2022 北京密云高三（上）期末

数　　学

2022．1

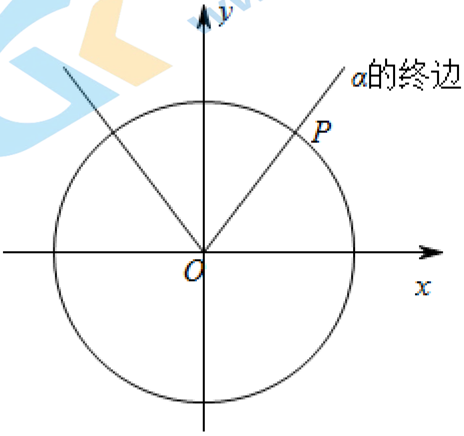
一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $(-\infty,2]$　　D. $(-\infty,2)$

2. 如图所示，角 α 的终边与单位圆在第一象限交于点 P．且点 P 的横坐标为 $\frac{5}{13}$，若角 β 的终边与角 α 的终边关于 y 轴对称，则（　　）



A. $\sin\beta=\frac{5}{13}$　　B. $\sin\beta=-\frac{5}{13}$

C. $\sin\beta=\frac{12}{13}$　　D. $\sin\beta=-\frac{12}{13}$

3. 已知 $a>b$，且 $ab\neq0$，$c\in\mathrm{R}$，则下列不等式中一定成立的是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

C. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$　　D. $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$

4. 下列函数中，既是偶函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A. $y=\cos x$　　B. $y=\frac{1}{x^2+1}$

C. $y=2^x-2^{-x}$　　D. $y=\ln|x|$

5. 若数列$\{a_n\}$满足$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$，$n\in N^*$，且$S_1=2$，则下列说法正确的是（　　）

A. $a_3=4$

B. $a_3=\frac{1}{2}$

C. $S_{10}-S_9=2^{10}$

D. $S_{10}-S_9=\frac{1}{2^8}$

6. 在△ABC中，a，b，c分别是角A，B，C 对边，若$\sqrt{3}a\sin B=b\cos A$，且$b=2\sqrt{3}$，$c=2$，则a的值为（　　）

A. $2\sqrt{7}$

B. 2

C. $2\sqrt{3}-2$

D. 1

7. 如果函数$y=f(x)$在$[a,b]$上的图象是连续不断的一条曲线，那么“$f(a)\cdot f(b)<0$”是“函数$y=f(x)$在(a,b)内有零点”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 已知函数$f(x)=\cos^2x+\sin x$，$x\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，则（　　）

A. 最大值为2，最小值为1

B. 最大值为$\frac{5}{4}$，最小值为1

C. 最大值为$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，最小值为1

D. 最大值为$\frac{5}{4}$，最小值为-1

9. 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为2，过焦点F的直线与抛物线交于A、B两点，且$|AF|=2|FB|$，则点A到y轴的距离为（　　）

A　1

B. 2

C. 3

D. 4

10. 心理学家有时使用函数$L(t)=A(1-e^{-kt})$来测定在时间$t(min)$内能够记忆的量L，其中A表示需要记忆的量，k表示记忆率．假设一个学生有200个单词要记忆，心理学家测定在5min内该学生记忆20个单词．则记忆率k所在区间为（　　）

A. $(0,\frac{1}{20})$

B. $(\frac{1}{20},\frac{1}{15})$

C. $(\frac{1}{15},\frac{1}{10})$

D. $(\frac{1}{10},1)$

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分．

11. 在复平面内，复数$\dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$对应的点为$Z$，则点$Z$的坐标为________.

12. 设$(2x+1)^n$的展开式的二项式系数之和为32，则$n=$________，其展开式的第三项为________.

13. 已知直线$l:y+2=k(x-1)$过定点A，圆$C:x^2+y^2-4x-4y+7=0$，若直线l与圆C相切于点P，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$的值为________；使得直线$l$与圆$C$相交的$k$的取值可以是________（写出一个即可）.

14. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，直线$l:y=2x-10$过双曲线$C$的一个焦点，并且与双曲线$C$的一条渐近线平行，则双曲线$C$的方程为________；若点$M\left(-\sqrt{10},2\sqrt{5}\right)$，则$|MF_1|-|MF_2|$的值为________.

