北京市西城区 2023—2024 学年度第一学期期末试卷

高一数学

2024.1

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $M=\{x\,|\,x+2\geqslant 0\}$，$N=\{x\,|\,x-1<0\}$，那么 $M\cap N=$

（A）$\{x\,|\,-2\leqslant x<1\}$　　（B）$\{x\,|\,-2<x\leqslant 1\}$

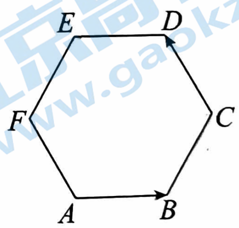
（C）$\{x\,|\,x\geqslant -2\}$　　（D）$\{x\,|\,x<1\}$

（2）已知命题 $P:\exists x<1, x^2\leqslant 1$，则 $\neg p$ 为

（A）$\forall x\geqslant 1$，$x^2\leqslant 1$　　（B）$\exists x<1$，$x^2>1$

（C）$\forall x<1$，$x^2>1$　　（D）$\exists x\geqslant 1$，$x^2>1$

（3）如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=$



（A）$\overrightarrow{BC}$　　（B）$\overrightarrow{BF}$

（C）$\overrightarrow{EC}$　　（D）$\overrightarrow{BE}$

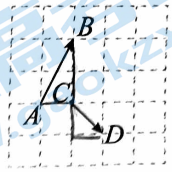
（4）若 $a>b$，则

（A）$a^3<b^3$　　（B）$|a|>|b|$　　（C）$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　（D）$2^{a-b}>1$

（5）已知 $x>0$，则函数 $f(x)=x-4+\dfrac{4}{x}$ 的最小值为

（A）-2　　（B）0　　（C）1　　（D）$2\sqrt{2}$

（6）已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示，若网格中每个小正方形的边长均为 1，则 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|=$



（A）$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ （B）$\sqrt{5}$

（C）3 （D）$\sqrt{10}$

（7）已知 $3^a=4$，$b=\log_3\dfrac{9}{4}$，则 $a+b=$

（A）9 （B）2

（C）$\dfrac{16}{9}$ （D）-2

（8）已知集合 $A=\{x\mid |x-1|<3\}$，$B=\{x\mid x^2-3x-10<0\}$，若 $a\notin A$，且 $a\in B$，则 a 的取值范围是

（A）$(-2,4)$ （B）$(4,5)$

（C）$[4,5]$ （D）$[4,5)$

（9）已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，则“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant 3$”是“存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$”成立的

（A）充分不必要条件 （B）必要不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（10）一种细胞的分裂速度 v（单位：个/秒）与其年龄 t（单位：岁）的关系可以用下面的分段函数来表示：

$$v(t)=\begin{cases}0.5t, & 0\leqslant t\leqslant 10,\\ \dfrac{2a}{b+\log_2\dfrac{t}{a}}, & t>10,\end{cases}\quad 其中 a,b\in\mathbf{R},$$

而且这种细胞从诞生到死亡，它的分裂速度变化是连续的．若这种细胞 5 岁和 60 岁的分裂速度相等，则 $a\approx$

（参考数据：$\log_2 3\approx 1.585$）

（A）6.402 （B）6.462

（C）6.502 （D）6.522

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+\sqrt{x-1}$ 的定义域是____

（12）下面茎叶图记录的是甲、乙两位篮球运动员在最近 5 场比赛中的得分，

甲			乙			
9	7	0	8			
2	1	1	0	1	1	5
	5	2				

则甲得分的中位数是____，乙得分的方差为____.

（13）已知 e_1,e_2 为一组不共线的向量，且向量 $\boldsymbol{a}=xe_1+4e_2$，$\boldsymbol{b}=e_1+ye_2$，能使得 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的一组实数 x,y 的值可以为 $x=$____，$y=$____.

（14）函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x-a, & x>1,\\ x-a, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 若 $a=0$，则 $f(f(2))$ 的值为____；若 $f(x)$ 有两个零点，则 a 的取值范围是____.

a=x

（15）记函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在非负实数 k，对任意的 $x\in D$，总有 $|f(x)-f(-x)|\leqslant k$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$.

①所有偶函数都具有性质 $P(0)$；

② $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 具有性质 $P(1)$；

③若 $f(x)=x^2+x+1$，则一定存在正实数 k，使得 $f(x)$ 具有性质 $P(k)$；

④已知 $a>0$，若函数 $f(x)=\dfrac{a}{1+2^x}$ 具有性质 $P(k)$，则 $a\in(0,k]$.

