姓　　名＿＿＿＿＿＿＿＿

准考证号＿＿＿＿＿＿＿＿

绝密★启用前

湘豫名校联考

2023年12月高三一轮复习诊断考试(三)

数　　学

注意事项：

1. 本试卷共6页。时间120分钟，满分150分。答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置，并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上，然后认真核对条形码上的信息，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。作答非选择题时，将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}|x(x-2)=8\}$，$\complement_N M=\{1,0\}$，则 $M\cup N=$

A. $\{1,0\}$　　B. $\{-2,4\}$　　C. $\{-2,0,1,4\}$　　D. 无法确定

2. 设复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$，若 $1+\bar{z}=2z+3\mathrm{i}$，则 $\dfrac{2}{z}=$

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1-\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

3. 已知 a,b 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，若 $a/\!/\alpha$，$b\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$ 是 $a\perp b$ 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，若经过椭圆 C 的上顶点和右顶点的直线 l 经过点 $(4,-\sqrt{3})$，则椭圆 C 的短轴长为

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=3$，且 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\frac{5}{9}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $-\frac{1}{9}$　　D. $-\frac{5}{9}$

6. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BCD=60°$，若该菱形以 AB 为轴旋转一周，则所形成的几何体的体积为

A. $4\sqrt{3}\pi$　　B. 6π　　C. 7π　　D. 8π

7. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$；当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)$，则 $f\left(\frac{17}{3}\right)=$

A. -24　　B. -12　　C. $-\frac{3}{16}$　　D. $-\frac{3}{8}$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1:a_2:a_3=4:3:2$，且 $a_4=\frac{1}{2}$. 若 $\forall n\geqslant 2$，$pa_n-qa_{n-1}=2(p,q\in\mathbf{R})$ 恒成立，则 $a_6+a_8+a_{10}=$

A. -24　　B. -6　　C. $-\frac{9}{2}$　　D. -4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知角 α 终边上一点 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$，则下列结论正确的是

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{10}-3\sqrt{5}}{10}$

C. 若 $\tan 2\alpha+\sqrt{6}a=0$，则 $a=2$　　D. 2α 属于第二象限角

10. 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=-2x$，半焦距为 c，则下列论述错误的是

A. 双曲线 C 的离心率为 3

B. 顶点到渐近线的距离与焦点到渐近线的距离之比为 $\sqrt{5}$

C. 直线 $y=x+1$ 与双曲线 C 有两个不同的交点

D. 过点 $(c,\sqrt{3}b)$ 有两条直线与双曲线 C 相切

11. 黎曼函数(Riemann function)是一个特殊的函数,由德国数学家黎曼发现并提出,其基本定义是:$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q},x=\frac{p}{q},p,q\in\mathbf{N}^*,\frac{p}{q}\text{为既约真分数},\\0,x=0,1\text{或}(0,1)\text{上的无理数}\end{cases}$(注:分子与分母是互质数的分数,称为既约分数),则下列结论正确的是

A. $R\left(\frac{6}{8}\right)=\frac{1}{8}$

B. 黎曼函数的定义域为$[0,1]$

C. 黎曼函数的最大值为$\frac{1}{2}$

D. 若$f(x)$是奇函数,且$f(1-x)=f(x)$,当$x\in[0,1]$时,$f(x)=R(x)$,则$f\left(\frac{86}{5}\right)+f(\sqrt{32}+6)=\frac{1}{5}$

12. 已知三棱锥$S-ABC$,则下列论述正确的是

A. 若点S在平面ABC内的射影点为$\triangle ABC$的外心,则$SA=SB=SC$

B. 若点S在平面ABC内的射影点为A,则平面SBC与平面ABC所成角的余弦值为$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle SBC}}$

C. 若$\angle BAC=90°$,点S在平面ABC内的射影点为BC的中点H,则S,A,B,C四点一定在以H为球心的球面上

D. 若$\angle BAC=90°$,S,A,B,C四点在以BC的中点H为球心的球面上,且S在平面ABC内的射影点的轨迹为线段BC(不包含B,C两点),则点S在球H的球面上的轨迹为圆

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 若$a\in(0,2)$,$b\in(1,4)$,且$a+b=4$,则$(a+2)(b-1)$的最大值为________.

