2022 届新高考开学数学摸底考试卷 1

（学生版）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1．已知集合 A＝$\{x|x^2-x-2<0\}$，B＝$\{x|1<x<3\}$，则 A$\cap$B＝

A．$\{x|-1<x<3\}$　B．$\{x|-1<x<1\}$　C．$\{x|1<x<2\}$　D．$\{x|2<x<3\}$

2．已知$(3-4i)z=1+i$，其中 i 为虚数单位，则在复平面内 z 对应的点位于

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

3．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{5\pi}{6}$　D．$\frac{2\pi}{3}$

4．在平面直角坐标系 xOy 中，若点 P($4\sqrt{3}$，0)到双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1$的一条渐近线的距离为 6，则双曲线 C 的离心率为

A．2　B．4　C．$\sqrt{2}$　D．$\sqrt{3}$

5．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．若 $2b\cos C\leqslant 2a-c$，则角 B 的取值范围是

A．$(0,\frac{\pi}{3}]$　B．$(0,\frac{2\pi}{3}]$　C．$[\frac{\pi}{3},\pi)$　D．$[\frac{2\pi}{3},\pi)$

6．设 $a=\log_4 9$，$b=2^{-1.2}$，$c=(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$，则

A．$a>b>c$　B．$b>a>c$　C．$a>c>b$　D．$c>a>b$

7．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 A：$(x-1)^2+y^2=1$，点 B(3，0)，过动点 P 引圆 A 的切线，切点为 T．若 PT＝$\sqrt{2}$PB，则动点 P 的轨迹方程为

A．$x^2+y^2-14x+18=0$　B．$x^2+y^2+14x+18=0$

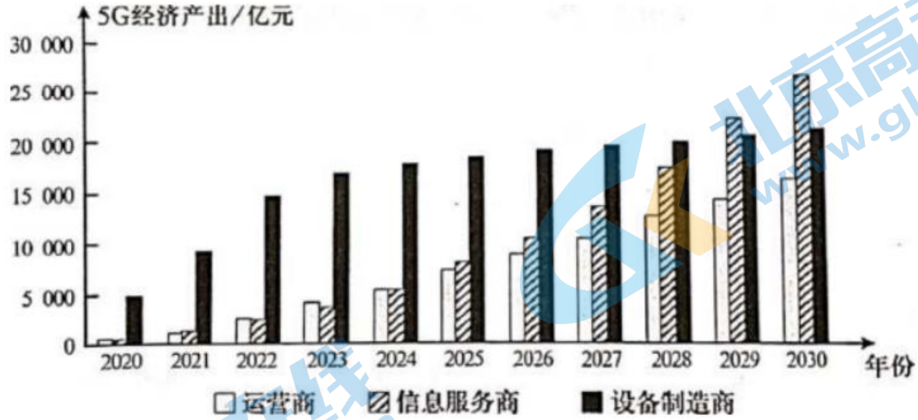
C．$x^2+y^2-10x+18=0$　D．$x^2+y^2+10x+18=0$

8．已知奇函数 $f(x)$的定义域为 R，且 $f(1+x)=f(1-x)$．若当 $x\in(0，1]$时，$f(x)=\log_2(2x+3)$，则 $f(\frac{93}{2})$的值是

A．－3　B．－2　C．2　D．3

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9．5G 时代已经到来，5G 的发展将直接带动包括运营、制造、服务在内的通信行业整体的快速发展，进而对 GDP 增长产生直接贡献，并通过产业间的关联效应，间接带动国民经济各行业的发展，创造出更多的经济增加值．如图，某单位结合近年数据，对今后几年的 5G 经济产出做出预测



由上图提供的信息可知

A．运营商的经济产出逐年增加

B．设备制造商的经济产出前期增长较快，后期放缓

C．设备制造商在各年的总经济产出中一直处于领先地位

D．信息服务商与运营商的经济产出的差距有逐步拉大的趋势

10．将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则

A．函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 对称

B．函数 $g(x)$ 的图象关于点($\dfrac{\pi}{6}$，0)对称

C．函数 $g(x)$ 在区间($-\dfrac{5\pi}{12}$，$-\dfrac{\pi}{6}$)上单调递增

D．函数 $g(x)$ 在区间(0，$\dfrac{7\pi}{6}$)上有两个零点

11．已知 $(2+x)(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则

A．a_0 的值为 2　　B．a_5 的值为 16

C．$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 的值为－5　D．$a_1+a_3+a_5$ 的值为 120