15. 设函数$f(x)$满足条件$\forall x\in \mathrm{R}$，$f(-x)=f(x)$，$f(x+2)=f(x)$，且在区间$[0,1]$上，$f(x)=\begin{cases}x^2, x\in M,\\ x, x\notin M.\end{cases}$其中集合$M=\{x\,|\,x=\dfrac{m}{m+1}, m\in\mathbf{N}\}$．给出下列四个结论：

①$f(\dfrac{5}{4})=\dfrac{9}{16}$；

②函数$f(x)$的值域为$[0,1]$；

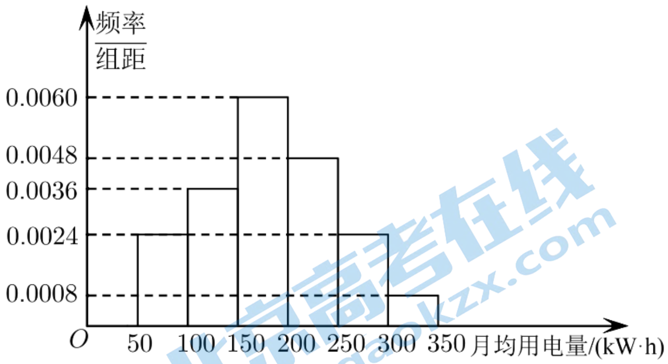
③函数$f(x)$在$(\dfrac{m}{m+1},\dfrac{m+1}{m+2})(m\in\mathbf{N})$上单调递增；

④函数$f(x)$在$[2m-1,2m](m\in\mathbf{N})$上单调递减.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 为了解某地区居民每户月均用电情况，采用随机抽样的方式，从该地区随机调查了100户居民，获得了他们每户月均用电量的数据，发现每户月均用电量都在50～350kW·h之间，进行适当分组后（每组为左闭右开区间），得到如下频率分布直方图：



（1）记频率分布直方图中从左到右的分组依次为第1组、第2组、⋯、第6组，从第5组、第6组中任取2户居民，求他们月均用电量都不低于300kW·h的概率；

（2）根据上述频率分布直方图，估计月均用电量的样本数据的第90百分位数；

（3）该地区为提倡节约用电，拟以每户月均用电量为依据，给该地区月均用电量不少于wkW·h的居民

用户每户发出一份节约用电倡议书，且发放倡议书的数量为该地区居民用户数的2%．请根据此次调查的数据，估计w应定为多少合适？（只需写出结论）．

17. 已知函数$f(x)=2\sin\frac{\omega x}{2}\cos(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{3})+m(\omega>0)$．在下列条件①、条件②、条件③这三个条件中，选择可以确定ω和m值的两个条件作为已知．

（1）求$f(\frac{\pi}{4})$的值；

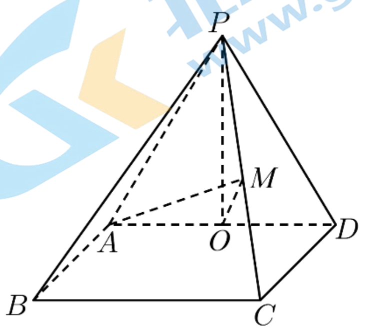
（2）若函数$f(x)$在区间$[0,a]$上是增函数，求实数a的最大值．

条件①：$f(x)$的最小正周期为π；

条件②：$f(x)$的最大值与最小值之和为0；

条件③：$f(0)=2$．

18. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的菱形，$\angle ADC=60^{\circ}$，$\triangle PAD$为正三角形，O为AD的中点，且平面$PAD\perp$平面$ABCD$，M是线段PC上的点．



（1）求证：$OM\perp BC$；

（2）当点M为线段PC　中点时，求点M到平面PAB的距离；

（3）是否存在点M，使得直线AM与平面PAB的夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$．若存在，求出此时$\frac{PM}{PC}$的值；若不存在，请说明理由．

19. 已知函数$f\left(x\right)=x+ke^{x}$，$k\in\mathrm{R}$．

（1）求曲线$y=f\left(x\right)$在点$M\left(2,f\left(2\right)\right)$处的切线方程；

（2）求函数$f\left(x\right)$的单调区间；

（3）若函数$f\left(x\right)=x+ke^{x}$有两个不同的零点，记较大的零点为x_0，证明：当$x_0\in\left(1,2\right)$时，$\left(1+ke^{2}\right)x_0-ke^{2}>0$．

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$过$A(-3,0)$，$B(0,-1)$两点．设$M$为第一象限内一点且在椭圆$C$上，直线$MA$与$y$轴交于点$P$，直线$MB$与$x$轴交于点$Q$．

（1）求椭圆C　方程及离心率；

（2）设椭圆C的右顶点为A'，求证：三角形$A'BQ$的面积等于三角形APQ的面积；

（3）指出三角形MPQ的面积是否存在最大值和最小值，若存在，写出最大值，最小值（只需写出结论）．

21. 在各项均不为零 数列$\{a_n\}$中，选取第k_1项、第k_2项、…、第k_m项，其中$m \geq 3$，$k_1 < k_2 < \cdots < k_m$，若新数列$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_m}$为等比数列，则称新数列为$\{a_n\}$的一个长度为$m$的“等比子列”．已知等差数列$\{a_n\}$，其各项与公差$d$均不为零．

（1）若在数列$\{a_n\}$中，公差$d = 2$，$n \leq 4$，且存在项数为3的“等比子列”，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$a_n = \frac{2}{3}n + \frac{4}{3}$，数列$a_{k_1}, a_{k_2}, \cdots, a_{k_n}$为$\{a_n\}$的一个长度为$n$的“等比子列”，其中$k_1 = 1$，公比为$q$．当$q$最小时，求$k_n$的通项公式；

（3）若公比为q的等比数列$\{b_n\}$，满足$a_1 = b_1$，$a_2 = b_2$，$b_3 = a_i\ (i \geq 3, i \in \mathbf{N}^*)$，证明：数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的“等比子列”．

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 【答案】B

【解析】

【分析】利用交集的运算法则进行运算.