14. 已知圆$C_1:x^2+y^2-2ax+4by+4=0$,则直线$ax-2by+2=0$与圆$C_2:x^2+y^2=1$的位置关系是________.

15. 若函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$在$x=\frac{\pi}{2}$处取得最大值,且$f(x)$的图象在$(0,\pi)$上有4个对称中心,则$\omega$的取值范围为________.

16. 若函数$f(x)=\sin x\cos 2x$,$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,则函数$f(x)$的极小值为________.

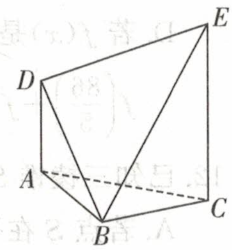
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

一建筑物 CE 垂直耸立于 $\triangle ABC$ 所在的水平面，如图，在观测点 B 处测得顶点 E 的仰角（视线与水平线的夹角）为 $60°$，在观测点 D 处测得顶点 E 的仰角为 $30°$，$AD\perp$ 平面 ABC.

(1) 若 $AD=100$，$\angle DBE=\angle BDE$，求建筑物 CE 的高；

(2) 若 $AD=\dfrac{CE}{2}$，$\angle ABD=45°$，求 $\cos\angle ACB$ 的值.

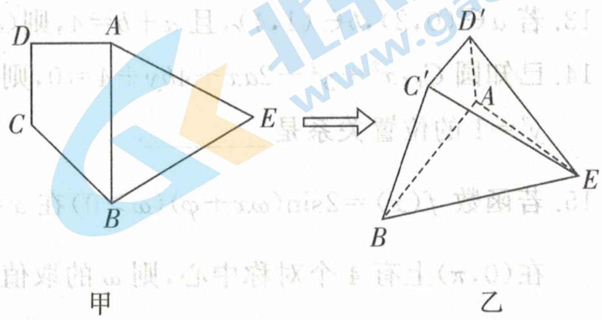


18.（本小题满分 12 分）

如图甲，在直角梯形 $ABCD$ 中，$CD\parallel AB$，$AD\perp AB$，$2CD=2AD=AB$，$\triangle ABE$ 是等边三角形. 现将梯形 $ABCD$ 沿 AB 折起至梯形 $ABC'D'$，使平面 $ABC'D'$ 与平面 ABE 所成二面角为直二面角，如图乙所示.

(1) 证明：$AB\perp C'E$；

(2) 求平面 $BC'E$ 与平面 $AD'E$ 夹角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

设数列$\{na_n\}$的前 n 项和为 S_n，数列$\{S_n\}$是递增的等比数列，且 $S_6+S_8=10$，$S_3\cdot S_{11}=16$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x-x^2$.

(1)若 $f(x)$在$(8,+\infty)$上单调递减，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $a=2$，求证：$\ln\frac{2\times4\times6\times\cdots\times2n}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}<\frac{n(2n+1)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

21.（本小题满分 12 分）

已知直线 l_1,l_2 相交于点 $D\left(1,-\frac{1}{4}\right)$，且分别与抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 相切于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点，$AD\perp BD$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过抛物线 C 的焦点 F 的直线 l_3,l_4 分别与抛物线 C 相交于点 P,Q,M,N，直线 l_3,l_4 的斜率分别为 k_{l_3},k_{l_4}，且 $k_{l_3}+k_{l_4}=0$，若四边形 $PMQN$ 的面积为 2，求直线 l_3,l_4 夹角的大小.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-2a\ln x,a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=e$，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)若 $a\in(0,3e^2]$，且关于 a 的方程 $f(a)=ba$ 有实数根，b 的最小值为 S，证明：$S\in(4-2\ln 2,5-2\ln 2)$.