

梅州市高三总复习质检试卷 (2022.2)

数 学

本试卷共 6 页, 满分 150 分, 考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x - 6 < 0\}$, 则 $A \cap B =$

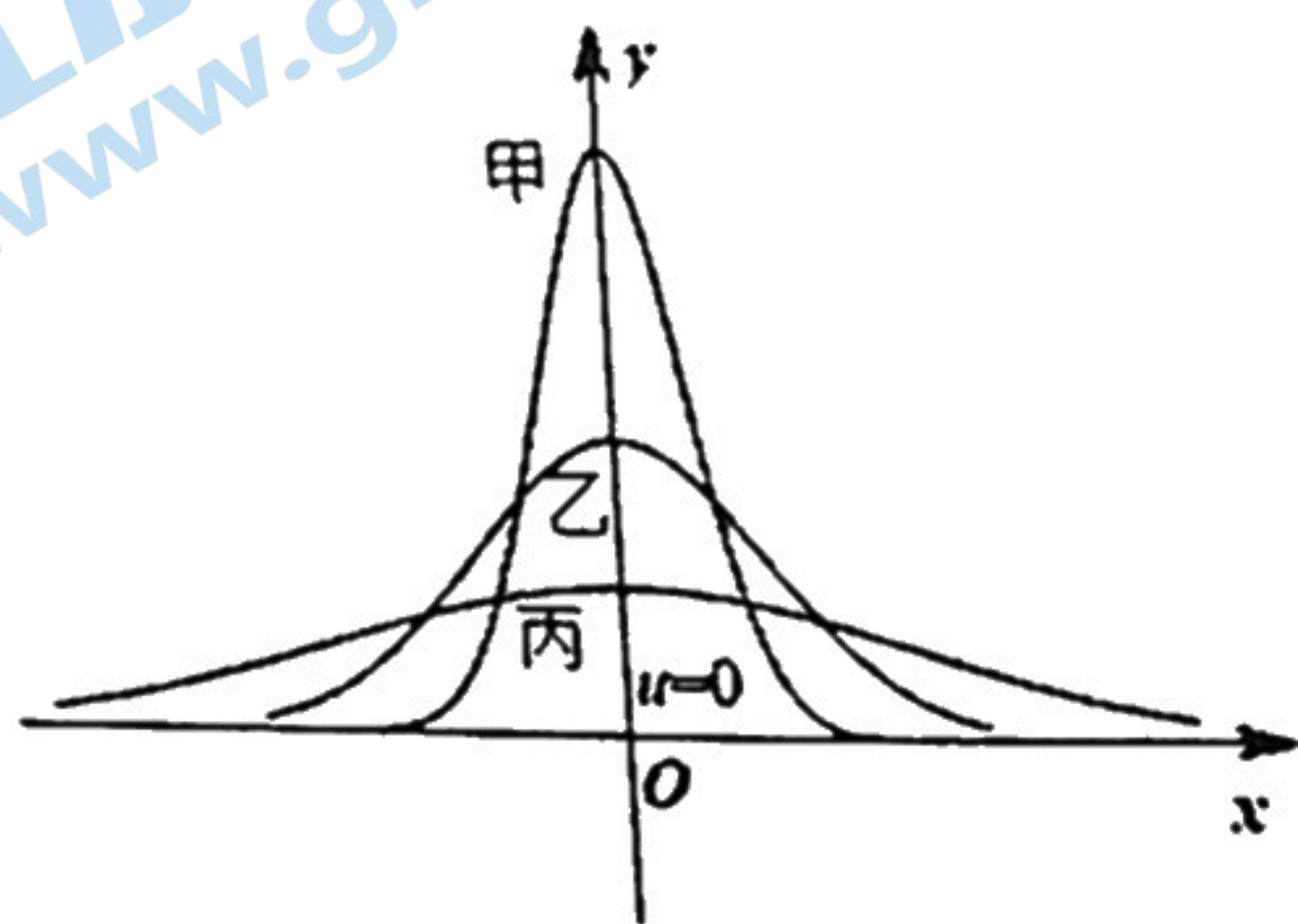
- A. $\{-2, -1\}$ B. $\{-1, 2\}$ C. $\{-2, -1, 2\}$ D. $\{-2, -1, 3\}$

