2)$,

过抛物线 C_2 上点 $A\left(\frac{1}{4},1\right)$的切线方程为 $y=2x+\frac{1}{2}$,

即 l_{PQ}:$x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}$,记 $t_0=\frac{1}{2}$. ① ……………………………………………………………… (5 分)

设过点 P 的直线 $x-x_1=t_1(y-y_1)$与抛物线 C_2 相切,代入抛物线方程 $y^2=4x$,

得 $y^2-4t_1y+4t_1y_1-4x_1=0$,

则 $\Delta=16t_1^2-16(t_1y_1-x_1)=0$，即 $t_1^2-y_1t_1+x_1=0$，所以 $\frac{1}{2}t_1=x_1$，$\frac{1}{2}+t_1=y_1$， …………………（7 分）

$t_1=2x_1=y_1-\frac{1}{2}$，所以 $2y_1=4x_1+1$，②，同理可得 $t_2=2x_2$，

所以切线 $l_{BP}:x-x_1=2x_1(y-y_1)$，$l_{BQ}:x-x_2=2x_2(y-y_2)$，

联立两式消去 y，可得 $x_B=2x_1x_2\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=4x_1x_2$，③……………………………………………………（9 分）

代入 l_{BP} 可得 $y_B=\frac{4x_2-1+2y_1}{2}$，④

代入②得 $y_B=2(x_1+x_2)$，

联立 $l_{PQ}:x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}$ 与圆 C_1 可得，$5x^2+4x-\frac{11}{4}=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{4}{5}$，$x_1x_2=-\frac{11}{20}$，…………………………………………………………………………（11 分）

分别代入③、④可得 $x_B=-\frac{11}{5}$，$y_B=-\frac{8}{5}$，

$(x_B+1)^2+y_B^2=\left(-\frac{11}{5}+1\right)^2+\left(-\frac{8}{5}\right)^2=4$，即切线 BP，BQ 的交点 B 在圆 C_1 上，

所以 $B\left(-\frac{11}{5},-\frac{8}{5}\right)$. ……………………………………………………………………………………（12 分）

21.【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=\ln x+1+2\lambda x$，故 $f'(1)=1+2\lambda=-1$，解得 $\lambda=-1$，…………………（1 分）

则 $f(x)=x\ln x-x^2$，故 $f'(x)=\ln x+1-2x$，则 $f''(x)=\frac{1}{x}-2$，…………………………………（2 分）

故当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f''(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f''(x)<0$，

故函数 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，……………………………………（4 分）

故 $[f'(x)]_{\max}=f'\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+1-2\times\frac{1}{2}<0$，故 $f'(x)<0$，

则函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……………………………………………………………………（5 分）

(2)$g(x)=e^{x-1}+x\ln x+\lambda x^2$，$g'(x)=e^{x-1}+\ln x+1+2\lambda x$.

设 $g(x)$ 唯一的极值点为 x_0，则 $\begin{cases}g(x_0)=e^{x_0-1}+x_0\ln x_0+\lambda x_0^2=0, & ①\\ g'(x_0)=e^{x_0-1}+\ln x_0+1+2\lambda x_0=0, & ②\end{cases}$ ……………………（6 分）

由②$\times x_0-$①$\times 2$ 得，$(x_0-2)e^{x_0-1}-x_0\ln x_0+x_0=0$. (*) ……………………………………（7 分）

令 $F(x)=(x-2)e^{x-1}-x\ln x+x$，则 $F'(x)=(x-1)e^{x-1}-\ln x$，所以 $F''(x)=xe^{x-1}-\frac{1}{x}$.

