2021 北京丰台高二（下）期末

数　　学

2021.07

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{0,1,2\}$， $B=\{1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

（A） $\{1,2\}$　（B） $\{0,1,2\}$　　（C） $\{1,2,3\}$　　（D） $\{0,1,2,3\}$

2．命题“$\forall x\in\mathbf{R}, x^2-3<0$”的否定是

（A） $\forall x\in\mathbf{R}, x^2-3>0$　　（B） $\forall x\in\mathbf{R}, x^2-3\geq 0$

（C） $\exists x\in\mathbf{R}, x^2-3>0$　　（D） $\exists x\in\mathbf{R}, x^2-3\geq 0$

3．下列两个变量具有相关关系的是

（A）正方体的体积与棱长　　（B）汽车匀速行驶时的路程与时间

（C）人的体重与饭量　　（D）人的身高与视力

4．若 $a<b$，则下列不等式中一定成立的是

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{b}{a}>1$　　(C) $a^3<b^3$　　(D) $|a|<|b|$

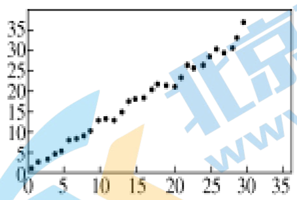
5．一箱产品中有 8 件正品和 2 件次品.每次从中随机抽取 1 件进行检测，抽出的产品不再放回.已知前两次检测的产品均是正品，则第三次检测的产品是正品的概率为

(A) $\frac{64}{125}$　　(B) $\frac{7}{15}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{1}{4}$

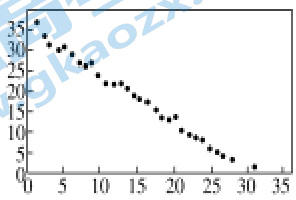
6. 若 $x>1$，则函数 $f(x)=x+\frac{2}{x-1}$ 的最小值为

(A) $2\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{2}+1$　　(C) 4　　(D) 5

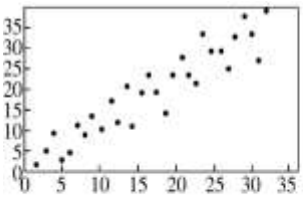
7. 在下列 4 组样本数据的散点图中，样本相关系数最大的是



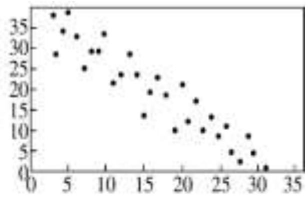
相关系数为 r_1



相关系数为 r_2



相关系数为 r_3



相关系数为 r_4

(A) r_1　　(B) r_2　　(C) r_3　　(D) r_4

8．已知 $x\in\mathbf{R}$，则“$x<-2$”是“$x^2+x-2>0$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

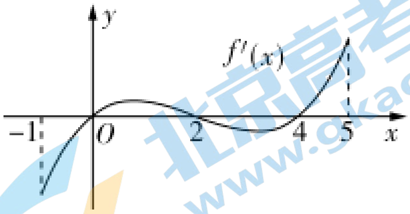
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

9．某校开展“迎奥运阳光体育”活动，共设踢毽、跳绳、拔河、推火车、多人多足五个集体比赛项目，各比赛项目逐一进行.为了增强比赛的趣味性，在安排比赛顺序时，多人多足不排在第一场，拔河排在最后一场，则不同的安排方案种数为

(A) 3　　(B) 18　　(C) 21　　(D) 24

10．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,5]$，其部分自变量与函数值的对应情况如下表：

$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示.给出下列四个结论：



x	-1	0	2	4	5
$f(x)$	3	1	2.5	1	3

① $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增；

② $f(x)$ 有 2 个极大值点；

③ $f(x)$ 的值域为 $[1,3]$；

④ 如果 $x\in[t,5]$ 时，$f(x)$ 的最小值是 1，那么 t 的最大值为 4.

其中，所有正确结论的序号是

(A) ③　　(B) ①④　　(C) ②③　　(D) ③④

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域为__.

12．为迎接中国共产党建党 100 周年，某校开展“学史明理、学史崇德、学史力行”活动.由 4 位思政教师组成宣讲团，面向高中三个年级的学生进行党史宣讲. 若要求高一年级安排 2 位教师，高二、高三年级各安排 1 位教师，则不同的安排方案种数为__. （结果用数字作答）

13．能够说明“设 a,b,c 是任意实数.若 $c<b<a$，则 $ab>ac$”是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为 __.

14．已知函数 $f(x)=\ln x-ax+1$，若 $a=1$，则 $f(x)$ 的零点个数为__；若 $f(x)$ 有两个不同的零点，则 a 的取值范围是__.

