2022 北京朝阳高二（下）期末

数　　学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．已知集合 $A=\{-1，0，1\}$，$B=\{x\,|\,x(x-1)\leqslant 0\}$，则 $A\bigcap B=($　　$)$

A．$\varnothing$　　B．$\{0\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{0，1\}$

2．已知 $a<b<0$，则下列不等式中成立的是$($　　$)$

A．$2^a<2^b$　　B．$ab<b^2$　　C．$a^2<b^2$　　D．$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

3．下列函数中既是奇函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是$($　　$)$

A．$y=2^x$　　B．$y=x+\dfrac{1}{x}$　　C．$y=x\,|\,x\,|$　　D．$y=ln\,|\,x\,|$

4．已知一组样本数据 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$\cdots$，$(x_n，y_n)$，根据这组数据的散点图分析 x 与 y 之间的线性相关关系，若求得其线性回归方程为 $\hat{y}=0.85x-85.7$，则在样本点 $(165,57)$ 处的残差为$($　　$)$

A．-2.45　　B．2.45　　C．3.45　　D．54.55

5．在抗击新冠疫情期间，有 6 名男生和 5 名女生共 11 名大学生报名参加某社区疫情防控志愿服务，现从 6 名男生中选出 2 名组成一个小组，从 5 名女生中选出 2 名组成一个小组，在周日的上午和下午各安排一个小组值班，则不同的排班种数为$($　　$)$

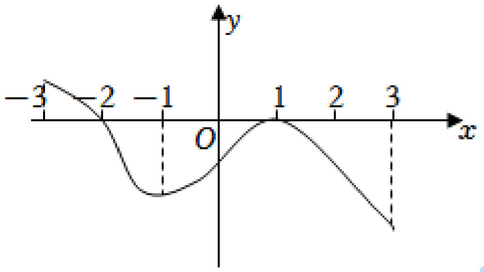
A．75　　B．150　　C．300　　D．600

6．“$-2<m<2$”是“$x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立”的$($　　$)$

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中正确的是$($　　$)$



A．曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-2，f(-2))$ 处的切线斜率小于零

B．函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增

C．函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

D．函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 内至多有两个零点

8．为了了解居家学习期间性别因素是否对学生体育锻炼的经常性有影响，某校随机抽取了 40 名学生进行调查，按照性别和体育锻炼情况整理出如下的 2×2 列联表：

性别	锻炼情况	合计

	不经常	经常	
女生 / 人	14	7	21
男生 / 人	8	11	19
合计 / 人	22	18	40

注：χ^2 独立性检验中，$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．常用的小概率值和相应的临界值如表：

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

根据这些数据，给出下列四个结论：

①依据频率稳定于概率的原理，可以认为性别对体育锻炼的经常性有影响；

②依据频率稳定于概率的原理，可以认为性别对体育锻炼的经常性没有影响；

③根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，可以认为性别对体育锻炼的经常性有影响，这个推断犯错误的概率不超过 0.05；

④根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，没有充分证据推断性别对体育锻炼的经常性有影响，因此可以认为性别对体育锻炼的经常性没有影响．

其中，正确结论的序号是(　　)

A．①③　　　B．①④　　　C．②③　　　D．②④

9．若对任意 $x\in[0，\pi]$ 都有 $m\leqslant\sin 2x-x\leqslant M$ 成立，其中 m，M 为实数，则 $M-m$ 的最小值为(　　)

A．π　　　B．$1+\dfrac{2\pi}{3}$　　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5\pi}{6}$　　　D．$\sqrt{3}+\dfrac{2\pi}{3}$

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, x\geqslant 0,\\ -2|x+1|+2, x<0,\end{cases}$ 若存在唯一的整数 x，使得 $\dfrac{x-a}{3f(x)-2}<0$ 成立，则所有满足条件的整数 a 的取值集合为(　　)

A．$\{-2，-1，0，1，2\}$　　　B．$\{-2，-1，0，1\}$ C．$\{-1，0，1，2\}$　　　D．$\{-1，0，1\}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11．计算：$2\log_9 3+\log_3 15-\log_3 5=$____．

12．在 $(x^2+\dfrac{1}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为____；各项系数之和为____．（用数字作答）

13．在一组数据 0，3，5，7，10 中加入一个整数 a 得到一组新数据，这组新数据与原数据相比平均数不增大且方差减小，则 a 的一个取值为____．

14．已知某地只有 A，B 两个品牌的计算机在进行降价促销活动，售后保修期为 1 年，它们在市场的占有率之比为 $3:2$．根据以往数据统计，这两个品牌的计算机在使用一年内，A 品牌有 5% 需要维修，B 品牌有 6% 需要维修．若某人从该地随机购买了一台降价促销的计算机，则它在一年内不需要维修的概率为____．

15．设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(1+x)=f(3-x)$，$f(4+x)+f(4-x)=0$，当 $x\in(0，2]$时，$f(x)=x^2-2x$．则 f（3）$=$____；当 $x\in(5,7)$ 时，$f(x)$ 的取值范围为____．