2. 已知 i 是虚数单位, $z(1-i) = 2i$, 则复数 z 所对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 如图, 三条曲线分别是甲、乙、丙三个模具厂家生产某种零件尺寸误差分布的正态分布密度曲线, 则下列说法不正确的是

- A. 三个模具厂家生产这种零件尺寸误差的均值相等
- B. $P(x_{\text{乙}} \geq 1) < P(x_{\text{丙}} \geq 1)$
- C. 三个模具厂家生产这种零件尺寸误差的方差从小到大依次为丙、乙、甲
- D. 生产这种零件时, 甲厂的生产质量最好

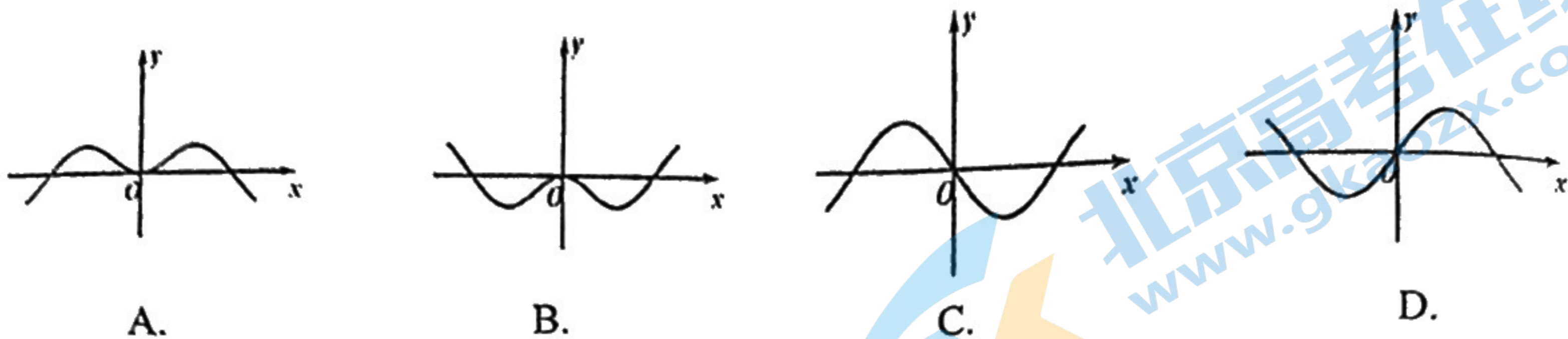


4. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $x \pm 2\sqrt{2}y = 0$, 且焦点恰为抛物线

$y^2 = 12x$ 的焦点, 则双曲线方程为

- A. $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$ D. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$

5. 函数 $f(x) = \left(1 - \frac{2}{1+e^x}\right) \cos x$ 的图象大致形状是



6. 如图 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $DE \parallel CA$, 且 $DE:CA=2:3$,

