2024 届高三暑假作业检测试卷

数学

本试卷共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|-1<x\leqslant 2\}$,$B=\{-1,0,1,2\}$,则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　B. $\{-1,0\}$　C. $\{0,1\}$　D. $\{0,1,2\}$

2.已知$(1-ai)(2+ i)=b+3i$(i 为虚数单位),其中 a,b 为实数,则 a,b 的值分别为

A.-1,1　B.1,-1　C.1,1　D. -1,- 1

★3.设 P 是双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$ 上一点,F_1,F_2 分别是双曲线左、右两个焦点,若$|PF_1|=9$,则$|PF_2|$等于

A.1　B.8　C.17　D.1 或 17

4.为了庆祝中国共产党第二十次全国代表大会,学校采用按比例分配的分层随机抽样的方法从高一 1002 人,高二 1002 人,高三 1503 人中抽取 126 人观看“中国共产党第二十次全国代表大会”直播,那么高三年级被抽取的人数为

A.36　B.42　C.50　D.54

★5.一个圆锥的侧面展开图是圆心角为$\frac{2\pi}{3}$,弧长为2π的扇形,则该圆锥轴截面的面积 S=

A.$\sqrt{2}$　B.$\sqrt{5}$　C.$2\sqrt{2}$　D.$2\sqrt{5}$

★6.已知 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$,$\sin(\frac{5\pi}{4}+\beta)=-\frac{12}{13}$,$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$, $\beta\in(0,\frac{\pi}{4})$,则 $\sin(\alpha+\beta)$的值为

A.$\frac{56}{65}$　B.$\frac{33}{65}$　C.$-\frac{16}{65}$　D.$-\frac{63}{65}$

7.某学生进行投篮训练,采取积分制,有 7 次投篮机会,投中一次得 1 分,不中得 0 分,若连续投中两次则额外加 1 分,连续投中三次额外加 2 分,以此类推,连续投中七次额外加 6 分,假设该学生每次投中的概率是$\frac{1}{2}$,且每次投中之间相互独立,则该学生在此次训练中恰好得 7 分的概率是

A.$\frac{9}{128}$　B.$\frac{5}{64}$　C.$\frac{11}{128}$　D.$\frac{3}{32}$

8.设 $a=\frac{2}{21}$,$b=\sin\frac{2}{21}$,$c=\ln\frac{11}{10}$,则

A.a>b>c　B.a>c>b　C.c>a>b　D.b>c>a

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

★9.已知 m,n 是两条不重合的直线,α,β 是两个不重合的平面，下列命题不正确的是

A.若 $m//\alpha$,m// B,$n//\alpha$,$n//\beta$,则$\alpha//\beta$　B.若 $m\perp n$,$m//\alpha$,$n\perp\beta$,则$\alpha\perp\beta$

C.若 $m\perp n$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则$\alpha\perp\beta$　D.若 $m//n$,$m\perp\alpha$,$n\perp\beta$,则$\alpha//\beta$

★10.已知圆 M:$x^2+y^2+2.x- 4y+ 1=0$,以下结论正确的是

A.过点 A(1,2)与圆 M 相切的直线方程为 x=1

B.圆 M 与圆 N:$(x+4)^2+(y-6)^2=1$ 相交

C.过点(1,1)可以作两条直线与圆 M 相切

D.圆 M 上的点到直线 4x-3y+5=0 的距离的最大值为 3

11.在平面直角坐标系 xOy 中,点 F 是抛物线 C:$y^2=ax(a>0)$的焦点,两点 $A(\frac{a}{16},1)$,$B(a,b)(b<0)$在抛物线 C 上,则下列说法正确的是

A.抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$　B. b=-4

C.以 AB 为直径的圆的方程是$(x-\frac{17}{8})^2+(x+\frac{3}{2})^2=\frac{25}{8}$　D.A,F,B 三点共线

12.定义在 R 上的函数 f(x)的导函数为 f′(x),且 $3f(x)+xf'(x)>0$,则对任意 $x_1<x_2$,下列结论成立的是

A. $\frac{x_1^3}{x_2^3}<\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$　　　　　　　　　B. $e^{3x_1}f(e^{x_1})>0$

C.不存在 x_1,x_2,使得$x_1^6f(x_1^2)=x_2^6f(x_2^2)$　　　　D.存在 x_1,x_2,使得$\frac{x_1^3}{x_2^3}f(\frac{x_1}{x_2})<f(1)$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.已知|a|=3,b=(1,2),则(a+b)•(a-b)=______________.