15．算筹是一根根同样长短和粗细的小棍子，是中国古代用来记数、列式和进行各种数与式演算的一种工具，是中国古代的一项伟大、重要的发明. 在算筹计数法中，以“纵式”和“横式”两种方式来表示数字，如下表：

数字 / 方式	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

用算筹计数法表示多位数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，遇零则置空，则“𝍥 𝍪 𝍠”表示的三位数为__；如果把 5 根算筹以适当的方式全部放入下面的表格中，那么可以表示能被 5 整除的三位数的个数为__.

三、解答题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题共 13 分）

已知 $(1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$.

（I）求 a_0 的值；

（II）求 $a_1+a_3+a_5$ 的值.

17.（本小题共 14 分）

甲、乙两名同学分别与同一台智能机器人进行象棋比赛. 在一轮比赛中，如果甲单独与机器人比赛，战胜机器人的概率为 $\frac{4}{5}$；如果乙单独与机器人比赛，战胜机器人的概率为 $\frac{3}{5}$.

（I）甲单独与机器人进行三轮比赛，求甲恰有两轮获胜的概率；

（II）在甲、乙两人中任选一人与机器人进行一轮比赛，求战胜机器人的概率.

18.（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3+3x^2-ax$ 在 $x=1$ 处取得极值.

（I）求 a 的值；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值和最小值.

19.（本小题共 14 分）

第七次全国人口普查公报显示，自 2010 年以来，我国大陆人口受教育水平明显提高，其中西部地区的人口受教育水平提升非常显著.下面两表分别列出了 2010 年和 2020 年东部地区和西部地区各省、自治区、直辖市（以下将省、自治区、直辖市简称为省份）15 岁及以上人口平均受教育年限数据.

东部地区(单位:年)

省份 年份	北京	天津	河北	上海	江苏	浙江	福建	山东	广东	海南
2020 年	12.6	11.3	9.8	11.8	10.2	9.8	9.7	9.8	10.4	10.1
2010 年	11.7	10.4	9.1	10.7	9.3	8.8	9.0	9.0	9.6	9.2

西部地区(单位:年)

省份 年份	重庆	四川	贵州	云南	西藏	陕西	甘肃	青海	宁夏	新疆	广西	内蒙古
2020 年	9.8	9.2	8.8	8.8	6.8	10.3	9.1	8.9	9.8	10.1	9.5	10.1
2010 年	8.8	8.4	7.7	7.8	5.3	9.4	8.2	7.9	8.8	9.3	8.8	9.2

（I）从东部地区任选 1 个省份，求该省份 2020 年 15 岁及以上人口平均受教育年限比 2010 年至少增加 1 年的概率；

（II）从东部地区和西部地区所有 2020 年 15 岁及以上人口平均受教育年限比 2010 年至少增加 1 年的省份中任选 2 个，设 X 为选出的 2 个省份中来自西部地区的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III）将上面表中西部地区各省份 2020 年和 2010 年 15 岁及以上人口平均受教育年限的方差分别记为 s_1^2, s_2^2，试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小.（只需写出结论）

20.（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$.

（I）讨论 $f(x)$ 的单调区间；

（II）对 $\forall x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

21.（本小题共 15 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{x+1}$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（II）设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 处的切线与 x 轴、y 轴分别交于 A,B 两点，求 $|AB|^2$ 的最小值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2021 北京丰台高二（下）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	C	C	C	B	A	A	B	D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11． $\{x\mid x>0\}$　　12． 12　　13． $-1,-2,-3$（答案不唯一）

14． $1;0<a<1$　　15． $621;14$

（注：14、15 题第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16．（本小题 13 分）

解：方法一：

（I）由二项式定理，得

$(1+2x)^5=C_5^0+C_5^1(2x)+C_5^2(2x)^2+C_5^3(2x)^3+C_5^4(2x)^4+C_5^5(2x)^5$

$=1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$.①

因为 $(1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，②

所以 $a_0=1$……………….9 分

（II）由①②可得 $a_1=10,\ a_3=80,\ a_5=32$.

所以 $a_1+a_3+a_5=122$……………….13 分

方法二：

（I）因为 $(1+2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，

令 $x=0$，解得 $a_0=1$……………….9 分

（II）令 $x=1$，则 $(1+2)^5=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，

所以 $243=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$.①

令 $x=-1$，则 $(1-2)^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$，

所以 $-1=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$.②

由①②，可得 $a_1+a_3+a_5=122$……………….13 分

17.（本小题 14 分）

解：（I）设“甲恰有两轮获胜”为事件 A，则

$P(A)=C_3^2\cdot(\frac{4}{5})^2\cdot(\frac{1}{5})=\frac{48}{125}$ ....5 分

（II）设“选中甲与机器人比赛”为事件 A_1，“选中乙与机器人比赛”为事件 A_2，“战胜机器人”为事件 B，根据题意得

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}, P(B|A_1)=\frac{4}{5}$，$P(B|A_2)=\frac{3}{5}$.