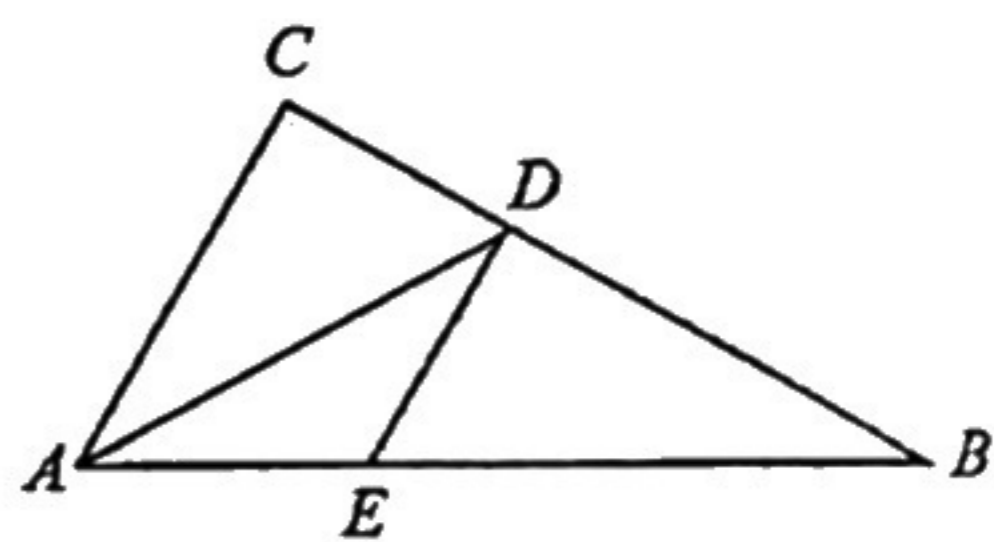
则 $\overline{AD} \cdot \overline{DE} =$

A. $-\frac{8}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{10}{3}$

D. $-\frac{10}{3}$



7. 已知 $a, b, c \in (0,1)$, 且 $a - \ln a + 1 = e$, $b - \ln b + 2 = e^2$, $c - \ln c + 3 = e^3$, 其中 e 是自然对数的底数, 则

A. $c > b > a$

B. $c > a > b$

C. $a > c > b$

D. $a > b > c$

8. 已知集合 $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 9\}$, 集合 A_1, A_2, A_3 满足: ①每个集合都恰有 3 个元素; ②

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = M$. 集合 A_i 中元素的最大值与最小值之和称为集合 A_i 的特征数, 记为

$X_i (i=1,2,3)$, 则 $X_1 + X_2 + X_3$ 的最大值与最小值的和为

A. 60

B. 63

C. 56

D. 57

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设实数 a, b 满足 $a > b$, 则下列不等式不一定成立的是

A. $a^3 > b^3$

B. $\ln |a| > \ln |b|$

C. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

D. $a + b + 2\sqrt{ab} < 0$

10. 已知函数 $f(x) = |\sin 2x - \cos 2x|$, 则

A. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$

B. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

C. $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$ 上单调递增

D. 把函数 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度可得到函数 $y = f(x)$ 的图象

11. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的各顶点都在球 O 上, 底面 $ABCD$ 为长方形, 侧棱 $PD \perp$ 底面

$ABCD$, 且 $PD = CD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = 2$, 过棱 PC 的中点 E , 作 $EF \perp PB$ 交 PB 于点 F ,