16．激活函数是神经网络模型的重要组成部分，是一种添加到人工神经网络中的函数．tanh 函数是常用的激活函数

之一，其解析式为 $f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}-1$．关于 tanh 函数的以下结论：

① tanh 函数是增函数；

② tanh 函数是奇函数；

③对于任意实数 a，函数 $y=|f(x)|-ax-1$ 至少有一个零点；

④曲线 $y=f(x)$ 不存在与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 垂直的切线．

其中所有正确结论的序号是 ____．

三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

17．（13 分）某数学教师组织学生进行线上说题交流活动，规定从 8 道备选题中随机抽取题目作答．假设在 8 道备选题中，学生甲能答对每道题的概率都是 $\frac{2}{3}$，且每道题答对与否互不影响，学生乙、丙都只能答对其中的 6 道题．

（I）若甲、乙两人分别从 8 道备选题中随机抽取 1 道作答，求至少有 1 人能答对的概率；

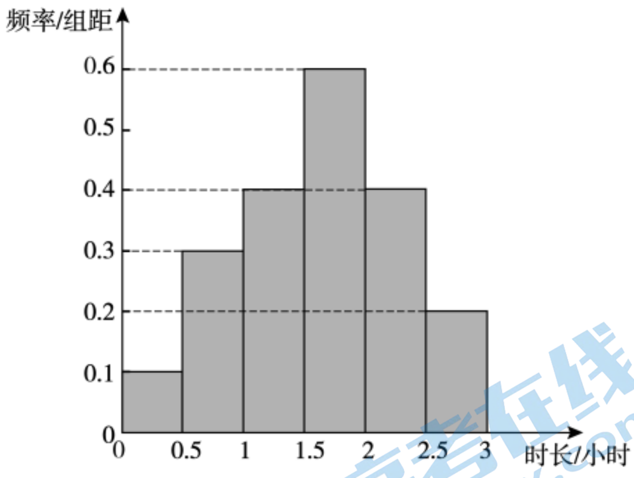
（II）若学生丙从 8 道备选题中随机抽取 2 道作答，以 X 表示其中丙能答对的题数，求 X 的分布列及数学期望 $E(X)$．

18．（13 分）已知函数 $f(x)=2ln(1-x)-\frac{1}{x}$．

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1，\ f(-1))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间．

19．（15 分）第 24 届冬季奥林匹克运动会于 2022 年 2 月 20 日在北京圆满闭幕，这是一次创造诸多“第一”的盛会．某学校为了了解学生收看北京冬奥会的情况，随机调查了 100 名学生，获得他们日均收看北京冬奥会的时长数据，将数据分成 6 组：$[0，\ 0.5]$，$(0.5，\ 1]$，$(1，\ 1.5]$，$(1.5，\ 2]$，$(2，\ 2.5]$，$(2.5，\ 3]$，并整理得到如下频率分布直方图：



假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替．

（I）试估计该校学生日均收看北京冬奥会的时长的平均值；

（II）以频率估计概率，从全校学生中随机抽取 3 人，以 X 表示其中日均收看北京冬奥会的时长在 $(1.5，\ 2.5]$ 的学生人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III）经过一步调查发现，这 100 名学生收看北京冬奥会的方式有：①收看新闻或收看比赛集锦，②收看比赛转播或到现场观看．他们通过这两种方式收看的日均时长与其日均收看北京冬奥会的时长的比值如表：

日均收看北京冬奥会的时长 / 小时	通过方式①收看	通过方式②收看
[0， 0.5]	1	0
(0.5， 1.5]	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
(1.5， 3]	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

日均收看北京冬奥会的时长在[0， 0.5]， (0.5， 1.5]， (1.5， 3] 的学生通过方式①收看的平均时长分别记为 μ_1， μ_2， μ_3，写出 μ_1， μ_2， μ_3 的大小关系.（结论不要求证明）

20.（15 分）已知函数 $f(x)=xe^x-ax(a\in R)$.

（I）若 $y=f(x)$ 在 R 上是增函数，求实数 a 的取值范围；

（II）当 $a=1$ 时，判断 0 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由；

（III）若存在三个实数 $x_1<x_2<x_3$，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，求实数 a 的取值范围.

21. （14 分）已知集合 $M=\{\frac{1}{k}|1\leqslant k\leqslant 100$，且 $k\in N^*\}$，$A=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$，其中 $n\in N^*$，且 $n\geq 2$．若 $A\subseteq M$，且对集合 A 中的任意两个元素 a_i，a_j，$i\neq j$，都有 $|a_i-a_j|\geqslant\frac{1}{30}$，则称集合 A 具有性质 P.

（I）判断集合$\{\frac{1}{3}，\frac{1}{4}，\frac{1}{5}，\frac{1}{6}，\frac{1}{7}\}$是否具有性质 P；并另外写出一个具有性质 P 且含 5 个元素的集合 A；

（II）若集合 $A=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$具有性质 P.