12．记函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域的交集为 I．若存在 $x_0\in$ I，使得对任意 $x\in$ I，不等式 $[f(x)\ \ -g(x)](x-x_0)\geq 0$ 恒

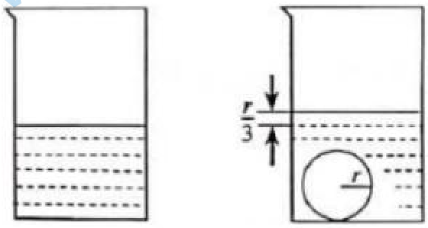
成立，则称($f(x)$ ，$g(x)$)构成“M 函数对”．下列所给的两个函数能构成“M 函数对”的有

A． $f(x)=\ln x$ ， $g(x)=\dfrac{1}{x}$　　　　B． $f(x)=e^x$ ， $g(x)=ex$

C． $f(x)=x^3$ ， $g(x)=x^2$　　　　D． $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ， $g(x)=3\sqrt{x}$

三、填空题（本大题共 4 小题， 每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13．如图，一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水．若放入一个半径为 r 的实心铁球（小球完全浸入水中），水面高度恰好升高 $\dfrac{r}{3}$ ，则 $\dfrac{R}{r}=$ _______．



第 13 题

14．被誉为“数学之神”之称的阿基米德（前 287—前 212），是古希腊伟大的物理学家、数学家、天文学家，他最早利用逼近的思想证明了如下结论：抛物线的弦与抛物线所围成的封闭图形的面积，等于抛物线的弦与经过弦的端点的两条切线所围成的三角形面积的三分之二．这个结论就是著名的阿基米德定理，其中的三角形被称为阿基米德三角形．在平面直角坐标系心中，已知直线 l：$y=4$ 与抛物线 C： $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 交于 A，B 两点，则弦与抛物线 C 所围成的封闭图形的面积为_______．

15．已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n=a_na_{n+1}$ ，$n\in N^*$ ，则 $a_4=$ _______；若 $a_1=2$，则 $S_{20}=$ _______．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

16．若不等式 $(ax^2+bx+1)e^x\le 1$ 对一切 $x\in R$ 恒成立，其中 $a,b\in R$，e 为自然对数的底数，则 $a+b$ 的取值范围是_______．

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

已知向量 $\vec{m}=(2\cos x,\ -1)$，$\vec{n}=(\sqrt{3}\sin x,\ 2\cos^2 x)$，$x\in R$，设函数 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}+1$．

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若 $a\in[\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{7\pi}{12}]$，且 $f(a)=\dfrac{8}{5}$，求 $\cos 2a$ 的值．

18．（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，其前 n 项和为 S_n ，

（1）在① $S_1+S_3=2S_2+2$，② $S_3=\dfrac{7}{3}$，③ $a_2a_3=4a_4$，这三个条件中任选一个，补充到上述题干中．求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并判断此时数列 $\{a_n\}$ 是否满足条件 P：任意 m，$n\in N^*$，a_ma_n 均为数列 $\{a_n\}$ 中的项，说明理由；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=n(\dfrac{a_{n+1}}{a_n})^{n-1}$，$n\in N^*$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

注：在第（1）问中，如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

19.（本小题满分 12 分）

为调查某校学生的课外阅读情况，随机抽取了该校 100 名学生（男生 60 人，女生 40 人），统计了他们的课外阅读达标情况（一个学期中课外阅读是否达到规定时间），结果如下：

是否达标 / 性别	不达标	达标
男生	36	24
女生	10	30

（1）是否有 99%的把握认为课外阅读达标与性别有关?

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

P($\chi^2\geqslant k$)	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

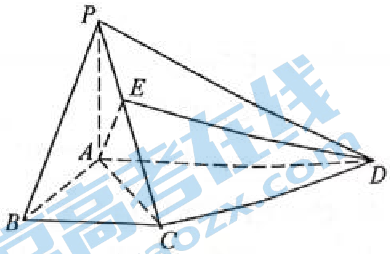
（2）如果用这 100 名学生中男生和女生课外阅读“达标”的频率分别代替该校男生和女生课外阅读“达标”的概率，且每位学生是否“达标”相互独立．现从该校学生中随机抽取 3 人（2 男 1 女），设随机变量 X 表示“3 人中课外阅读达标的人数”，试求 X 的分布列和数学期望．

20.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 P—ABCD 中，平面 PAD⊥平面 ABCD，AD∥BC，AB＝BC＝PA＝1，AD＝2，∠PAD＝∠DAB＝90°，点 E 在棱 PC 上，设 CE＝λCP．

（1）求证：CD⊥AE；

（2）记二面角 C—AE—D 的平面角为 θ，且 $|\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，求实数 λ 的值．



21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（1）设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，T 是椭圆 C 上的一个动点，求 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}$ 的取值范围；

（2）设 A(0，－1)，与坐标轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 B，D 两点，若△ABD 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=kx-x\ln x$，$k\in$R.