14.设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $a_1+a_3+a_7+a_9=28$,则 S_9=________________.

15.已知函数 $f(x)=1-\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$,则 f(1)+ f(2)+ f(3)+...+f(2023)=________________.

★16.当 x∈[-2,1]时,不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知 a,b,c 分别为△ABC 内角 A,B,C 的对边，且 csinBsinC=(ccosB+2b- a)cosC.

(1)求角 C;

(2)若 $c^2=2ab$,△ABC 的面积为$\sqrt{3}$,求 a+b 的值.

18. (12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_3=620$,$S_{n+1}=5S_n+20$.

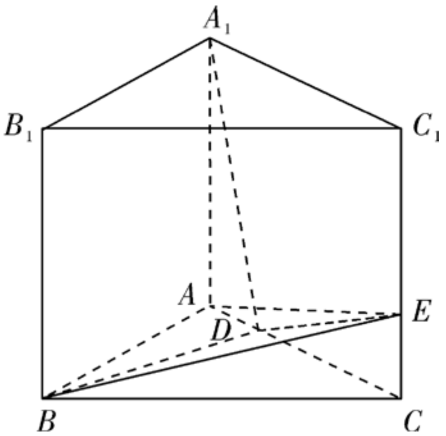
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若 $b_n=\log_5\frac{a_n}{4}$, 数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,求$\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}+...+\frac{1}{T_n}$.

19. (12 分)如图所示，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,AB⊥AC,$AB=AC=AA_1=3$,$AD=\frac{1}{3}AC$,$CE=\frac{1}{3}CC_1$.

(1)求证:$A_1D\perp BE$;

(2)求直线 A_1D 与平面 BDE 所成角的正弦值.



★20. (12 分)元宵佳节,是民间最重要的民俗节日之一. 在某庆祝活动现场,为了解观众对该活动的观感情况(“一般”或“激动”)，现从该活动现场的观众中随机抽取 200 名,得到下表:

性别	观感情况		总计
	一般	激动	
男性		90	120
女性	25		
总计			200

(1)填补上面的 2×2 列联表,并依据小概率值α=0.1 的独立性检验,能否认为性别与对该活动的观感程度有关?

(2)该活动现场还举行了有奖促销活动,凡当天消费每满 300 元,可抽奖一次.抽奖方案是:从装有 3 个红球和 3 个白球(形

状、大小、质地完全相同)的抽奖箱里一次性摸出 2 个球,若摸出 2 个红球，则可获得 100 元现金的返现;若摸出 1 个红球,则可获得 50 元现金的返现;若没摸出红球,则不能获得任何现金返现.若某观众当天消费 600 元,记该观众参加抽奖获得的返现金额为 X,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附: $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 n=a+b+c+d.

α	0.100	0.050	0.010	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	10.828

21. (12 分)已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1(a>b>0)的左、右焦点分别为 F_1,F_2,点 B 是椭圆 C 的，上顶点,△BF_1F_2 是等边三角形,△BF_1F_2 的内切圆的面积为$\frac{\pi}{3}$

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)已知 T 在 x 轴负半轴上且|OT|=4|OF_1|,过 T 的直线与椭圆交于 M, N 两点,求△MNF_1 面积的最大值.

22. (12 分)已知函数 f(x)=$e^{e^{x-t}-t}$.

(1)若 f(x)在(t, f(t))处的切线方程平行于直线 x-y+1=0,求 t 的值以及此时的切线方程;

(2)若方程 f(x)=x 在(0,+∞)上有两个不同的实数根,求实数 t 的取值范围.

2024届高三暑假作业检测试卷

数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	D	C	A	B	C

1. D 【解析】$A\cap B=\{0,1,2\}$.故选D.

2. A 【解析】由$(1-a\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=b+3\mathrm{i}$,得$2+\mathrm{i}-2a\mathrm{i}-a\mathrm{i}^2=b+3\mathrm{i}$,得$2+a+(1-2a)\mathrm{i}=b+3\mathrm{i}$,所以$\begin{cases}2+a=b,\\1-2a=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=1.\end{cases}$故选A.