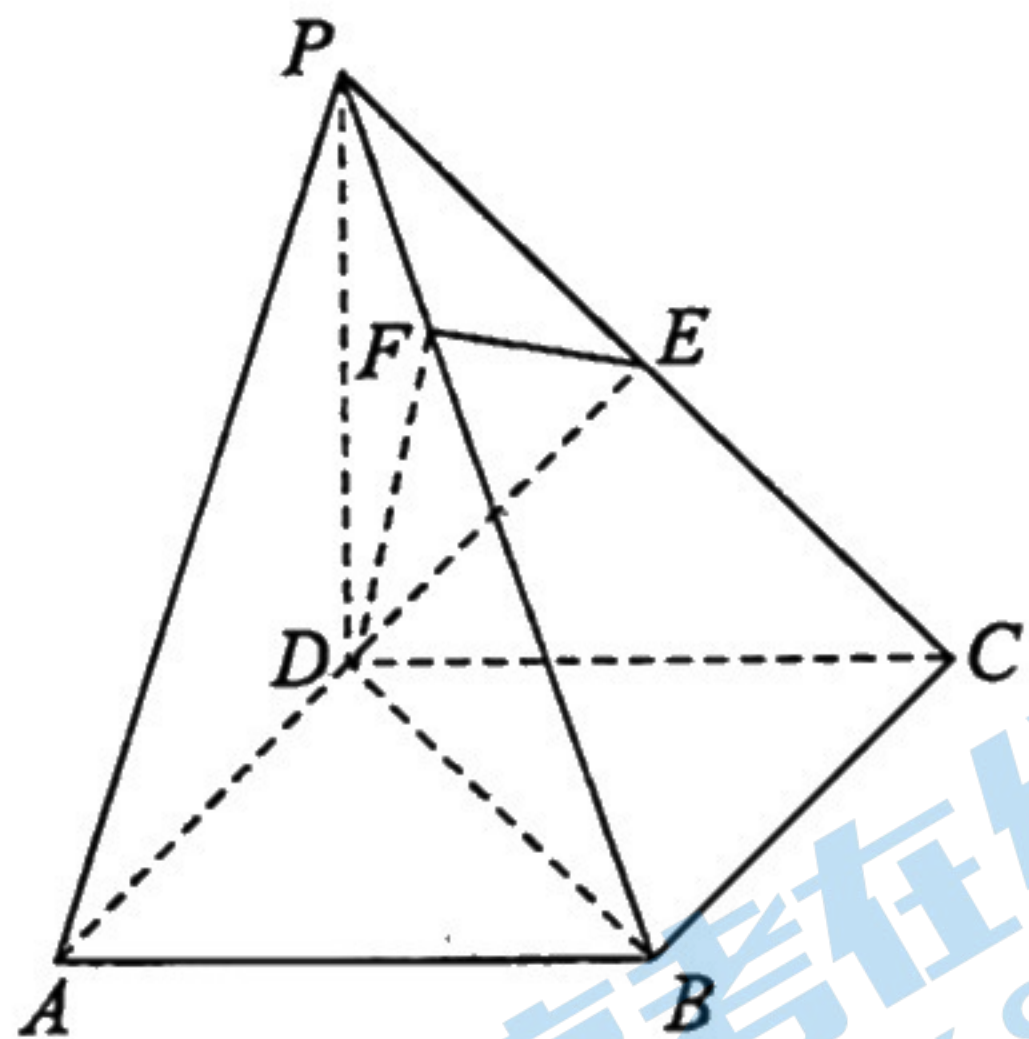
连接 DE, DF . 则下列结论正确的是

A. $PB \perp$ 平面 DEF

B. 球 O 的表面积是 10π

C. AP 与平面 DEF 所成角的正弦值是 $\frac{2}{3}$

D. 平面 DEF 截球 O 的截面圆面积是 3π



12. 设圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: 2x + 3y - 6 = 0$, 过直线 l 上动点 P 作圆 O 的两条切线, 切

点分别为 A, B , 则

A. P, O, A, B 四点共圆

✓ B. 弦长 $|AB|$ 存在最小值为 $\frac{\sqrt{23}}{3}$

C. 直线 l 上存在点 P , 使得 $\angle APB = 90^\circ$

D. 直线 AB 总经过某一定点

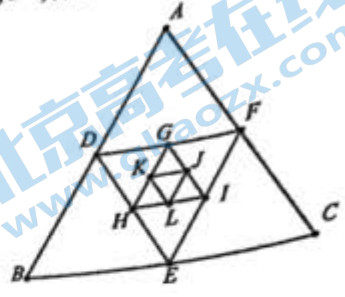
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $\tan(\pi + \theta) = 3$, 则 $\frac{\sin \theta + 2\cos \theta}{2\sin \theta - \cos \theta} =$ _____.

14. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - a > 0$ 为假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 若 $(x^2 - 3x + 2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$, 则 a_3 等于 _____.

16. 如图, 正 $\triangle ABC$ 的边长为 2cm , 取 $\triangle ABC$ 各边的中点 D, E, F , 作第 2 个 $\triangle DEF$, 然后再取 $\triangle DEF$ 各边的中点 G, H, I , 作第 3 个 $\triangle GHI$, 依此方法作第 4 个三角形, 第 5 个三角形, \dots , 如果这个作图过程可以一直继续下去, 那么所有这些三角形的面积之和将趋近于 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足

$$(2\sin B - \sqrt{3}\cos C)a = \sqrt{3}c\cos A.$$

- (1) 求角 A 的值;
- (2) 当 $a=4, b+c=8$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列, a_1, a_2, a_5 成等比数列. 数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = n^2 + 2n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $\langle x \rangle$ 表示 x 的个位数字, 如 $\langle 2022 \rangle = 2, \langle 2023 \rangle = 3$, 求数列 $\left\{ \frac{1}{\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle} \right\}$ 的前 20 项的和 T_{20} .