【详解】$A\cap B=\{-1,0,1\}$.

故选：B

2. 【答案】C

【解析】

【分析】根据三角函数的定义得到$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，结合诱导公式求出$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$.

【详解】显然$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{12}{13}$，$\beta$的终边与角$\alpha$的终边关于$y$轴对称，故$\beta=2k\pi+\pi-\alpha$，$k\in Z$，所以$\sin\beta=\sin\left(2k\pi+\pi-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，所以 C 正确

故选：C

3. 【答案】D

【解析】

【分析】ABC 可以通过举出反例，D 选项可以通过不等式的基本性质进行求解.

【详解】当$a=1,b=-2$时，$1>-2$，而$1^2<\left(-2\right)^2=4$，$\dfrac{1}{1}>\dfrac{1}{-2}$，而$\sqrt{ab}$无意义，故 ABC 错误；

因为$c^2+1>0$，所以$\dfrac{a}{c^2+1}>\dfrac{b}{c^2+1}$，D 正确.

故选：D

4. 【答案】D

【解析】

【分析】根据基本初等函数的单调性、奇偶性以及函数奇偶性的定义逐项判断，可得出合适的选项.

【详解】对于 A 选项，函数$y=\cos x$为偶函数，且在$\left(0,+\infty\right)$上不单调；

对于 B 选项，令$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+1}$，该函数的定义域为$\mathrm{R}$，$f\left(-x\right)=\dfrac{1}{\left(-x\right)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f\left(x\right)$，

所以，函数$y=\dfrac{1}{x^2+1}$为偶函数，且该函数在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减；

对于 C 选项，令$g\left(x\right)=2^x-2^{-x}$，该函数的定义域为$\mathrm{R}$，$g\left(-x\right)=2^{-x}-2^x=-g\left(x\right)$，

所以，函数 $y=2^x-2^{-x}$ 为奇函数；

对于 D 选项，令 $h(x)=\ln|x|$，该函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，$h(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=h(x)$，

所以，函数 $y=\ln|x|$ 为偶函数，

当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，故函数 $y=\ln|x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

故选：D.

5. 【答案】C

【解析】

【分析】根据已知条件判断数列的类型为等比数列，根据等比数列通项公式和前 n 项和公式即可求解.

【详解】由 $a_n=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$，$n\in N^*$，且 $S_1=2$ 知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q=2$，首项 $a_1=S_1=2$.

故 $a_3=a_1q^2=2\times 2^2=8$，$S_{10}-S_9=\dfrac{2(1-2^{10})}{1-2}-\dfrac{2(1-2^9)}{1-2}=2^{10}$.

故选：C.

6. 【答案】B

【解析】

【分析】由正弦定理边角关系及已知条件可得 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，再由三角形内角的性质有 $A=\dfrac{\pi}{6}$，进而应用余弦定理求 a 的值.

【详解】由题设，$\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin B\cos A$ 且 $\sin B\neq 0$，可得 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$0<A<\pi$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$，又 $b=2\sqrt{3}$，$c=2$，

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=16-12=4$，即 $a=2$.

故选：B.

7. 【答案】A

【解析】

【分析】由零点存在性定理得出“若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有零点”举反例即可得出正确答案.

【详解】由零点存在性定理可知，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有零点

而若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有零点，则 $f(a)\cdot f(b)<0$ 不一定成立，比如 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-2,2)$ 内有零点，但 $f(-2)\cdot f(2)>0$

所以“$f(a)\cdot f(b)<0$”是“函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有零点”的充分而不必要条件

故选：A

【点睛】本题主要考查了充分不必要条件的判断，属于中档题.

8. 【答案】B

【解析】

【分析】利用 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 化简 $f(x)$ 解析式，根据二次函数的性质即可求 $f(x)$ 最值.

【详解】 $f(x)=\cos^2x+\sin x=1-\sin^2x+\sin x=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，

$x\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 时，$\sin x\in[\frac{1}{2}，1]$，

∴当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 最大值为 $\frac{5}{4}$；当 $\sin x=1$ 时，$f(x)$ 最小值为 1.

故选：B.

9. 【答案】B

【解析】

【分析】可设出直线方程与抛物线方程联立，得出 x_1x_2，再由焦半径公式表示出 $|AF|=2|FB|$，得到 $x_1=2x_2+1$，结合这两个关系式可求解 $x_1=2$

【详解】已知焦点 F 到准线的距离为 2，得 $p=2$，可得 $y^2=4x$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$（x_1、$x_2>0$），AB：$x=my+1$，

与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立可得：$y^2-4my-4=0$

$\Delta=16(m^2+1)>0$，$\therefore y_1y_2=-4$，$\therefore x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$①

又 $|AF|=2|FB|$，$\therefore x_1+1=2(x_2+1)$，$\therefore x_1=2x_2+1$②

根据①②解得 $x_1=2$，

点 A 到 y 轴的距离为 2.