（1）当 k=2 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 0＜x≤1 时，$f(x)\le k$ 恒成立，求 k 的取值范围；

（3）设 $n\in \mathrm{N}^*$，求证：$\frac{\ln 1}{2}+\frac{\ln 2}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n+1}\le\frac{n(n-1)}{4}$.

2022 届新高考开学数学摸底考试卷 1

（教师版）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

1．已知集合 A＝$\left\{x\left|x^2-x-2<0\right.\right\}$，B＝$\left\{x\left|1<x<3\right.\right\}$，则 A$\bigcap$B＝

A. $\{x|-1<x<3\}$　B. $\{x|-1<x<1\}$　C. $\{x|1<x<2\}$　D. $\{x|2<x<3\}$

【答案】C

【解析】∵集合 A＝$\{x|x^2-x-2<0\}$，∴集合 A＝$\{x|-1<x<2\}$，

又∵B＝$\{x|1<x<3\}$，∴A⋂B＝$\{x|1<x<2\}$，故选 C.

2．已知$(3-4i)z=1+i$，其中 i 为虚数单位，则在复平面内 z 对应的点位于

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

【答案】B

【解析】$z=\dfrac{1+i}{3-4i}=\dfrac{-1+7i}{25}$，故在复平面内 z 对应的点为$(-\dfrac{1}{25}，\dfrac{7}{25})$，在第二象限，故选 B.

3．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，且$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　B．$\dfrac{\pi}{3}$　C．$\dfrac{5\pi}{6}$　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

【答案】D

【解析】$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}\Rightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=3\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，

$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-1}{1\times 2}=-\dfrac{1}{2}$，故$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，故选 D.

4．在平面直角坐标系 xOy 中，若点 P($4\sqrt{3}$，0)到双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$的一条渐近线的距离为 6，则双曲线 C 的离心率为

A．2　B．4　C．$\sqrt{2}$　D．$\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$的一条渐近线为$3x-ay=0$，

则$\dfrac{12\sqrt{3}}{\sqrt{9+a^2}}=6$，解得$a=\sqrt{3}$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$，故选 A.

5．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．若 $2b\cos C\leqslant 2a-c$，则角 B 的取值范围是

A．$(0，\dfrac{\pi}{3}]$　B．$(0，\dfrac{2\pi}{3}]$　C．$[\dfrac{\pi}{3}，\pi)$　D．$[\dfrac{2\pi}{3}，\pi)$

【答案】A

【解析】∵$2b\cos C\leqslant 2a-c$，∴$2\sin B\cos C\leqslant 2\sin A-\sin C$，故 $\cos B\geqslant\dfrac{1}{2}$，

∴$0<B\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，故选 A.

6．设 $a=\log_4 9$，$b=2^{-1.2}$，$c=(\frac{8}{27})^{-\frac{1}{3}}$，则

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$a>c>b$　　D．$c>a>b$

【答案】C

【解析】∵9＞8，∴3＞$2^{\frac{3}{2}}$，故 $\log_2 3>\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$，

从而有 $a=\log_4 9=\log_2 3>\frac{3}{2}=c>1>2^{-1.2}=b$，故选 C．

7．在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 A：$(x-1)^2+y^2=1$，点 B(3，0)，过动点 P 引圆 A 的切线，切点为 T．若 PT ＝$\sqrt{2}$ PB，则动点 P 的轨迹方程为

A．$x^2+y^2-14x+18=0$　　B．$x^2+y^2+14x+18=0$

C．$x^2+y^2-10x+18=0$　　D．$x^2+y^2+10x+18=0$

【答案】C

【解析】设 P(x，y)，∵PT＝$\sqrt{2}$ PB，∴PT²＝2PB²，

∴ $(x-1)^2+y^2-1=2[(x-3)^2+y^2]$，整理得：$x^2+y^2-10x+18=0$，故选 C．

8．已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(1+x)=f(1-x)$．若当 $x\in(0，1]$时，$f(x)=\log_2(2x+3)$，则 $f(\frac{93}{2})$ 的值是