19. (本小题满分 12 分)

为了调查高一年级学生的选科意愿, 某学校随机抽取该校 100 名高一学生进行调查, 拟选报物理和历史的人数统计如下表:

	物理 (人)	历史 (人)	合计
男	50		55
女			
合计		25	

(1) 补全 2×2 列联表; 并判断是否有 99% 的把握认为选科与性别有关?

(2) 若用样本频率作为概率的估计值:

(a) 在该校高一学生中任选 3 人, 记 ξ 为三人中选物理的人数, 求 ξ 的分布列和数学期望;

(b) 该校高一共有 930 个学生, 若每个学生选科都是独立的, 选物理最大可能的人数是多少?

附:

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(\chi^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (本小题满分 12 分)

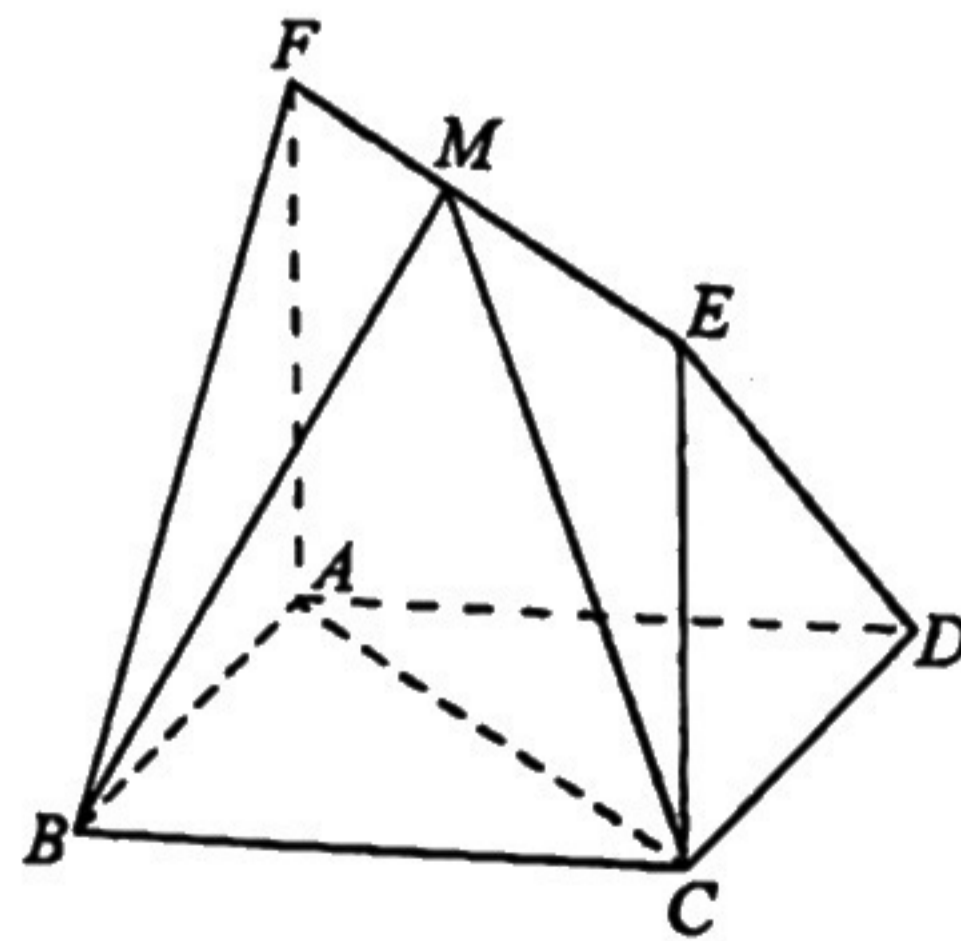
如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle BAD = \frac{3\pi}{4}$, 四边形 $ACEF$ 为矩形, 平面 $ACEF \perp$ 平面 $ABCD$, $AF = 1$.