3. C 【解析】对于$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{20}=1$,$a^2=16$,$b^2=20$,$\therefore c^2=a^2+b^2=36$,$a=4$,$c=6$,

$|PF_1|=9<a+c$,所以P点在双曲线的左支,则有$|PF_2|-|PF_1|=2a=8$,$\therefore|PF_2|=17$.故选C.

4. D 【解析】根据分层抽样的方法,高三年级被抽取的人数为$126\times\dfrac{1503}{1002+1002+1503}=54$人.故选D.

5. C 【解析】设圆锥的母线长为l,底面半径为r,由弧长公式得:$2\pi=\dfrac{2\pi}{3}l$,$\therefore l=3$,

又$\because 2\pi r=2\pi$,$\therefore r=1$,$\therefore$圆锥的高$h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{2}$,

$\therefore$该圆锥轴截面的面积$S=\dfrac{1}{2}\times2r\times h=2\sqrt{2}$,故选C.

6. A 【解析】$\because\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$,$\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}+\beta\right)=-\dfrac{12}{13}$,$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$,$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$\therefore-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{4}-\alpha<0$,$\dfrac{5\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{4}+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$,

$\therefore\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\dfrac{4}{5}$,$\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\beta\right)=-\dfrac{5}{13}$,

$\therefore\sin\left[\left(\dfrac{5\pi}{4}+\beta\right)-\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(-\dfrac{12}{13}\right)\times\dfrac{3}{5}-\left(-\dfrac{5}{13}\right)\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{56}{65}=\sin(\pi+\alpha+\beta)=-\sin(\alpha+\beta)$.

$\therefore\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{56}{65}$.故选A.

7. B 【解析】若连中4次,额外加3分,剩余3次不中,满足要求,此时将连中4次看作一个整体,与其他三次不中排序,共有$\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^3=4$种选择,故概率为$4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{32}$,若连中3次,额外加2分,剩余4次,两次投中,两次没投中,且两次投中不连续,故两次不中之间可能为一次中,也可能是三次中,有以下情况:中中中(不中)中(不中)中,中(不中)中中中(不中)中,中(不中)中(不中)中中中,则概率为$\mathrm{C}_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{128}$,若有两次连中两回,中中(不中)中中(不中)中,中(不中)中中(不中)中中,中中(不中)中(不中)中中,满足要求,则概率为$\mathrm{C}_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{128}$,综上,该生在比赛中恰好得7分的概率为$\dfrac{1}{32}+\dfrac{3}{128}+\dfrac{3}{128}=\dfrac{5}{64}$.故选B.

8. C 【解析】记$f(x)=\sin x-x$,$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,则$f'(x)=\cos x-1\leqslant0$,所以$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减,所以$f(x)\leqslant f(0)=0$,所以在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上$\sin x<x$,所以$\sin\dfrac{2}{21}<\dfrac{2}{21}$,即$b<a$;对于$a,c$,由$\dfrac{2\left(\frac{11}{10}-1\right)}{\frac{11}{10}+1}=\dfrac{2}{21}$,$c-a=\ln\dfrac{11}{10}$

$-\dfrac{2\left(\frac{11}{10}-1\right)}{\frac{11}{10}+1}$. 记 $h(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$, $x\geqslant 1$, 则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$, 所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增, 所以 $h\left(\frac{11}{10}\right)>h(1)=0$. 所以 $c-a>0$, 所以 $c>a$. 综上所述: $c>a>b$. 故选 C.

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

题　号	9	10	11	12
答　案	ABC	ACD	ABD	BD

9. ABC 【解析】由 m,n 是两条不重合的直线, α,β 是两个不重合的平面, 知:

在 A 中, 若 $m/\!/\alpha$, $m/\!/\beta$, $n/\!/\alpha$, $n/\!/\beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 A 错误;

在 B 中, 若 $m\perp n$, $m/\!/\alpha$, $n\perp\beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 B 错误;

在 C 中, 若 $m\perp n$, $m\subset\alpha$, $n\subset\beta$, 则 α 与 β 相交或平行, 故 C 错误;

在 D 中, 若 $m/\!/n$, $m\perp\alpha$, $n\perp\beta$, 则由线面垂直, 线线平行的性质可得 $\alpha/\!/\beta$, 故 D 正确. 故选 ABC.