A．－3　　B．－2　　C．2　　D．3

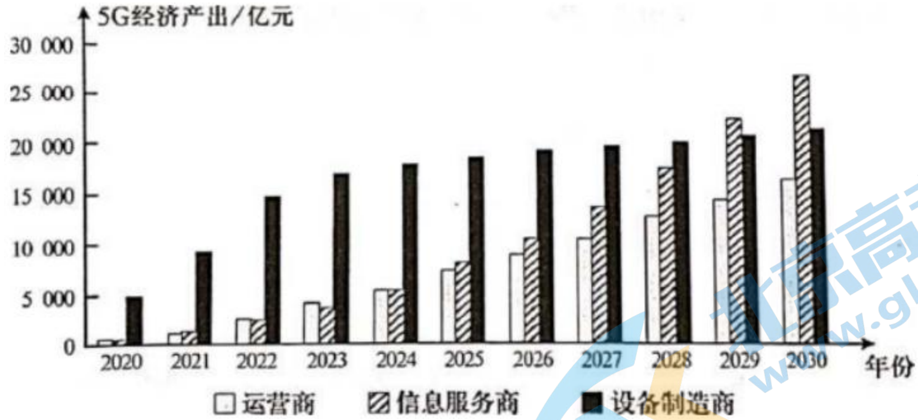
【答案】B

【解析】根据奇函数 $f(x)$，满足 $f(1+x)=f(1-x)$，可知函数的周期为 4，

∴ $f(\frac{93}{2})=f(-\frac{3}{2}+48)=f(-\frac{3}{2})=-f(\frac{3}{2})=-f(\frac{1}{2})=-\log_2 4=-2$，故选 B.

二、 多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分， 共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案添涂在答题卡相应位置上）

9．5G 时代已经到来，5G 的发展将直接带动包括运营、制造、服务在内的通信行业整体的快速发展，进而对 GDP 增长产生直接贡献，并通过产业间的关联效应，间接带动国民经济各行业的发展，创造出更多的经济增加值．如图，某单位结合近年数据，对今后几年的 5G 经济产出做出预测



由上图提供的信息可知

A．运营商的经济产出逐年增加

B．设备制造商的经济产出前期增长较快，后期放缓

C．设备制造商在各年的总经济产出中一直处于领先地位

D．信息服务商与运营商的经济产出的差距有逐步拉大的趋势

【答案】ABD

【解析】从图表中可以看出 2029 年、2030 年信息服务商在总经济产出中处于领先地位，C 错误，故选 ABD．

10．将函数 $f(x)=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位后，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则

A．函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 对称

B．函数 $g(x)$ 的图象关于点$(\dfrac{\pi}{6}，0)$对称

C．函数 $g(x)$ 在区间$(-\dfrac{5\pi}{12}，-\dfrac{\pi}{6})$上单调递增

D．函数 $g(x)$ 在区间$(0，\dfrac{7\pi}{6})$上有两个零点

【答案】ACD

【解析】可得 $g(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，当 $x=\dfrac{\pi}{12}$，$2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，故 A 正确；

当 $x=\dfrac{\pi}{6}$，$2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，故 B 错误；

当 $x\in(-\dfrac{5\pi}{12}，-\dfrac{\pi}{6})$，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in(-\dfrac{\pi}{2}，0)$，故 C 正确；

当 $x\in(0,\ \frac{7\pi}{6})$，$2x+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3})$，故 D 正确．

故选 ACD．

11．已知 $(2+x)(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则

A．a_0 的值为 2　　　　　　　　B．a_5 的值为 16

C．$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ 的值为－5　D．$a_1+a_3+a_5$ 的值为 120

【答案】ABC

【解析】令 $x=0$，得 $a_0=2$，故 A 正确；

$2\times(-2)^5C_5^5+(-2)^4C_5^4=16$，故 $a_5=16$，B 正确；

令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=-3$①，又 $a_0=2$，

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=-5$，故 C 正确；

令 $x=-1$，得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=243$②，由①②得：

$a_1+a_3+a_5=-123$，D 错误．

故选 ABC．

12．记函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域的交集为 I．若存在 $x_0\in$ I，使得对任意 $x\in$ I，不等式 $[f(x)\ \ -g(x)](x-x_0)\geq 0$ 恒成立，则称($f(x)$，$g(x)$)构成"M 函数对"．下列所给的两个函数能构成"M 函数对"的有

A．$f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{1}{x}$　　　　B．$f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=\mathrm{e}x$