(1) 求证: 平面 $ABF \perp$ 平面 $ACEF$;

(2) 点 M 在线段 EF 上运动, 且 $\overline{EM} = \lambda \overline{EF}$,

若平面 MBC 与平面 ECD 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{2}{3}$,

求 λ 的值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 l

过右焦点 F_2 且与椭圆 C 交于不同两点 M, N , 当 l 与 x 轴不重合时, $\triangle MF_1N$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 MN, NF_1, MF_1 的中点依次为 D, H, G , 当直线 l 的斜率 k 为何值时, $\triangle DHG$ 的内切圆半径 r 最大?

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + ax$, 且 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $x + 3y - 2 = 0$ 相互垂直.

(1) 求 a 的值, 并求出 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $x \in (2, +\infty)$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 恒在直线 $y = k(x - 2) (k \in \mathbf{Z})$ 的上方, 求整数 k 的最大值. ($\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$)

梅州市高三总复习质检试卷 (2022. 2)

数学参考答案与评分意见

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	C	A	D	A	D	A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
BCD	AB	AD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 1

14. $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

15. -1560

16. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

解: (1) $(2\sin B - \sqrt{3}\cos C)a = \sqrt{3}c\cos A,$

由正弦定理可得

$(2\sin B - \sqrt{3}\cos C)\sin A = \sqrt{3}\sin C\cos A,$ 1 分

化简得

$2\sin A\sin B = \sqrt{3}\sin(A+C),$ 2 分

因为 $\sin B = \sin[\pi - (A+C)] = \sin(A+C),$

即 $2\sin A\sin B = \sqrt{3}\sin B,$ 因为 $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sin B \neq 0,$ 3 分

解得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4分

因为 $\angle A$ 锐角, 所以 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ 5分

(2) 由 $\angle A = \frac{\pi}{3}$, 得 $\cos A = \frac{1}{2}$ 6分

由余弦定理可知 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - 2bc - a^2}{2bc}$ 7分

代入得 $\frac{1}{2} = \frac{8^2 - 2bc - 4^2}{2bc}$, 8分

解得 $bc = 16$ 9分

由三角形面积公式得

$S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ 10分

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 由 a_1, a_2, a_5 成等比数列可得 $a_2^2 = a_1 a_5$, 1分

即 $(a_1 + 2)^2 = a_1 \cdot (a_1 + 8)$, 解得 $a_1 = 1$, 2分

所以 $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 3分

又 $S_n = n^2 + 2n$,

则有 $b_1 = S_1 = 1 + 2 = 3$, 4分

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1) = 2n + 1$,

所以 $b_n = 2n + 1$ 5分

(2) 因为 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ 分别表示 a_n, b_n 的个位数, 因此 $\{\langle a_n \rangle\}, \{\langle b_n \rangle\}$ 均为周期数列, 且周期为 5. 7分

将数列 $\left\{ \frac{1}{\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle} \right\}$ 中每 5 个一组, 前 20 项和可分为 4 组, 8分

其前 20 项的和 T_{20} 为

$$T_{20} = 4 \left[\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 1} \right] \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{9} \right] \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{9} \right] = \frac{20}{9}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 补全 2×2 列联表

	物理 (人)	历史 (人)	合计
男	50	5	55
女	25	20	45
合计	75	25	100

..... 2 分

$$\chi^2 = \frac{100 \times (50 \times 20 - 25 \times 5)^2}{75 \times 25 \times 55 \times 45} \approx 16.50 > 6.635, \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

所以有 99% 的把握认为选科与性别有关. 4 分

(a) 由题可知, $\xi \sim B(3, \frac{3}{4})$

$$\text{又 } P(\xi = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}; \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}; \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{27}{64}; \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$P(\xi = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64};$$