又 $F''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $F''(1)=0$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$F''(x)<0$，从而 $F'(x)$ 单调递减， ……………………………………………（8 分）

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$F''(x)>0$，从而 $F'(x)$ 单调递增，

故 $F'(x)\geqslant F'(1)=0$，从而 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，…………………………………………（9 分）

又因为 $F(1)=0$，所以代入①可得 $\lambda=-1$. ……………………………………………………………（10 分）

当 $\lambda=-1$ 时，$g(x)=e^{x-1}+x\ln x-x^2$，$g'(x)=e^{x-1}+\ln x+1-2x$，

因为 $x=1$ 是(*)的唯一零点，且 $g(1)=0$，$g'(1)=0$，…………………………………………………（11 分）

所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 唯一的极值点，且极值为 0，满足题意.

所以 $\lambda=-1$. ……………………………………………………………………………………………（12 分）

22.【命题立意】本题考查参数方程与极坐标方程的转化与应用，考查数学运算、逻辑推理、直观想象的核心素养.

【解析】(1)依题意，直线 l 的直角坐标方程为 $x=3$，…… (1分)

令 $\frac{t^2+2}{t}=3$，得 $t^2-3t+2=0$，解得 $t=1$ 或 $t=2$，…… (2分)

将 $t=1,t=2$ 代入 $y=\frac{3t^4-18}{5t}$ 中，得 $y=-3$ 或 $y=3$，故 $A(3,-3)$，$B(3,3)$，…… (4分)

而 $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，故 $P(1,\sqrt{3})$，故 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\times6=6$. …… (5分)

(2)由(1)可知 $OA\perp OB$，故 $\triangle OAB$ 的外接圆的圆心坐标为 $(3,0)$，半径为 3，

故圆的直角坐标方程为 $(x-3)^2+y^2=9$，即 $x^2+y^2-6x=0$，…… (7分)

令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入可得 $\rho=6\cos\theta$，

即 $\triangle OAB$ 的外接圆的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$，…… (8分)

联立 $\begin{cases}\rho=6\cos\theta,\\ \rho=6\sin\theta,\end{cases}$ 解得 $\tan\theta=1$，故直线 MN 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$. …… (10分)

23.【命题立意】本题考查不等式的解法、绝对值三角不等式的性质、基本不等式，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$-\frac{5}{3}$ 和 1 是方程 $|ax+1|=4$ 的解，故 $\begin{cases}\left|-\frac{5}{3}a+1\right|=4,\\ |a+1|=4,\end{cases}$ 解得 $a=3$. …… (1分)

(1) $f(x)+|x+3|>6\Leftrightarrow|3x+1|+|x+3|>6$，

当 $x<-3$ 时，$-3x-1-x-3>6$，解得 $x<-\frac{5}{2}$，故 $x<-3$；…… (2分)

当 $-3\leqslant x\leqslant-\frac{1}{3}$ 时，$-3x-1+x+3>6$，解得 $x<-2$，故 $-3\leqslant x<-2$；…… (3分)

当 $x>-\frac{1}{3}$ 时，$3x+1+x+3>6$，解得 $x>\frac{1}{2}$，故 $x>\frac{1}{2}$. …… (4分)

综上所述，所求不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-2\text{ 或 }x>\frac{1}{2}\right\}$. …… (5分)

(2)依题意，$|3p+1|-|3p-2|\leqslant3^q+\lambda\cdot3^{-q}$ 对任意的 p,q 恒成立，

$|3p+1|-|3p-2|\leqslant|3p+1-3p+2|=3$，当且仅当 $p\geqslant\frac{2}{3}$ 时等号成立，…… (7分)

则 $3^q+\lambda\cdot3^{-q}\geqslant3$，故 $\lambda\geqslant3^q(3-3^q)$.

而 $3^q(3-3^q)\leqslant\frac{(3^q+3-3^q)^2}{4}=\frac{9}{4}$，当且仅当 $3^q=\frac{3}{2}$，即 $q=\log_3\frac{3}{2}$ 时等号成立，…… (9分)

故 $\lambda\geqslant\frac{9}{4}$，即实数 λ 的取值范围为 $\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$. …… (10分)