C．$f(x)=x^3$，$g(x)=x^2$　　　　　D．$f(x)=x+\frac{1}{x}$，$g(x)=3\sqrt{x}$

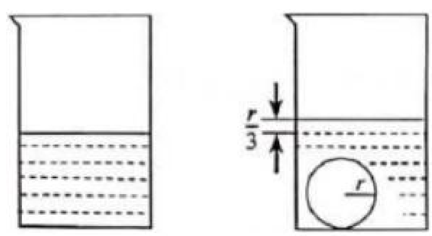
【答案】AC

【解析】选项 B 满足 $f(x)\geq g(x)$，故不成立；选项 D，$F(x)=f(x)-g(x)$ 存在两个非零的零点，故不成立．

故选 AC．

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．请把答案填写在答题卡相应位置上）

13．如图，一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水．若放入一个半径为 r 的实心铁球（小球完全浸入水中），水面高度恰好升高 $\frac{r}{3}$，则 $\frac{R}{r}=$ ________．



【答案】2

【解析】$\pi R^2\frac{r}{3}=\frac{4}{3}\pi r^3\Rightarrow\frac{R^2}{r^2}=4\Rightarrow\frac{R}{r}=2$.

14．被誉为“数学之神”之称的阿基米德（前 287—前 212），是古希腊伟大的物理学家、数学家、天文学家，他最早利用逼近的思想证明了如下结论：抛物线的弦与抛物线所围成的封闭图形的面积，等于抛物线的弦与经过弦的端点的两条切线所围成的三角形面积的三分之二．这个结论就是著名的阿基米德定理，其中的三角形被称为阿基米德三角形．在平面直角坐标系心中，已知直线 l：$y=4$ 与抛物线 C：$y=\frac{1}{4}x^2$ 交于 A，B 两点，则弦与抛物线 C 所围成的封闭图形的面积为_______．

【答案】$\frac{64}{3}$

【解析】首先得到弦的两个端点的坐标分别为(4，4)，(－4，4)，其次得在该两点处的抛物线的切线方程分别为 $y=2x-4$，$y=-2x-4$，从而抛物线的弦与经过弦的端点的两条切线所围成的三角形面积为 $\frac{1}{2}\times8\times8=32$，故弦与抛物线 C 所围成的封闭图形的面积为 $\frac{64}{3}$.

15．已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=a_na_{n+1}$，$n\in\mathrm{N}^*$，则 $a_4=$_______；若 $a_1=2$，则 $S_{20}=$_______．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

【答案】4；220

【解析】根据 $2S_n=a_na_{n+1}$①，得 $2S_{n-1}=a_na_{n-1}$②，①－②得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$，

故 $a_4=a_2+2=4$；当 $a_1=2$，可得该数列满足 $a_{2k-1}=a_{2k}$，且 $\{a_{2k-1}\}$ 与 $\{a_{2k}\}$ 均为公差为 2 的等差数列，即可求得 $S_{20}=220$.

16.若不等式 $(ax^2+bx+1)\mathrm{e}^x\le1$ 对一切 $x\in\mathrm{R}$ 恒成立，其中 $a,b\in\mathrm{R}$，e 为自然对数的底数，则 $a+b$ 的取值范围是_______.

【答案】$(-\infty，-1]$

【解析】令 $f(x)=(ax^2+bx+1)\mathrm{e}^x$，$f(x)\le f(0)$ 恒成立，显然 $a\leqslant0$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x[ax^2+(2a+b)x+b+1]$，则 $f'(0)=b+1=0\Rightarrow b=-1$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x[ax^2+(2a+1)x]=x\mathrm{e}^x(ax+2a-1)$，

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty，0)$ 递增，$(0，+\infty)$ 递减，$f(x)\le f(0)$ 符合题意，

$a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty，\frac{1-2a}{a})$ 递减，$(\frac{1-2a}{a}，0)$ 递增，$(0，+\infty)$ 递减

$x<\frac{1-2a}{a}$，$ax^2-x+1<0\Rightarrow f(x)<0$，故 $f(x)\le f(0)$ 符合题意，

综上，$a\leqslant0$，$b=-1$，因此 $a+b\in(-\infty，-1]$.

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

已知向量 $\vec{m}=(2\cos x,\ -1)$，$\vec{n}=(\sqrt{3}\sin x,\ 2\cos^2 x)$，$x\in\mathrm{R}$，设函数 $f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}+1$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（2）若 $a\in[\frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{12}]$，且 $f(a)=\frac{8}{5}$，求 $\cos 2a$ 的值.