所以 ξ 的分布列如下: 8 分

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

ξ 的数学期望是 $E(\xi) = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ 9分

(b) 该学校高一学生选科人数 $\xi \sim B(930, \frac{3}{4})$,

$P(\xi = k) = C_{930}^k (\frac{3}{4})^k (\frac{1}{4})^{930-k}$; 10分

$$\begin{cases} \frac{P(\xi = k)}{P(\xi = k-1)} \geq 1, \\ \frac{P(\xi = k)}{P(\xi = k+1)} \geq 1. \end{cases} \dots\dots\dots 11分$$

解得 $k = 698$ 12分

20. (本小题满分 12分)

(1) 因为 $\angle BAD = \frac{3\pi}{4}$, 所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 1$, $BC = AD = \sqrt{2}$,

则 $AC = 1$, 1分

所以 $AB^2 + AC^2 = BC^2$,

即 $AB \perp AC$ 2分

因为平面 $ACEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ACEF \cap$ 平面 $ABCD = AC$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,
所以 $AB \perp$ 平面 $ACEF$, 3分

又 $AB \subset$ 平面 ABF , 所以平面 $ABF \perp$ 平面 $ACEF$ 4分

(2) 因为四边形 $ACEF$ 为矩形, 所以 $FA \perp AC$,

因为平面 $ACEF \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $ACEF \cap$ 平面 $ABCD = AC$, $FA \subset$ 平面 $ACEF$,
所以 $FA \perp$ 平面 $ABCD$ 5分

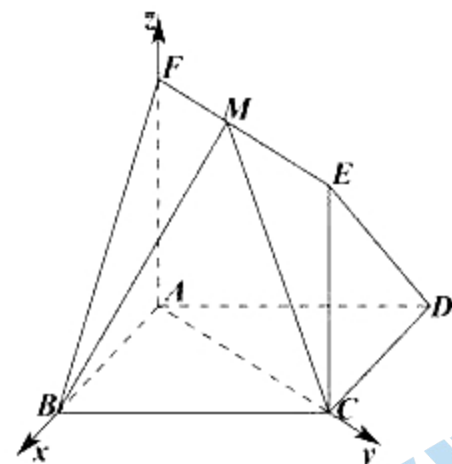
以点 A 为坐标原点, 分别以直线 AB , AC , AF 为 x , y , z 轴,

建立如图所示的空间直角坐标系. 6分

则 $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $E(0, 1, 1)$, $F(0, 0, 1)$,

$\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$ 7分

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EM} = \overrightarrow{CE} + \lambda \overrightarrow{EF} = (0, 0, 1) + \lambda(0, -1, 0) = (0, -\lambda, 1)$ 8分



设平面 MBC 的法向量 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \perp \vec{BC} \\ \vec{n}_2 \perp \vec{CM} \end{cases}$,

即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -\lambda y + z = 0. \end{cases}$ 9 分

所以平面 MBC 的一个法向量 $\vec{n}_2 = (1, 1, \lambda)$ 10 分

由题意可知, 平面 ECD 的一个法向量 $\vec{n}_1 = (0, 1, 0)$, 11 分

因为 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{1}{\sqrt{2 + \lambda^2}} = \frac{2}{3}$, 解得 $\lambda^2 = \frac{1}{4}$,

因为 $0 \leq \lambda \leq 1$, 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$ 12 分

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 因为 $\triangle MF_1N$ 的周长为 8, 依据椭圆定义可知

$MN + MF_1 + NF_1 = 4a = 8$, 1 分

则 $a = 2$.