10. ACD 【解析】依题意, 圆 M: $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 的圆心 $M(-1,2)$, 半径 $r=2$, 对于 A, 点 $A(1,2)$ 在圆 M 上, 圆心 M 到直线 $x=1$ 距离为 2, 即过点 $A(1,2)$ 与圆 M 相切的直线方程为 $x=1$, A 正确; 对于 B, 圆 N: $(x+4)^2+(y-6)^2=1$ 的圆心 $N(-4,6)$, 半径 $r'=1$, 则有 $|MN|=\sqrt{[-1-(-4)]^2+(2-6)^2}=5>r+r'$, 即圆 M 与圆 N 外离, B 不正确; 对于 C, 点 $(1,1)$ 在圆 M 外, 则过点 $(1,1)$ 可以作两条直线与圆 M 相切, C 正确; 对于 D, 圆心 $M(-1,2)$ 到直线 $4x-3y+5=0$ 的距离 $d=\dfrac{|4\times(-1)-3\times 2+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=1$, 则圆 M 上的点到直线 $4x-3y+5=0$ 的距离的最大值为 $d+r=3$, D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】对于 A, 因为 $A\left(\frac{a}{16},1\right)$ 在抛物线 C 上, 所以 $\frac{a^2}{16}=1$, 又 $a>0$, 解得 $a=4$, 所以 C: $y^2=4x$. 故 A 正确; 对于 B, 因为 $B(a,b)(b<0)$ 在抛物线 C 上, 所以 $b^2=a^2=16$, 又 $b<0$, 解得 $b=-4$. 故 B 正确; 对于 C, $A\left(\frac{1}{4},1\right)$, $B(4,-4)$, 则以 AB 为直径的圆的圆心为 $\left(\frac{17}{8},-\frac{3}{2}\right)$, 半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(4-\frac{1}{4}\right)^2+(-4-1)^2}=\frac{25}{8}$, 所以以 AB 为直径的圆的方程是 $\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{25}{8}\right)^2$, 即 $\left(x-\frac{17}{8}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{625}{64}$, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $A\left(\frac{1}{4},1\right)$, $B(4,-4)$, $F(1,0)$, 所以 $k_{AF}=\dfrac{1-0}{\frac{1}{4}-1}=-\dfrac{4}{3}$, $k_{BF}=\dfrac{-4-0}{4-1}=-\dfrac{4}{3}$, 所以 $k_{AF}=k_{BF}$, 所以 A,F,B 三点共线, 故 D 正确. 故选 ABD.

12. BD 【解析】由题意可设 $g(x)=x^3f(x)$, 则 $g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^2[3f(x)+xf'(x)]$, 因为 $3f(x)+xf'(x)>0$, 所以 $x^2[3f(x)+xf'(x)]\geqslant 0$, 所以 $g'(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 且 $g'(x)$ 不恒为 0, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 对于 A, 因为 $x_1<x_2$, 所以 $g(x_1)<g(x_2)$, 即 $x_1^3f(x_1)<x_2^3f(x_2)$, 但不能推得 $\dfrac{x_1^3}{x_2^3}<\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}$, 故 A 错误; 对于 B, 由于 $e^{x_1}>0$, 所以 $g(e^{x_1})>g(0)$, 即 $(e^{x_1})^3f(e^{x_1})>0$, 所以 $e^{3x_1}f(e^{x_1})>0$. 故 B 正确; 对于 C, 假设 $x_1^6f(x_1^2)=x_2^6f(x_2^2)$, 则 $g(x_1^2)=g(x_2^2)$, 又 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 所以 $x_1^2=x_2^2$, 因此, 取 $x_1=-1$, $x_2=1$ 能使等式成立, 故存在 x_1,x_2, 使得 $x_1^6f(x_1^2)=x_2^6f(x_2^2)$. 故 C 错误; 对于 D, 存在 x_1,x_2, 使得 $\dfrac{x_1}{x_2}<1$ $\left(\text{如 } x_1=1, x_2=2 \text{ 满足 } x_1<x_2 \text{ 且 } \dfrac{x_1}{x_2}<1\right)$, 则 $g\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)<g(1)$, 即 $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^3f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)<f(1)$, 即 $\dfrac{x_1^3}{x_2^3}f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)<f(1)$. 故 D 正确. 故选 BD.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 4 【解析】因为 $\boldsymbol{b}=(1,2)$, 所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, 因为 $|\boldsymbol{a}|=3$, 所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=3^2-(\sqrt{5})^2=4$.