故选：B

10. 【答案】A

【解析】

【分析】先根据题意解方程，解出 $e^{-5k}=\frac{9}{10}$，在和端点值比较大小，由函数单调性和函数连续得到结果.

【详解】将 $A=200,t=5,L=20$ 代入 $L(t)=A\left(1-e^{-kt}\right)$，解得：$e^{-5k}=\frac{9}{10}$，其中 $y=e^{-5x}$ 单调递减，而 $\left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^{-4}=e$，$\left(\frac{9}{10}\right)^{-4}=\frac{10000}{6561}<e$，而 $y=x^{-4}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $e^{-5\times\frac{1}{20}}=e^{-\frac{1}{4}}<\frac{9}{10}$，结合单调性可知 $e^{-\frac{1}{2}}<e^{-\frac{1}{3}}<e^{-\frac{1}{4}}<\frac{9}{10}$，即 $e^{-5\times\frac{1}{10}}<e^{-5\times\frac{1}{15}}<e^{-5\times\frac{1}{20}}<\frac{9}{10}$，而 $e^{-5\times0}=e^0=1>\frac{9}{10}$，其中 $y=e^{-5x}$ 为连续函

数，故记忆率 k 所在区间为 $(0,\dfrac{1}{20})$.

故选：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】(1,1)

【解析】

【分析】根据复数的计算法则化简复数即可得其对应点坐标.

【详解】$\because \dfrac{3+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{5+5\mathrm{i}}{5}=1+\mathrm{i}$，

$\therefore Z(1,1)$.

故答案为：(1,1).

12. 【答案】 ①. 5 ②. $80x^3$

【解析】

【分析】先根据条件求出 n，再结合二项展开式式即可求解.

【详解】因为 $(2x+1)^n$ 展开式的二项式系数之和为 32，

所以 $2^n=32$，即 $n=5$；

其展开式的第三项为 $C_5^2(2x)^3\cdot 1^2=80x^3$.

故答案为：5，$80x^3$.

13. 【答案】 ①. 16 ②. 4（答案不唯一）

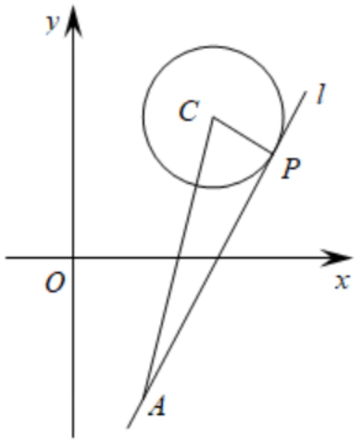
【解析】

【分析】利用数量积的定义及圆的性质可得 $\overline{AC}\cdot\overline{AP}=|\overline{AC}|\cdot|\overline{AP}|\cos\angle PAC=|\overline{AP}|^2$，然后利用切线长公式即得.

【详解】由直线 $l:y+2=k(x-1)$，可知定点 $A(1,-2)$，

圆 $C:x^2+y^2-4x-4y+7=0$，得 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$，圆心 $C(2,2)$，半径为 1，

$\therefore |AC|^2=(1-2)^2+(-2-2)^2=17$，又直线 l 与圆 C 相切于点 P，



则 $AP \perp CP, |AP|^2 = |AC|^2 - |CP|^2 = 17 - 1 = 16$，

$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AP}| \cos \angle PAC = |\overrightarrow{AP}|^2 = 16$，

当 $C(2,2)$ 在直线 l 上时，直线 l 与圆 C 相交，此时 $2+2=k(2-1)$，即 $k=4$，

故答案为：16；4（答案不唯一）．

14. 【答案】 ①. $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$ ②. $-2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】求出 c 的值，根据已知条件得出关于 a、b 的方程组，解出这两个量的值，可得出双曲线 C 的方程；判断出点 M 在双曲线 C 的左支上，利用双曲线的定义可求得 $|MF_1|-|MF_2|$ 的值.

【详解】在直线 l 的方程中，令 $y=0$ 可得 $x=5$，则 $c=5$，

由于直线 $l: y=2x-10$ 与双曲线 C 的一条渐近线平行，则 $\begin{cases} \dfrac{b}{a}=2 \\ c=\sqrt{a^2+b^2}=5 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\sqrt{5} \\ b=2\sqrt{5} \end{cases}$，

因此，双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$；

因为 $\dfrac{(-\sqrt{10})^2}{5}-\dfrac{(2\sqrt{5})^2}{20}=1$，所以，点 M 在双曲线 C 的左支上，故 $|MF_1|-|MF_2|=-2a=-2\sqrt{5}$.