因为椭圆 C 的离心率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c = \sqrt{3}$, 2 分

再由 $b^2 + c^2 = a^2$, 可得 $b = 1$, 3 分

因此椭圆 C 方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 因为 $\triangle MF_1N$ 的周长为 8, 所以 $\triangle DHG$ 的周长为 4

$S_{\triangle DHG} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot r = 2r$, 即 $r = \frac{1}{2} S_{\triangle DHG}$, 又 $S_{\triangle DHG} = \frac{1}{4} S_{\triangle MF_1N}$, 故 $r = \frac{1}{8} S_{\triangle MF_1N}$,

所以 $\triangle DHG$ 内切圆半径 r 最大, 即 $S_{\triangle MF_1N}$ 最大. 5 分

设直线 l 方程为 $x = my + \sqrt{3}$, 6 分

$$\text{由} \begin{cases} x = my + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases},$$

$$\text{得} (m^2 + 4)y^2 + 2\sqrt{3}my - 1 = 0, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$\Delta > 0$ 显然成立,

$$y_1 + y_2 = \frac{-2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 4}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle F_1MN} &= \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2 + 4}\right)^2 + \frac{4}{m^2 + 4}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 4}, \dots\dots\dots 9 \text{分} \end{aligned}$$

令 $t = \sqrt{m^2 + 1} (t \geq 1)$, 则 $m^2 = t^2 - 1$,

$$S_{\triangle F_1MN} = \frac{4\sqrt{3}t}{t^2 + 3} = \frac{4\sqrt{3}}{t + \frac{3}{t}} \leq \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

当且仅当 $t = \frac{3}{t}$, 即 $t = \sqrt{3} (t \geq 1)$ 时等号成立, 此时 $m = \pm\sqrt{2}$, $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

$$\text{所以 } k = \frac{1}{m} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

22. (本小题满分 12 分)

(1) 解: $f(x) = x \ln x + ax$, 可得 $f'(x) = \ln x + 1 + a$,

$$\text{所以 } f'(e) = \ln e + 1 + a = 2 + a, \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

因为 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线与直线 $x + 3y - 2 = 0$ 相互垂直,

$$\text{所以 } f'(e) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \text{ 得 } f'(e) = 2 + a = 3,$$

$$\text{所以 } a = 1. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{所以 } f(x) = x \ln x + x, \quad x > 0,$$

可得 $f'(x) = \ln x + 2$,

令 $f'(x) = \ln x + 2 = 0$, 得 $x = e^{-2}$

所以当 $x > e^{-2}$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为: $(e^{-2}, +\infty)$, 4分

$f(x)$ 的单调递减区间为: $(0, e^{-2})$ 5分

(2) 当 $x > 2$ 时, 即有: $k < \frac{x \ln x + x}{x - 2}$ 6分

设 $g(x) = \frac{x \ln x + x}{x - 2}$, $x > 2$, 等价于 $k < g(x)_{\min}$

$g'(x) = \frac{(\ln x + 2)(x - 2) - (x \ln x + x)}{(x - 2)^2} = \frac{-2 \ln x + x - 4}{(x - 2)^2} = -2 \times \frac{\ln x - \frac{1}{2}x + 2}{(x - 2)^2}$.
..... 7分

令 $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}x + 2$, $h'(x) = \frac{2 - x}{2x}$,

因为 $x > 2$, 所以 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递减, 8分

令 $g'(x) = 0$, $x = x_0$, 即 $\ln x_0 - \frac{1}{2}x_0 + 2 = 0$ 等价于 $\ln x_0 = \frac{1}{2}x_0 - 2$,

因为 $h(8) = \ln 8 - 4 + 2 = 3 \ln 2 - 2 > 0$,

$h(9) = \ln 9 - \frac{9}{2} + 2 = 2 \ln 3 - \frac{5}{2} < 0$,

可得 $8 < x_0 < 9$, 9分

当 $x \in (2, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 2}$, 10分

又 $\ln x_0 = \frac{1}{2}x_0 - 2$,

$$g(x_0) = \frac{x_0 \left(\frac{1}{2}x_0 - 2 \right) + x_0}{x_0 - 2} = \frac{\frac{1}{2}x_0^2 - 2x_0 + x_0}{x_0 - 2} = \frac{\frac{1}{2}x_0^2 - x_0}{x_0 - 2} = \frac{1}{2}x_0 \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

因为 $8 < x_0 < 9$,

所以 $g(x_0) \in \left(4, \frac{9}{2} \right)$.

因为 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $k < g(x)_{\min}$,
所以 $k \leq 4$.

..... 12 分

所以 k 的最大值为 4.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。