解： 因为 $\boldsymbol{m}=(2\cos x,\ -1)$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}\sin x,\ 2\cos^2 x)$，

所以 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}+1=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

（1）$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）由 $f(\alpha)=\frac{8}{5}$，得 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{4}{5}$.

由 $\alpha\in[\frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{12}]$，得 $\frac{\pi}{2}\le 2\alpha-\frac{\pi}{6}\le\pi$，

所以 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})=-\sqrt{1-\sin^2(2\alpha-\frac{\pi}{6})}=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\frac{3}{5}$，

从而 $\cos 2\alpha=\cos[(2\alpha-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6}-\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})\sin\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，

（1）在① $S_1+S_3=2S_2+2$，② $S_3=\frac{7}{3}$，③ $a_2a_3=4a_4$，这三个条件中任选一个，补充到上述题干中. 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，并判断此时数列 $\{a_n\}$ 是否满足条件 P：任意 m，$n\in\mathrm{N}^*$，a_ma_n 均为数列 $\{a_n\}$ 中的项，说明理由；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=n(\frac{a_{n+1}}{a_n})^{n-1}$，$n\in\mathrm{N}^*$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

注：在第（1）问中，如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

解：（1）选①，

因为 $S_1+S_3=2S_2+2$，

所以 $S_3-S_2=S_2-S_1+2$，即 $a_3=a_2+2$，

又数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

所以 $4a_1=2a_1+2$，解得 $a_1=1$，

因此 $a_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$.

此时任意 m，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_ma_n=2^{m-1}\cdot 2^{n-1}=2^{m+n-2}$，

由于 $m+n-1\in\mathbf{N}^*$，所以 a_ma_n 是数列$\{a_n\}$的第 $m+n-1$ 项，

因此数列$\{a_n\}$满足条件 P.

选②，

因为 $S_3=\frac{7}{3}$，即 $a_1+a_2+a_3=\frac{7}{3}$，

又数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，

所以 $a_1+2a_1+4a_1=\frac{7}{3}$，解得 $a_1=\frac{1}{3}$，

因此 $a_n=\frac{1}{3}\times2^{n-1}$.

此时 $a_1a_2=\frac{2}{9}<a_1\leq a_n$，即 a_1a_2 不为数列$\{a_n\}$中的项，

因此数列$\{a_n\}$不满足条件 P.

选③，

因为 $a_2a_3=4a_4$，

又数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，

所以 $2a_1\times4a_1=4\times8a_1$，又 $a_1\neq0$，故 $a_1=4$，

因此 $a_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$.

此时任意 m，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_ma_n=2^{m+1}\cdot2^{n+1}=2^{m+n+2}$，

由于 $m+n+1\in\mathbf{N}^*$，所以 a_ma_n 是为数列$\{a_n\}$的第 $m+n+1$ 项，

因此数列$\{a_n\}$满足条件 P.

（2）因为数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，因此 $b_n=n\times2^{n-1}$.

所以 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\ldots+n\times2^{n-1}$，

则 $2T_n=1\times2^1+2\times2^2+\ldots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$，

两式相减得 $-T_n=1+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}-n\times2^n$

$=\frac{1-2^n}{1-2}-n\times2^n$

$=(1-n)2^n-1$，

所以 $T_n=(n-1)2^n+1$.

19.（本小题满分 12 分）

为调查某校学生的课外阅读情况，随机抽取了该校 100 名学生（男生 60 人，女生 40 人），统计了他们的课外阅读达标情况（一个学期中课外阅读是否达到规定时间），结果如下：

是否达标	不达标	达标

性别		
男生	36	24
女生	10	30

（1）是否有 99%的把握认为课外阅读达标与性别有关?

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

P($\chi^2\geqslant k$)	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
k	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（2）如果用这 100 名学生中男生和女生课外阅读“达标”的频率分别代替该校男生和女生课外阅读“达标”的概率，且每位学生是否“达标”相互独立．现从该校学生中随机抽取 3 人（2 男 1 女），设随机变量 X 表示“3 人中课外阅读达标的人数”，试求 X 的分布列和数学期望．

解：（1）假设 H_0：课外阅读达标与性别无关，根据列联表，求得

$$\chi^2=\frac{100\times(36\times30-24\times10)^2}{(36+24)\times(10+30)\times(36+10)\times(24+30)}=\frac{2450}{207}\approx11.836>6.635,$$

因为当 H_0 成立时，$\chi^2\geq6.635$ 的概率约为 0.01，

所以有 99%以上的把握认为课外阅读达标与性别有关．

（2）记事件 A 为：从该校男生中随机抽取 1 人，课外阅读达标；

事件 B 为：从该校女生中随机抽取 1 人，课外阅读达标．

由题意知：$P(A)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$.