故答案为：$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=1$；$-2\sqrt{5}$.

15. 【答案】 �1�3 ##�3�1

【解析】

【分析】根据题意和周期函数的定义求出 $f(\dfrac{5}{4})$ 即可判断①；

举例说明即可判断②；

求出函数 $f(x)$ 在 $(\frac{m}{m+1},\frac{m+1}{m+2})$ 上的解析式即可判断③;

作出函数的大致图象，利用数形结合的思想即可判断④.

【详解】由题意知，函数 $f(x)$ 是定义域为 R 上的偶函数，且周期为 2，

①: $f(\frac{5}{4})=f(-\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4})$，又 $\frac{3}{4}\in M$，所以 $f(\frac{3}{4})=(\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}$，故①正确;

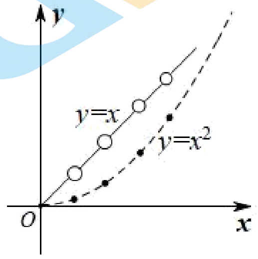
②: 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$，又函数 $f(x)=x$ 的定义域不含 $\frac{1}{2}$，

所以原分段函数 $f(x)$ 的值域不含 $\frac{1}{2}$，故②错误;

③: 由 $m\in N$，得 $0\le\frac{m}{m+1}<\frac{m+1}{m+2}<1$，且 $\frac{m}{m+1}$、$\frac{m+1}{m+2}\in M$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{m}{m+1},\frac{m+1}{m+2})$ 上的解析式为 $f(x)=x$，单调递增，故③正确;

④: 因为函数 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[2m-1,2m]$ 上的图象与在 $[0,1]$ 上的图象关于 y 轴对称，而集合 M 为断续的数集，则在 $[0,1]$ 上的图象大致如图，



由图可知 $f(x)$ 在 $[2m-1,2m]$ 上不单调，故④错误.

故答案为：①③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $\frac{1}{20}$;

(2) $275\text{kW}\cdot\text{h}$;

(3) 325.

【解析】

【分析】(1) 分析可知 100 户居民中，第 5 组的居民数为 12，第 6 组的居民数为 4，利用组合计数原理结合古典概型的概率公式可求得所求事件的概率;

(2) 设月均用电量的样本数据的第 90 百分位数为 a，分析可得 $a\in(250,300)$，根据已知条件可得出关于 a 的等式，即可解得 a 的值;

(3) 计算出月均用电量的样本数据的第 98 百分位数，即可得解.

【小问 1 详解】

解：由频率分布直方图可知，100户居民中，第5组的居民户数为$100\times50\times0.0024=12$，

第6组的居民户数为$100\times50\times0.0008=4$，

从第5组、第6组中任取2户居民，他们月均用电量都不低于$300\text{kW}\cdot\text{h}$的概率为$P=\dfrac{C_4^2}{C_{16}^2}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$.

【小问2详解】

解：前4个矩形的面积之和为$\left(0.0024+0.0036+0.006+0.0048\right)\times50=0.84<0.9$，

前5个矩形的面积之和为$0.84+0.0024\times50=0.96>0.9$，

设月均用电量的样本数据的第90百分位数为a，则$a\in\left(250,300\right)$，

则$0.84+\left(a-250\right)\times0.0024=0.9$，解得$a=275$，

因此，估计月均用电量的样本数据的第90百分位数为$275\text{kW}\cdot\text{h}$.

【小问3详解】

解：前5个矩形的面积之和为$0.96<0.98$，

设月均用电量的样本数据的第98百分位数为b，则$b\in\left(300,350\right)$，

则$0.96+\left(b-300\right)\times0.0008=0.98$，解得$b=325$，

故w应定为325较为合适.

17. 【答案】（1）见解析　　（2）$\dfrac{5\pi}{12}$

【解析】

【分析】（1）先对函数化简得$f(x)=\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m$，若选择①和②，则$\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，$1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=0$，求出$\omega,m$的值，从而可得$f(x)$的解析式，从而可求出$f(\dfrac{\pi}{4})$，若选择①和③，则$\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi, f(0)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，求出$\omega,m$的值，从而可得$f(x)$的解析式，从而可求出$f(\dfrac{\pi}{4})$，

若选择②和③时，m不存在，

（2）由（1）得到的解析式，求出函数的增区间，再根据题意可求出a的最大值

【小问1详解】

$$f(x)=2\sin\frac{\omega x}{2}\cos(\frac{\omega x}{2}-\frac{\pi}{3})+m(\omega>0)$$

$$=2\sin\frac{\omega\pi}{2}\left(\cos\frac{\omega\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\omega\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)+m$$

$$=2\sin\frac{\omega\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\omega\pi}{2}\right)+m$$

$=\sin\frac{\omega\pi}{2}\cos\frac{\omega\pi}{2}+\sqrt{3}\sin^2\frac{\omega\pi}{2}+m$