14. 63 【解析】由 $a_1+a_3+a_7+a_9=28$，可得 $a_1+a_9=a_3+a_7=14$，则 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=63$.

15. 2022 【解析】易知函数 $f(x)=1-\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T=6$，而 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+[1-(-1)]+\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(1-\frac{1}{2}\right)=6$，由周期性知，这样连续六项的和均为 6，而 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)$ 共有 2023 项，是 6 的 337 倍再多 1 项，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=337\times6+f(2023)=2022+0=2022$.

16. $[-6,-2]$ 【解析】不等式 $ax^3-x^2+4x+3\geqslant0$ 变形为 $ax^3\geqslant x^2-4x-3$. 当 $x=0$ 时，$0\geqslant-3$，故实数 a 的取值范围是 $\mathbf{R}$；当 $x\in(0,1]$ 时，$a\geqslant\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，记 $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，$f'(x)=\frac{-x^2+8x+9}{x^4}=\frac{-(x-9)(x+1)}{x^4}>0$，故函数 $f(x)$ 单调递增，则 $f(x)_{\max}=f(1)=-6$，故 $a\geqslant-6$；当 $x\in[-2,0)$ 时，$a\leqslant\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，记 $f(x)=\frac{x^2-4x-3}{x^3}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=9$（舍去），当 $x\in[-2,-1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)_{\min}=f(-1)=-2$，则 $a\leqslant-2$. 综上所述，实数 a 的取值范围是 $[-6,-2]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.【解析】(1) 因为 $c\sin B\sin C=(c\cos B+2b-a)\cos C$，

所以 $(a-2b)\cos C=c(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$，…………（1 分）

所以 $(a-2b)\cos C=c\cos(B+C)$，

所以 $(2b-a)\cos C=c\cos A$，…………（2 分）

所以由正弦定理得 $(2\sin B-\sin A)\cos C=\sin C\cos A$，…………（3 分）

所以 $2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)=\sin B$，…………（4 分）

由于 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，则 $\cos C=\frac{1}{2}$，…………（5 分）

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …………（6 分）

(2) 由 (1) 得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

所以 $ab=4$，…………（7 分）

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=2ab$，…………（8 分）

所以 $(a+b)^2=c^2+3ab=5ab=20$，…………（9 分）

所以 $a+b=2\sqrt{5}$. …………（10 分）

18.【解析】(1) 因为 $S_{n+1}=5S_n+20$，

所以 $S_3=5S_2+20$，$S_2=5S_1+20$，…………（1 分）

代入 $S_3=620$，得 $S_2=120$，$S_1=20$，…………（2 分）

因为 $S_{n+1}=5S_n+20$，

所以 $S_{n+1}+5=5(S_n+5)$，$S_1+5=25$，…………（3 分）

所以数列 $\{S_n+5\}$ 是以 25 为首项，5 为公比的等比数列，…………（4 分）

所以 $S_n+5=5^{n+1}$，$S_n=5^{n+1}-5$①，

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=5^n-5$②，

由①－②得 $a_n=4\times5^n$，…………（6 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=20$ 成立，

所以 $a_n=4\times5^n(n\in\mathbf{N}^*)$. …………（7 分）

(2)由(1)知 $a_n=4\times5^n$，$b_n=\log_5\dfrac{a_n}{4}=n$， …………………………………………………………………………（8 分）

所以 $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

所以$\dfrac{1}{T_n}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$， …………………………………………………………………………（9 分）

所以$\dfrac{1}{T_1}+\dfrac{1}{T_2}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}$

$=2\times\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=2\times\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\dfrac{2n}{n+1}$. ……………………………………………………………………………………………（12 分）