随机变量 X 的取值可能为 0，1，2，3．

$$P(X=0)=(1-\frac{2}{5})^2\times(1-\frac{3}{4})=\frac{9}{100},$$

$$P(X=1)=C_2^1\times\frac{2}{5}\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{3}{4})+\frac{3}{4}\times(1-\frac{2}{5})^2=\frac{39}{100},$$

$$P(X=2)=(\frac{2}{5})^2\times(1-\frac{3}{4})+C_2^1\times\frac{2}{5}\times(1-\frac{2}{5})\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5},$$

$$P(X=3)=(\frac{2}{5})^2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{25}.$$

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{9}{100}$	$\frac{39}{100}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{25}$

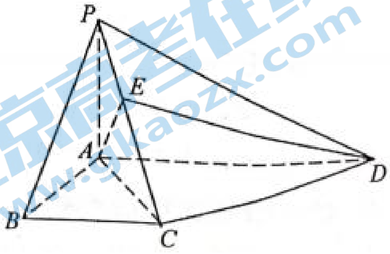
期望 $E(X)=0\times\frac{9}{100}+1\times\frac{39}{100}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{3}{25}=1.55$.

20．（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 P—ABCD 中，平面 PAD⊥平面 ABCD，AD∥BC，AB＝BC＝PA＝1，AD＝2，∠PAD＝∠DAB＝90°，点 E 在棱 PC 上，设 CE＝λCP.

（1）求证：CD⊥AE;

（2）记二面角 C—AE—D 的平面角为θ，且$\left|\cos\theta\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，求实数$\lambda$的值.



（1）**证明：**因为$\angle PAD=90°$，所以$PA\perp AD$.

因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$PA\subset$平面PAD，

所以$PA\perp$平面$ABCD$.

又$CD\subset$平面$ABCD$，所以$CD\perp PA$.

在四边形$ABCD$中，$AD//BC$，$\angle DAB=90°$，所以$\angle ABC=90°$，

又$AB=BC=1$，所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形，即$\angle BAC=\angle CAD=45°$，$AC=\sqrt{2}$.

在$\triangle CAD$中，$\angle CAD=45°$，$AC=\sqrt{2}$，$AD=2$，

所以$CD=\sqrt{AC^2+AD^2-2\times AC\times AD\times\cos\angle CAD}=\sqrt{2}$，从而$AC^2+CD^2=4=AD^2$.

所以$CD\perp AC$.

又$AC\cap PA=A$，AC，$PA\subset$平面PAC，所以$CD\perp$平面PAC.

又$AE\subset$平面PAC，所以$CD\perp AE$.

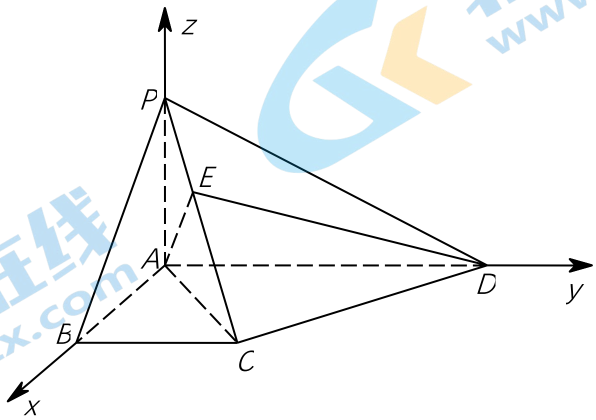
（2）**解：**因为$PA\perp$平面$ABCD$，$BA\perp AD$，

故以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系.

因为$AB=BC=PA=1$，$AD=2$，

所以 $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，

$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，



则$\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$.

因为点E在棱PC上，且$CE=\lambda CP$，

所以$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CP}$，

设$E(x,y,z)$，则$(x-1,y-1,z)=\lambda(-1,-1,1)$，

故$E(1-\lambda,1-\lambda,\lambda)$，所以$\overrightarrow{AE}=(1-\lambda,1-\lambda,\lambda)$.

由（1）知，$CD\perp$平面PAC，所以平面ACE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{CD}=(-1,1,0)$.

设平面 AED 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(1-\lambda)x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda z_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1-\lambda$，所以平面 AED 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(-\lambda,0,1-\lambda)$.