$=\frac{1}{2}\sin\omega x+\sqrt{3}\cdot\frac{1-\cos\omega x}{2}+m$

$=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m$

（1）若选择①和②，则

$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=0$，

解得 $\omega=2,m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

若选择①和③，则

$\frac{2\pi}{\omega}=\pi, f(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，

解得 $\omega=2,m=2$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$，

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$，

若选择②和③，则

$1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=0$，且 $f(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，这样的 m 不存在，

【小问 2 详解】

由（1）可知，若选择①和②，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得

$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$，

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，

所以实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$，

若选择①和③，则 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$，

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得

$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$，

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上是增函数，

所以实数 a 最大值为 $\frac{5\pi}{12}$，

18. 【答案】（1）证明见解析；

（2）$\frac{\sqrt{15}}{5}$；

（3）存在，且 $\frac{PM}{PC}=\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】（1）连接 OC、AC，证明出 $AD\perp$ 平面 POC，利用线面垂直的性质可得出 $AD\perp PC$，再结合 $AD//BC$ 可证得结论成立；

（2）推导出 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，然后以点 O 为坐标原点，OC、OD、OP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量法可求得点 M 到平面 PAB 的距离；

（3）设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，利用空间向量法可得出关于 λ 的方程，结合 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 可求得 λ 的值，即可得出结论.

【小问 1 详解】

证明：连接 OC、AC，

因 四边形 $ABCD$ 为菱形，则 $AD=CD$，因为 $\angle ADC=60^{\circ}$，则 $\triangle ACD$ 为等边三角形，

因为 O 为 AD 的中点，故 $OC\perp AD$，

因为 $\triangle PAD$ 为等边三角形，O 为 AD 的中点，则 $PO\perp AD$，

$\because PO\cap OC=O$，$\therefore AD\perp$ 平面 POC，$\because PC\subset$ 平面 POC，则 $AD\perp PC$，

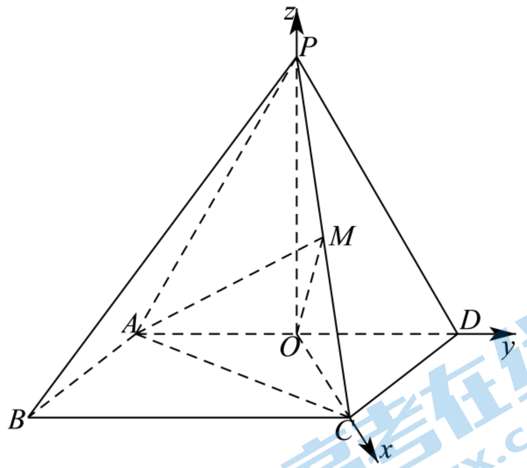
$\because BC//AD$，故 $BC\perp PC$.

【小问 2 详解】

解：因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\perp AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $OC\perp AD$，以点 O 为坐标原点，OC、OD、OP 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,-1,0)$、$B\left(\sqrt{3},-2,0\right)$、$C\left(\sqrt{3},0,0\right)$、$D(0,1,0)$、$P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$、$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)$，

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x-y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取 $x=1$，可得 $\vec{m}=\left(1,\sqrt{3},-1\right)$，

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以点 M 到平面 PAB 的距离为 $d=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{m}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【小问 3 详解】

解：设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=\lambda\left(\sqrt{3},0,-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda\right)$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PM}=\left(0,1,\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda\right)=\left(\sqrt{3}\lambda,1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$，

由题意 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\vec{m}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}=\frac{\left|2\sqrt{3}\lambda\right|}{\sqrt{6\lambda^2-6\lambda+4}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

整理可得 $9\lambda^2+3\lambda-2=0$，因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，

因此，存在点 M，使得直线 AM 与平面 PAB 的夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，此时 $\frac{PM}{PC}=\frac{1}{3}$.

19. 【答案】（1）$y=\left(1+ke^2\right)x-ke^2$；

（2）答案见解析；　（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）求出 $f(2)$、$f'(2)$，利用导数的几何意义可求得所求切线的方程；

（2）求得 $f'(x)=1+ke^{x}$，分 $k\ge 0$、$k<0$ 两种情况讨论，分析导数 符号变化，由此可得出函数 $f(x)$ 的增区间和减区间；

（3）分析可得 $k=-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}$，将所证不等式等价变形为 $e^{x_0-2}>x_0-1$ 对任意的 $x_0\in(1,2)$ 恒成立，构造函数 $g(x)=e^{x-2}-x+1$，利用导数分析函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上的单调性，可得出 $g(x)>0$，即可证得结论成立.

【小问 1 详解】

解：因为 $f(x)=x+ke^{x}$，则 $f'(x)=1+ke^{x}$，所以，$f(2)=2+ke^{2}$，$f'(2)=1+ke^{2}$，

因此，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(2,f(2))$ 处的切线方程 $y-(2+ke^{2})=(1+ke^{2})(x-2)$，

即 $y=(1+ke^{2})x-ke^{2}$.

【小问 2 详解】

解：函数 $f(x)=x+ke^{x}$ 的定义域为 R，且 $f'(x)=1+ke^{x}$.