由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{7}{10}$.

所以战胜机器人的概率为 $\frac{7}{10}$ ....14 分

18.（本小题 14 分）

解：（I）因为 $f(x)=x^3+3x^2-ax$，

所以 $f'(x)=3x^2+6x-a$.

因为 $f(x)$ 在 x=1 处取得极值，

所以 $f'(1)=0$，即 $3+6-a=0$，解得 $a=9$.

经检验，符合题意..................5 分

（II）由（I）得 $f(x)=x^3+3x^2-9x$.

所以 $f'(x)=3x^2+6x-9$.

令 $f'(x)>0$，得 $-4\le x<-3$ 或 $1<x\le 4$；

令 $f'(x)<0$，得 $-3<x<1$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-4,-3)$，$(1,4]$，单调递减区间为 $(-3,1)$.

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-3)=27$，极小值为 $f(1)=-5$.

又 $f(-4)=20$，$f(4)=76$，

所以 $f(1)<f(-4)<f(-3)<f(4)$.

所以 $f(x)$ 的最大值为 76，最小值为 -5 ………………14 分

19.（本小题 14 分）

解：（I）西部地区共有 12 个省份，其中 2020 年 15 岁及以上人口平均受教育年限比

2010 年至少增加 1 年的有 6 个.

设“选取的省份 2020 年 15 岁及以上人口平均受教育年限比 2010 年至少增加 1 年”为事件 A，

则 $P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ ………………3 分（II）东部地区 2020 年 15 岁及以上人口平均受教育年限比 2010 年至少增加

1 年的有 2

个，西部地区 2020 年 15 岁及以上人口平均受教育年限比 2010 年至少增加 1 年的有 6 个，共 8 个.

则 X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_2^2C_6^0}{C_8^2}=\frac{1}{28}$，

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$，

$P(X=2)=\frac{C_2^0C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{15}{28}$

$E(X)=0\times\frac{1}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{15}{28}=\frac{3}{2}$ ………………10 分

（III）$x_1>x_2$，$s_1{}^2<s_2{}^2$ ………………14 分 20.（本小题 15 分）

解：（I）因为 $f(x)=e^x-ax$，

所以 $f'(x)=e^x-a$.

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$；令 $f'(x)<0$，得 $x<\ln a$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\ln a,+\infty)$，单调递减区间是 $(-\infty,\ln a)$ ……5 分

（II）方法一：

由（I）知 $f'(x)=e^x-a$.

因为 $x\in(0,+\infty)$，所以 $e^x>1$.

当 $a\le 1$ 时， $f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

于是 $f(x)>f(0)=1>0$，所以 $a\le 1$ 符合题意.

当 $a>1$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\ln a$；令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\ln a$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(0,\ln a)$ 上单调递减.

所以 $f(x)\ge f(\ln a)=a-a\ln a>0$，解得 $1<a<e$.

综上， a 的取值范围是 $(-\infty,e)$. ....15 分

方法二：

对 $\forall x\in(0,+\infty)$， $f(x)=e^x-ax>0\Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x}>a$，即 $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)_{\min}>a$.

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

令 $g'(x)>0$，得 $x>1$；令 $g'(x)<0$，得 $0<x<1$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=e$，于是 $a<e$.

故 a 的取值范围是 $(-\infty,e)$. ....15 分

21.（本小题 15 分）

解：（I）因为 $f(x)=2\sqrt{x+1}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$， $f'(0)=1$.

因为 $f(0)=2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=x-0$，

即 $y=x+2$..................5 分

（II）因为 $f(t)=2\sqrt{t+1}$， $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ 处的切线方程为 $y-2\sqrt{t+1}=\dfrac{1}{\sqrt{t+1}}(x-t)$.

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{t+2}{\sqrt{t+1}}$；令 $y=0$，得 $x=-t-2$.

所以 $|AB|^2=\dfrac{(t+2)^2}{t+1}+(t+2)^2=\dfrac{(t+2)^3}{t+1}$， $t>-1$.

设 $g(t)=\dfrac{(t+2)^3}{t+1}$， $t>-1$,则 $g'(t)=\dfrac{(t+2)^2(2t+1)}{(t+1)^2}$.

令 $g'(t)>0$，得 $t>-\dfrac{1}{2}$； 令 $g'(t)<0$，得 $-1<t<-\dfrac{1}{2}$.

所以 $g(t)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上单调递增，在区间 $(-1,-\dfrac{1}{2})$ 上单调递减.

于是当 $t=-\dfrac{1}{2}$ 时， $g(t)$ 有最小值为 $\dfrac{27}{4}$，故 $|AB|^2$ 有最小值为 $\dfrac{27}{4}$． ....15 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）

关于我们