19.【解析】(1)在 Rt$\triangle A_1AD$ 与 Rt$\triangle ACE$ 中，$\dfrac{AA_1}{AD}=\dfrac{AC}{CE}$，

所以 Rt$\triangle A_1AD\backsim$Rt$\triangle ACE$，所以$\angle AA_1D=\angle CAE$， …………………………………………（1 分）

所以$\angle AA_1D+\angle A_1DA=\angle CAE+\angle A_1DA=90^\circ$，

所以 $A_1D\perp AE$. ……………………………………………………………………………………………（2 分）

因为 $AA_1\perp$底面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$，

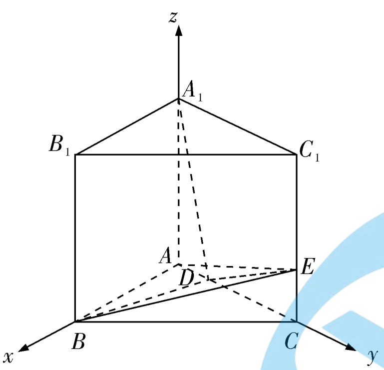
又 $AB\perp AC$，$AA_1\cap AC=A$，所以 $AB\perp$平面 ACC_1A_1， ……………………………………………（3 分）

所以 $AB\perp A_1D$， ……………………………………………………………………………………………（4 分）

又 $AB\cap AE=A$，所以 $A_1D\perp$平面 ABE， ……………………………………………………………（5 分）

所以 $A_1D\perp BE$. ……………………………………………………………………………………………（6 分）

(2)以 AB，AC，AA_1 分别为 x，y，z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系：



则点 $A_1(0,0,3)$，$B(3,0,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,3,1)$， ……………………………………………………（7 分）

则$\overrightarrow{BD}=(-3,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-3,3,1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(0,1,-3)$， ……………………………………（8 分）

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=(x,y,z)\cdot(-3,1,0)=-3x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=(x,y,z)\cdot(-3,3,1)=-3x+3y+z=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}y=3x,\\ z=-6x,\end{cases}$

令 $x=1$，得平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,3,-6)$. ……………………………………………（10 分）

设直线 A_1D 与平面 BDE 所成角的大小为 θ，则

$\sin\theta=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{A_1D}|}\right|=\left|\dfrac{(1,3,-6)\cdot(0,1,-3)}{\sqrt{46}\times\sqrt{10}}\right|=\dfrac{21\sqrt{115}}{230}$.

故直线 A_1D 与平面 BDE 所成角的正弦值为$\dfrac{21\sqrt{115}}{230}$. ……………………………………………（12 分）

20.【解析】(1)补全的 2×2 列联表如下：

性别	观感情况		总计
	一般	激动	
男性	30	90	120
女性	25	55	80
总计	55	145	200

…………(2 分)

零假设为 H_0：性别与对活动的观感程度相互独立.

根据表中数据，计算得到 $\chi^2=\frac{200\,(30\times55-90\times25)^2}{55\times145\times120\times80}=\frac{300}{319}<1<2.706$，…………(4 分)

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此我们可以认为 H_0 成立，即认为对该场活动活动的观感程度与性别无关. …………(5 分)

(2)设一次摸球摸出 2 个红球的事件为 A，摸出 1 个红球的事件为 B，没摸出红球的事件为 C，则 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$，$P(C)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$，…………(8 分)

由题意，X 可取 200，150，100，50，0，

$P(X=200)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$，$P(X=150)=2\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{25}$，

$P(X=100)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{25}$，$P(X=50)=2\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{25}$，

$P(X=0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$，…………(10 分)

所以 X 的分布列为：

X	200	150	100	50	0
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{1}{25}$

所以 $E(X)=200\times\frac{1}{25}+150\times\frac{6}{25}+100\times\frac{11}{25}+50\times\frac{6}{25}+0\times\frac{1}{25}=100$. …………(12 分)

21.【解析】(1)椭圆 C 的半焦距为 c.