当 $k\ge 0$ 时，对任意的 $x\in\mathrm{R}$，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无递减区间；

当 $k<0$ 时，由 $f'(x)=0$，可得 $x=-\ln(-k)$.

当 $x<-\ln(-k)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>-\ln(-k)$ 时，$f'(x)<0$.

此时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln(-k))$，单调递减区间为 $(-\ln(-k),+\infty)$.

综上所述，当 $k\ge 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,+\infty)$，无递减区间；

当 $k<0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\ln(-k))$，单调递减区间为 $(-\ln(-k),+\infty)$.

【小问 3 详解】

证明：由 $f(x)=x+ke^{x}=0$ 可得 $k=-\dfrac{x}{e^{x}}$，

因为函数 $f(x)=x+ke^{x}$ 有两个不同的零点，且较大的零点为 x_0，则 $k=-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}$，

要证 $(1+ke^{2})x_0-ke^{2}=x_0+ke^{2}(x_0-1)=x_0-\dfrac{x_0(x_0-1)}{e^{x_0-2}}>0$ 对任意的 $x_0\in(1,2)$ 恒成立，

即证 $e^{x_0-2}>x_0-1$ 对任意的 $x_0\in(1,2)$ 恒成立，

构造函数 $g(x)=e^{x-2}-x+1$，其中 $x\in(1,2)$，则 $g'(x)=e^{x-2}-1<0$，

所以，函数 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，所以，$g(x)>g(2)=0$，

因为 $x_0\in(1,2)$，则 $g(x_0)>g(2)=0$，即 $e^{x_0-2}>x_0-1$，故原不等式得证.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式问题，方法如下：

（1）直接构造函数法：证明不等式 $f(x)>g(x)$（或 $f(x)<g(x)$）转化为证明 $f(x)-g(x)>0$（或 $f(x)-g(x)<0$），进而构造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.

20. 【答案】（1）$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，$e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

（2）证明见解析；　　（3）存在最大值，且最大值为 $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$.

【解析】

【分析】(1)根据椭圆过的点的坐标可得 $a=3$，$b=1$，进而求出 c，即可得出结果；

(2)设点 $M(x_0,y_0)(0<x_0<3,0<y_0<1)$，利用两点坐标求出直线 MA、MB 的方程，求出点 P、Q 的坐标，进而表示出 $S_{\triangle APQ}$、$S_{\triangle A'BQ}$，利用分析法证明 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle A'BQ}$ 即可；

(3)由(2)可得 $S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle MAA'}-(S_{\triangle BA'Q}+S_{\triangle MQA'})$，进而可得 $S_{\triangle MPQ}=\frac{1}{2}(\sqrt{9-x_0^{\ 2}}+x_0)-\frac{3}{2}$，

令 $g(x)=\sqrt{9-x^2}+x(0<x<3)$，利用导数求出 $g(x)_{\max}$ 即可得出结果.

【小问 1 详解】

由题意知，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-3,0)$，$B(0,-1)$，

所以 $a=3$，$b=1$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{2}$，

所以椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，离心率为 $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$；

【小问 2 详解】

由题意知，$A'(3,0)$，设点 $M(x_0,y_0)(0<x_0<3,0<y_0<1)$，得 $k_{MA}=\frac{y_0}{x_0+3}$，$k_{MB}=\frac{y_0+1}{x_0}$，

所以直线 MA 的方程为：$y=\frac{y_0}{x_0+3}(x+3)$，直线 MB 的方程为：$y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，

所以 $P(0,\frac{3y_0}{x_0+3})$，$Q(\frac{x_0}{y_0+1},0)$，所以 $|OP|=\frac{3y_0}{x_0+3}$，$|AQ|=3+\frac{x_0}{y_0+1}$，$|A'Q|=3-\frac{x_0}{y_0+1}$，

故 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|AQ|y_P=\frac{1}{2}\times(3+\frac{x_0}{y_0+1})\times\frac{3y_0}{x_0+3}$，$S_{\triangle A'BQ}=\frac{1}{2}|A'Q||OB|=\frac{1}{2}\times(3-\frac{x_0}{y_0+1})$，

要证 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle A'BQ}$，只需证 $(3+\frac{x_0}{y_0+1})\times\frac{3y_0}{x_0+3}=3-\frac{x_0}{y_0+1}$，

只需证 $3y_0(3y_0+x_0+3)=(3y_0-x_0+3)(x_0+3)$，

只需证 $9y_0^2=9-x_0^2$，

又点 $M(x_0,y_0)$ 在椭圆上，所以 $\frac{x_0^2}{9}+y_0^2=1$，即 $9y_0^2=9-x_0^2$，

所以 $S_{\triangle APQ}=S_{\triangle A'BQ}$；

【小问 3 详解】

三角形 MPQ 的面积存在最大值.