其中所有正确结论的序号是____

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x}$.

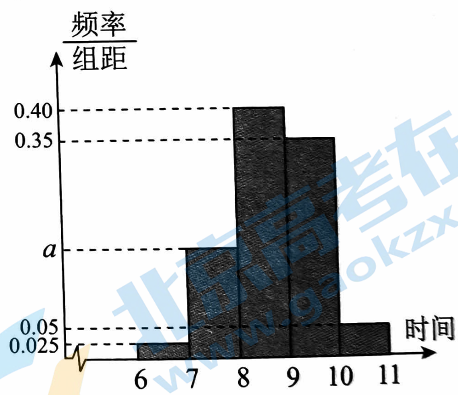
（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

（Ⅱ）用函数单调性定义证明：函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数；

（Ⅲ）写出函数 $f(x)$ 的值域（结论不要求证明）.

（17）（本小题 13 分）

每年的 3 月 21 日是世界睡眠日，充足的睡眠、均衡的饮食和适当的运动，是国际社会公认的三项健康标准. 某校高一某班学生某天睡眠时间的频率分布直方图如图所示（样本数据分组为 $[6,7)$，$[7,8)$，$[8,9)$，$[9,10)$，$[10,11]$，单位：小时）.



（Ⅰ）求图中 a 的值，估计该校高一学生该天睡眠时间不小于 9 小时的频率；

（Ⅱ）从该校高一学生中随机抽取 2 人，用频率估计概率，计算这两位学生至少有 1 人该天睡眠时间不小于 9 小时的概率.

（18）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，再从条件①、条件②、条件③中选择两个作为已知，使 $f(x)$ 存在并且唯一，并完成下列问题.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）已知函数 $g(x)=f(x)-(m-2)x$ 有两个不同的正数零点 x_1,x_2.

（i）求 m 的取值范围；

（ii）若 $|x_1-x_2|=2$，求 m 的值.

条件①：$f(0)=4$；

条件②：$\forall x\in \mathbf{R}$，$f(1+x)=f(1-x)$；

条件③：$\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x)\geq f(1)$.

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答计分.

（19）（本小题 15 分）

2023 年 10 月 17 日至 18 日，第三届“一带一路”国际合作高峰论坛在北京举行，成为纪念“一带一路”倡议十周年最隆重的活动. 此次活动主题为“高质量共建‘一带一路’，携手实现共同发展繁荣”，而作为“一带一路”重要交通运输的中欧班列越来越繁忙. 下表是从 2018 年到 2022 年，每年中欧班列运行的列数（单位· 万列）.

年份	2018	2019	2020	2021	2022
运行列数	0.63	0.82	1.24	1.5	1.6

（Ⅰ）计算中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数；

（Ⅱ）从 2018 年到 2022 年这 5 年中随机选取 2 年，求这两年运行列数和大于 2.4（单位：万列）的概率；

（Ⅲ）设 2018 年，2019 年，2020 年运行列数的方差为 s_1^2，2020 年，2021 年，2022 年运行列数的方差为 s_2^2，从 2018 年到 2022 年这 5 年的运行列数的方差为 s_3^2，试判断 s_1^2，s_2^2，s_3^2 的大小关系.（结论不要求证明）

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\log_2(4^x-8)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)=x+1$ 的图象的交点坐标；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 的图象恒在直线 $y=4x+b$ 的下方，求 b 的取值范围.

（21）（本小题 15 分）

对于函数 $y=f(x)$，记所有满足 $\forall s>t>0$，都有 $f(s)\geqslant f(t)$ 的函数构成集合 A；所有满足 $\forall s,t\in(0,+\infty)$，都有 $f(s+t)\geqslant f(s)+f(t)$ 的函数构成集合 B .

（Ⅰ）分别判断下列函数是否为集合 B 中的元素，并说明理由，

① $f(x)=2x+1$；② $f(x)=x^2$；

（Ⅱ）若 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)$（$a\geqslant 0$）是集合 B 中的元素，求 a 的最小值；

（Ⅲ）若 $g(x)=xf(x)$，求证：$f(x)\in A$ 是 $g(x)\in B$ 的充分不必要条件.

北京市西城区 2023—2024 学年度第一学期期末试卷

高一数学答案及评分参考

2024.1

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1．A　　2．C　　3．C　　4．D　　5．B

6．B　　7．B　　8．D　　9．A　　10．B

二、填空题：本大题共 5 题，每小题 5 分，共 25 分.