因此 $|\cos\theta|=|\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>|=|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}|=|\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\lambda^2+(1-\lambda)^2}}|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,

化简得 $3\lambda^2-8\lambda+4=0$，解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 2.

因为 E 在棱 PC 上，所以 $\lambda\in[0,1]$，所以 $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

所以当 $|\cos\theta|=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ 时，实数 λ 的值为 $\dfrac{2}{3}$.

21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（1）设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，T 是椭圆 C 上的一个动点，求 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}$ 的取值范围；

（2）设 A(0，－1)，与坐标轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 B，D 两点，若△ABD 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，求直线 l 的方程.

解：（1）因为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，所以 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$.

设 $T(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}=(-\sqrt{3}-x_0,-y_0)\cdot(\sqrt{3}-x_0,-y_0)=x_0^2+y_0^2-3$.

因为点 $T(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上，即 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}=\dfrac{3}{4}x_0^2-2$，且 $x_0^2\in[0,4]$，

所以 $\overrightarrow{TF_1}\cdot\overrightarrow{TF_2}$ 的取值范围是 $[-2,1]$.

（2）因为直线 l 与坐标轴不垂直，故设直线 l 方程 $y=kx+m$ $(m\neq-1,k\neq0)$.

设 $B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1.\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$.

因为△ABD 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，所以 $AB\perp AD$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,

因此 $(y_1+1)(y_2+1)+x_1x_2=0$，即 $(kx_1+m+1)(kx_2+m+1)+x_1x_2=0$,

从而 $(1+k^2)x_1x_2+k(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2=0$,

即 $(1+k^2)\times\dfrac{4(m^2-1)}{1+4k^2}-k(m+1)\times\dfrac{8km}{1+4k^2}+(m+1)^2=0$,

也即 $4(1+k^2)(m-1)-8k^2m+(1+4k^2)(m+1)=0$，解得 $m=\frac{3}{5}$.

又线段 BD 的中点 $M(-\frac{4km}{1+4k^2},\ \frac{m}{1+4k^2})$，且 $AM\perp BD$，

所以 $\dfrac{\frac{m}{1+4k^2}+1}{-\frac{4km}{1+4k^2}}=-\frac{1}{k}$，即 $3m=1+4k^2$，解得 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

又当 $k=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$，$m=\frac{3}{5}$时，$\triangle=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-4)=\frac{576}{25}>0$，

所以满足条件的直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{3}{5}$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=kx-x\ln x$，$k\in\mathrm{R}$.

（1）当 $k=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)\le k$ 恒成立，求 k 的取值范围；

（3）设 $n\in\mathrm{N}^*$，求证：$\dfrac{\ln 1}{2}+\dfrac{\ln 2}{3}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n+1}\le\dfrac{n(n-1)}{4}$.

解：（1）当 $k=2$ 时，$f(x)=2x-x\ln x$，$f'(x)=1-\ln x$，

由 $f'(x)>0$，解得 $0<x<\mathrm{e}$；由 $f'(x)<0$，解得 $x>\mathrm{e}$，

因此函数 $f(x)$单调递增区间为$(0,\ \mathrm{e})$，单调递减区间为$(\mathrm{e},\ +\infty)$.

（2）$f(x)=kx-x\ln x$，故 $f'(x)=k-1-\ln x$.

当 $k\ge 1$ 时，因为 $0<x\le 1$，所以 $k-1\ge 0\ge \ln x$，

因此 $f'(x)\ge 0$ 恒成立，即 $f(x)$在$(0,\ 1]$上单调递增，

所以 $f(x)\le f(1)=k$ 恒成立.

当 $k<1$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\mathrm{e}^{k-1}\in(0,\ 1)$.

当 $x\in(0,\ \mathrm{e}^{k-1})$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in(\mathrm{e}^{k-1},\ 1)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

于是 $f(\mathrm{e}^{k-1})>f(1)=k$，与 $f(x)\le k$ 恒成立相矛盾.

综上，k 的取值范围为$[1,\ +\infty)$.

（3）由（2）知，当 $0<x\le 1$ 时，$x-x\ln x\le 1$.

令 $x=\frac{1}{n^2}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}\ln n\le 1$，即 $2\ln n\le n^2-1$，

因此 $\frac{\ln n}{n+1}\le\frac{n-1}{2}$.

所以 $\frac{\ln 1}{2}+\frac{\ln 2}{3}+\ldots+\frac{\ln n}{n+1}\le\frac{0}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$.