因为 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆的面积为 $\frac{\pi}{3}$，

所以 $\triangle BF_1F_2$ 的内切圆的半径为 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，…………(2 分)

因为 $\triangle BF_1F_2$ 是等边三角形，

所以 $\frac{r}{|OF_2|}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{|OF_2|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $|OF_2|=1$，则 $c=1$，…………(4 分)

所以 $|F_1F_2|=2|OF_2|=2$，则 $a=|BF_1|=|F_1F_2|=2$，…………(5 分)

则 $b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………(6 分)

(2) $|OT|=4|OF_1|=4$，则点 $T(-4,0)$，…………(7 分)

由题意知直线 MN 的斜率存在且不为 0.

设直线 MN 的方程为 $x=my-4$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

代入椭圆方程，整理得 $(3m^2+4)y^2-24my+36=0$，…………（8 分）

由 $\Delta=(-24m)^2-4\times36\times(3m^2+4)>0$，可得 $m^2>4$.

由韦达定理，得 $y_1+y_2=\dfrac{24m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$，…………（9 分）

所以$\triangle MNF_1$ 的面积 $S=|S_{\triangle NTF_1}-S_{\triangle MTF_1}|=\dfrac{1}{2}|TF_1|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{24m}{3m^2+4}\right)^2-\frac{144}{3m^2+4}}=18\cdot\frac{\sqrt{m^2-4}}{4+3m^2}$$

$=6\times\dfrac{1}{\dfrac{m^2-4+\frac{16}{3}}{\sqrt{m^2-4}}}=6\times\dfrac{1}{\sqrt{m^2-4}+\dfrac{\frac{16}{3}}{\sqrt{m^2-4}}}\leqslant\dfrac{6}{2\sqrt{\frac{16}{3}}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，…………（11 分）

当且仅当 $\sqrt{m^2-4}=\dfrac{\frac{16}{3}}{\sqrt{m^2-4}}$，即 $m^2=\dfrac{28}{3}$ 时（此时适合 $m^2>4$ 的条件）取得等号.

故$\triangle MNF_1$ 面积的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. …………（12 分）

22.**【解析】**(1)因为 $f'(x)=e^{e^{x-t}-t}e^{x-t}$，…………（1 分）

因为 $f(x)$在$(t,f(t))$处的切线方程平行于直线 $x-y+1=0$，

所以 $f'(t)=e^{e^{t-t}-t}e^{t-t}=1$，即 $e^{1-t}\times1=1$，

解得 $t=1$. …………（2 分）

则 $f(x)=e^{e^{x-1}-1}$，$f(1)=e^{e^{1-1}-1}=1$，…………（3 分）

故 $f(x)$在$(t,f(t))$处的切线方程为 $y-1=x-1$，即 $x-y=0$. …………（4 分）

(2)由 $f(x)=x$，得 $e^{e^{x-t}-t}=x$，

两边同时取对数，得 $\ln e^{e^{x-t}-t}=\ln x$，即 $e^{x-t}-t=\ln x$，得 $e^{x-t}=\ln x+t$，

得$\dfrac{e^x}{e^t}=\ln x+t$，得 $e^x=e^t(\ln x+t)$，

所以关于 x 的方程 $e^x=e^t(\ln x+t)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的实数根. …………（5 分）

因为 $x>0$，所以 $xe^x=e^{t+\ln x}(\ln x+t)$.

令 $g(x)=xe^x(x>0)$，则 $g'(x)=(x+1)e^x>0$，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

要使 $g(x)=g(\ln x+t)$有两个不同的实根，则需 $x=\ln x+t$ 有两个不同的实根. …………（7 分）

令 $h(x)=x-\ln x-t$，则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

当 $x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=1-t$. …………（8 分）

当 $t<1$ 时，$h(x)>0$，$h(x)$没有零点；

当 $t=1$ 时，$h(x)\geqslant0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，$h(x)$只有一个零点；

当 $t>1$ 时，$h(1)=1-t<0$，$h(e^{-t})=e^{-t}>0$，$h(e^t)=e^t-2t$. …………（10 分）

令 $\varphi(t)=e^t-2t(t>1)$，则 $\varphi'(t)=e^t-2>e-2>0$，即 $\varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $\varphi(t)>\varphi(1)=e-2>0$，即 $h(e^t)>0$.

所以 $h(x)$在$(0,1)$上有一个零点，在$(1,+\infty)$上有一个零点，符合条件. …………（11 分）

综上，实数 t 的取值范围是$(1,+\infty)$. …………（12 分）