11．$[1,2)\cup(2,+\infty)$　　12．11，$\dfrac{26}{5}$

13．1，4（答案不唯一，$xy=4$ 即可）　　14．1，$(0,1]$

15．①②④

注：第 12 题第一问 2 分，第二问 3 分；第 13 题满足 $xy=4$ 得 5 分，不填或有错误得 0 分；第 14 题第一问 2 分，第二问 3 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16．（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 是奇函数.证明如下：

$f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$. ……………………1 分

因为 $\forall x\in\{x\,|\,x\neq 0\}$，都有 $-x\in\{x\,|\,x\neq 0\}$，且

$$f(-x)=\frac{|-x|+1}{-x}=-\frac{|x|+1}{x}=-f(x),$$ ……………………3 分

所以 $f(x)$ 是奇函数. ……………………4 分

（Ⅱ）任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$. ……………………5 分

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{|x_1|+1}{x_1}-\frac{|x_2|+1}{x_2}$$ ……………………6 分

$$=\frac{x_1+1}{x_1}-\frac{x_2+1}{x_2}=(1+\frac{1}{x_1})-(1+\frac{1}{x_2})=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2},$$ ……………………8 分

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1x_2>0$，$x_2-x_1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$， ……………………9 分

所以 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数. ……………………10 分

（Ⅲ）函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. ……………………13 分

17.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $(0.025+a+0.40+0.35+0.05)\times 1=1$， ……………………3 分

所以 $a=0.175$． ……………………5 分

该校高一学生该天睡眠时间不少于 9 小时的频率为：

$(0.35+0.05)\times 1=0.40$． ……………………7 分

（Ⅱ）由题知，该校高一学生该天睡眠时间为 $[6,7),[7,8),[8,9),[9,10),[10,11)$ 小时的频率分别为 $0.025\times 1=0.025$，$0.175\times 1=0.175$，$0.40\times 1=0.40$，$0.35\times 1=0.35$，$0.05\times 1=0.05$，

用频率估计概率，该校高一学生该天睡眠时间为 $[6,7),[7,8),[8,9),[9,10),[10,11)$ 小时的概率分别为 0.025，0.175，0.40，0.35，0.05．

记从该校高一学生中随机抽取 2 人，这两位学生至少有一人该天睡眠时间不小于 9 小时为事件 A， ……………………8 分

则 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-0.4)^2=1-0.6^2=0.64$． ……………………13 分

18.（本小题 14 分）

解：选择条件①②： ……………………1 分

（Ⅰ）由①得 $f(0)=b=4$， ……………………2 分

由②得 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$， ……………………3 分

所以 $-\dfrac{a}{2}=1$，$a=-2$． ……………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=x^2-2x+4$，

所以 $g(x)=f(x)-(m-2)x=(x^2-2x+4)-(m-2)x=x^2-mx+4$． ……………………5 分

（ⅰ）因为 $g(x)$ 有两个不同的正数零点 x_1,x_2，

所以 $\begin{cases}\Delta=(-m)^2-4\times 1\times 4=m^2-16>0,\\ x_1x_2=4>0,\\ x_1+x_2=m>0,\end{cases}$ ……………………8 分

即 $\begin{cases}m>4,\text{或}m<-4,\\ m>0,\end{cases}$ ……………………9 分

解得 $m>4$， ……………………10 分

所以 m 的取值范围是 $(4,+\infty)$．

（ⅱ）因为 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{m^2-16}=2$， ……………12 分

所以 $m^2=20$， ……………………13 分

又因为 $m>4$，所以 $m=2\sqrt{5}$． ……………………14 分

选择条件①③：

（Ⅰ）由①得 $f(0)=b=4$，

由③得 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，

所以 $-\frac{a}{2}=1$，$a=-2$.

（Ⅱ）同选择条件①②.

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）从 2018 年到 2022 年运行列数的平均值为

$$\frac{0.63+0.82+1.24+1.5+1.6}{5}=1.158.$$ ……4 分

所以中欧班列从 2018 到 2022 年的平均运行列数为1.158万列.

（Ⅱ）从 2018 年到 2022 年随机选取 2 年，所有可能的结果有 10 种，它们是：

$(2018,2019),(2018,2020),(2018,2021),(2018,2022),(2019,2020),(2019,2021),$

$(2019,2022),(2020,2021),(2020,2022),(2021,2022)$. ……7 分

用 A 表示“这两年运行列数和大于 2.4 万列”这一事件， ……8 分

则 A 中的结果有 4 个，它们是 $(2019,2022),(2020,2021),(2020,2022),(2021,2022)$.