由(2)知，$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle A'BQ}$，$9y_0^2=9-x_0^2$，得 $3y_0=\sqrt{9-x_0^2}$，

$$S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle MAA'}-(S_{\triangle PAQ}+S_{\triangle MQA'})=S_{\triangle MAA'}-(S_{\triangle BA'Q}+S_{\triangle MQA'})$$

$$=\frac{1}{2}|AA'|y_0-(\frac{1}{2}|A'Q||OB|+\frac{1}{2}|A'Q|y_0)=3y_0-\frac{1}{2}(3-\frac{x_0}{y_0+1})(y_0+1)$$

$$=\frac{1}{2}(3y_0+x_0)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{9-x_0^2}+x_0)-\frac{3}{2},$$

令 $g(x)=\sqrt{9-x^2}+x(0<x<3)$，则 $g'(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}-x}{\sqrt{9-x^2}}$，

令 $g'(x)>0\Rightarrow 0<x<\frac{3\sqrt{2}}{2}$，函数 $g(x)$ 单调递增，

令 $g'(x)<0\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}<x<3$，函数 $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(\frac{3\sqrt{2}}{2})=\sqrt{9-\frac{9}{2}}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$，

即当 $x_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时，$S_{\triangle MPQ}$ 有最大值，且最大值为 $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$，无最小值.

所以三角形 MPQ 的面积存在最大值，无最小值，且最大值为 $\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}$.

21. 【答案】（1）$a_n=2n$ 或 $a_n=2n-10$；

（2）$k_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-2$；

（3）证明见解析.

【解析】

【分析】(1)“等比子列”可能为：a_1,a_2,a_3；a_1,a_2,a_4；a_1,a_3,a_4；a_2,a_3,a_4，根据等比数列和等差数列的性质，可求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)要使 $\{a_{k_n}\}$ 公比 q 最小，则 $k_2=2$，结合 $k_1=1$、等比等差数列通项公式即可求 k_n 的通项公式；

(3)要证数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的“等比子列”，即要证数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项，可用数学归纳法证明.

【小问 1 详解】

由题可设$a_1=x-3,a_2=x-1,a_3=x+1,a_4=x+3$，

①n=3 时，“等比子列”仅可能为：a_1,a_2,a_3,则$a_2^2=a_1a_3$，无解；

②n=4 时，“等比子列”可能为：a_1,a_2,a_4；a_1,a_3,a_4；a_2,a_3,a_4，

经验证：“等比子列”为a_2,a_3,a_4时无解；

“等比子列” a_1,a_2,a_4时，$\{a_n\}$前 4 项为：2，4，6，8，通项为$a_n=2n$；

“等比子列”为a_1,a_3,a_4时，$\{a_n\}$前 4 项为：−8，−6，−4，−2，通项为$a_n=2n-10$；

【小问 2 详解】

由题可知$a_{k_1}=a_1=2$，

$\because a_n=\frac{2}{3}n+\frac{4}{3}$，$\therefore\{a_n\}$为递增的等差数列，要使$\{a_{k_n}\}$公比$q$最小，则$k_2=2$，

即$a_{k_2}=a_2=\frac{8}{3}$，$\therefore q=\frac{a_{k_2}}{a_{k_1}}=\frac{4}{3}$，$\therefore a_{k_n}=a_{k_1}\cdot q^{n-1}=2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$，

又$a_{k_n}=\frac{2}{3}k_n+\frac{4}{3}$，$\therefore\frac{2}{3}k_n+\frac{4}{3}=2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$，解得$k_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}-2$；

【小问 3 详解】

由$a_1=b_1,a_2=b_2$有$a_1+d=a_1q$，即$d=a_1(q-1)$.

$\because b_3=a_1q^2,a_i=a_1+(i-1)a_1(q-1)$，$b_3=a_i$，

$\therefore q^2=1+(i-1)(q-1)$，

即$q^2-(i-1)q+(i-2)=0$，解得$q=1$或$q=i-2$.

$\because q\neq 1$， $\therefore q=i-2$.

要证数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的“等比子列”，即要证数列$\{b_n\}$中每一项都是数列$\{a_n\}$中的项，

用数学归纳法证明：

①由以上推理及题设知$\{b_n\}$的前三项满足，即$n=1,2,3$时结论成立.

②假设当$n=k$时，结论成立，即存在$p\in\mathbf{N}_+$使$b_k=a_p$.

当$n=k+1$时，

$b_{k+1}=b_k\cdot q=a_p\cdot q=\left[a_1+(p-1)d\right]\cdot q$

$=a_1q+(p-1)\cdot(i-2)d$

$=a_1+d\left[(p-1)(i-2)+1\right]$

$=a_{(p-1)(i-2)+2}$.

即b_{k+1}是$\{a_n\}$的第$(p-1)(i-2)+2$项.

故$n=k+1$时，结论成立.

由①②可知$n\in\mathbf{N}_+$， 总有$\{b_n\}$是$\{a_n\}$中的某一项.

综上所述，数列$\{b_n\}$为数列$\{a_n\}$的“等比子列”.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。