……10 分

所以，所求的概率 $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. ……12 分

（Ⅲ）$s_2^2<s_1^2<s_3^2$. ……15 分

20.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）令 $\log_2(4^x-8)=0$， ……1 分

所以 $4^x-8=1$，即 $4^x=9$， ……2 分

所以 $x=\log_4 9=\log_2 3$，

所以 $f(x)$ 零点为 $\log_2 3$. ……3 分

（Ⅱ）令 $f(x)=g(x)$，

即 $\log_2(4^x-8)=x+1$， ……5 分

所以 $4^x-8=2^{x+1}$，

整理得 $(2^x)^2-2\cdot2^x-8=0$， ……7 分

$(2^x-4)(2^x+2)=0$，

所以 $2^x=4$，$x=2$.

所以函数 $f(x)$ 的图象与函数 $g(x)$ 图象的交点坐标为 $(2,3)$. ……9 分

……………………10 分

（III）由 $4^x-8>0$ 得 $x>\log_4 8=\frac{3}{2}$.

由题意，$f(x)<4x+b$ 在 $x\in(\frac{3}{2},+\infty)$ 恒成立，

即 $\log_2(4^x-8)<4x+b$ 在 $x\in(\frac{3}{2},+\infty)$ 恒成立. ……………………12 分

所以 $4^x-8<2^{4x+b}=(4^x)^2\cdot 2^b$ 在 $x\in(\frac{3}{2},+\infty)$ 恒成立.

令 $4^x=t\in(8,+\infty)$，

则 $t-8<t^2\cdot 2^b$，

所以 $2^b>-8(\frac{1}{t})^2+\frac{1}{t}$.

因为 $\frac{1}{t}\in(0,\frac{1}{8})$，

所以 $-8(\frac{1}{t})^2+\frac{1}{t}\in(0,\frac{1}{32}]$，

所以 $2^b>\frac{1}{32}$，$b>-5$.

所以 b 的取值范围为 $(-5,+\infty)$. ……………………15 分

21.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）①不是.

当 $s=t=1$ 时，$f(s+t)=f(2)=2\times2+1=5$，

$f(s)+f(t)=3+3=6>f(s+t)$，

所以 $f(x)=2x+1$ 不是集合 B 中的元素. ……………………2 分

②是.

$\forall s,t\in(0,+\infty)$，$f(s+t)-f(s)-f(t)=(s+t)^2-s^2-t^2=2st>0$，

所以 $f(x)=x^2$ 是集合 B 中的元素. ……………………4 分

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，$\forall s,t\in(0,+\infty)$，$f(s+t)=\log_{\frac{1}{2}}(s+t+1)$，

$f(s)+f(t)=\log_{\frac{1}{2}}(s+1)+\log_{\frac{1}{2}}(t+1)=\log_{\frac{1}{2}}(s+1)(t+1)$.

因为 $(s+1)(t+1)-(s+t+1)=st>0$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

故 $f(s+t)\geq f(s)+f(t)$，即 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\in B$.

若$0\leqslant a<1$，令$s=t=\dfrac{1-a}{2}>0$，

则$(s+t+a)-(s+a)(t+a)=1-(\dfrac{1+a}{2})^2>0$，

又$y=\log_{\frac{1}{2}}x$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$f(s+t)<f(s)+f(t)$，因此，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)\notin B$

综上，a的最小值为1. ……………………………10分

（Ⅲ）因为$f(x)\in A$，所以$\forall s,t\in(0,+\infty)$，$s+t>s$，$f(s+t)\geqslant f(s)$，

进而$sf(s+t)\geqslant sf(s)$，

同理，$tf(s+t)\geqslant tf(t)$，相加得$(s+t)f(s+t)\geqslant sf(s)+tf(t)$，

即$xf(x)\in B$. ……………………………12分

设$g(x)=[x]$.

$\forall s,t\in(0,+\infty)$，$[s]+[t]\leqslant[s+t]$，

所以$g(x)=[x]\in B$.

此时，$f(x)=\dfrac{[x]}{x}$.

当$1<x<2$时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$，

所以$f(x)$在$(1,2)$上单调递减，因此$f(x)=\dfrac{[x]}{x}\notin A$. ……………………………15分

综上，$f(x)\in A$是$g(x)\in B$的充分不必要条件.