（i）求证：（a_i-a_j）的最大值不小于$\frac{n-1}{30}$；

（ii）求 n 的最大值.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1.【分析】先求出集合 B，再结合交集的定义，即可求解．

【解答】解：$A=\{-1，0，1\}$，$B=\{x\mid x(x-1)\leqslant 0\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，

则 $A\bigcap B=\{0，1\}$．

故选：D．

【点评】本题主要考查交集的定义，属于基础题．

2.【分析】利用不等式性质以及函数单调性，即可求解．

【解答】解：对于 A，$y=2^x$ 在 R 上单调递增，所以 $2^a<2^b$，故 A 正确．

对于 B，$a<b$ 两边同乘一个负数 b，故 $ab>b^2$，故 B 错误．

对于 C，$\because a<b<0$，$\therefore |a|>|b|$，所以 $a^2>b^2$，故 C 错误．

对于 D，$\because a<b<0$，$\therefore \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，故 D 错误．

故选：A．

【点评】本题主要考查不等式性质以及函数单调性，属于基础题．

3.【分析】由常见函数的奇偶性与单调性逐项判断即可．

【解答】解：对于 A，$y=2^x$ 为非奇非偶函数，不符合题意；

对于 B，$y=x+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数，但在 $(0,1)$ 上为减函数，不符合题意；

对于 C，$y=x|x|=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0\\ -x^2, x<0\end{cases}$，为奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，符合题意；

对于 D，$y=ln|x|$ 为偶函数，不符合题意．

故选：C．

【点评】本题主要考查函数奇偶性与单调性的判断，熟练掌握常见函数的性质是解题的关键，属于基础题．

4.【分析】在已知线性回归方程中，取 $x=165$ 求得预测值，减去实际值即可得到残差．

【解答】解：把 $x=165$ 代入 $\hat{y}=0.85x-85.7$，得 $\hat{y}=0.85\times 165-85.7=54.55$，

则在样本点 $(165,57)$ 处的残差为 $54.55-57=-2.45$．

故选：A．

【点评】本题考查线性回归方程的应用，考查残差的求法，是基础题．

5.【分析】根据题意，先计算从 6 名男生中选出 2 名组成一个小组，从 5 名女生中选出 2 名组成一个小组的种数，再将其分配到上午和下午，相乘即可．

【解答】解：先分组，共有 $C_6^2C_5^2$ 种分组方法，

再分配到上午和下午，共 A_2^2 有种分配方法，

故共有 $C_6^2C_5^2A_2^2=300$ 种，

故选：C．

【点评】本题考查排列、组合及简单计数问题，属于基础题．

6．【分析】根据已知条件，结合分离变量法，先求出 m 的取值范围，再结合充分条件、必要条件的定义，即可求解．

【解答】解：$\because x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore m<x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$x+\dfrac{1}{x}>2$，即 $m\leqslant2$，

$\therefore$ “$-2<m<2$”是“$x^2-mx+1>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立”的充分不必要条件．

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件、必要条件的定义，以及分离变量法，属于基础题．

7．【分析】由题意利用导数与原函数之间的关系结合图像考查题中的说法是否正确即可．

【解答】解：逐一考查所给的说法：

A．曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-2$，$f(-2))$ 处的切线斜率等于零，选项 A 错误；

B．函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递减，选项 B 错误；

C．函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 左右两侧都单调递减，函数在此处不取得极大值，选项 C 错误；

D．函数 $f(x)$ 在区间 $(-3,3)$ 先单调递增，再单调递减，故在区间内内至多有两个零点，选项 D 正确．

故选：D．

【点评】本题主要考查导函数与原函数之间的关系，利用导数图像确定原函数性质的方法等知识，属于基础题．

8．【分析】分别求出男生和女生经常锻炼的频率即可依据频率稳定于概率的原理判断，求出卡方值，和 3.841 比较即可根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验判断．

【解答】解：由表可知，女生有 21 人，其中经常锻炼的有 7 人，频率为 $\dfrac{7}{21}=\dfrac{1}{3}$，

男生有 19 人，其中经常锻炼的有 11 人，频率为 $\dfrac{11}{19}$，

因为 $\dfrac{11}{19}>\dfrac{1}{3}$，依据频率稳定于概率的原理，可以认为性别对体育锻炼的经常性有影响，故①正确，②错误；

$\chi^2=\dfrac{40\times(14\times11-7\times8)^2}{21\times19\times22\times18}\approx2.431<3.841$，所以根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，没有充分证据推断性别对体育锻炼的经常性有影响，

因此可以认为性别对体育锻炼的经常性没有影响，故④正确，③错误．

故选：B．

【点评】本题考查了独立性检验的应用，属于中档题．

9．【分析】令 $f(x)=\sin2x-x$，利用导数求出 $f(x)$ 在 $[0$，$\pi]$ 的最值即可求解．

【解答】解：令 $f(x)=\sin2x-x$，$x\in[0$，$\pi]$，

则 $f'(x)=2\cos2x-1$，

由 $f'(x)>0$ 可得 $0\leqslant x<\dfrac{\pi}{6}$，或 $\dfrac{5\pi}{6}<x\leqslant\pi$，

由 $f'(x)<0$ 可得 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5\pi}{6}$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{6})$，$(\frac{5\pi}{6}$，$\pi)$ 单调递增，在 $(\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6})$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 取得极大值为 $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$，在 $x=\frac{5\pi}{6}$ 取得极小值为 $f(\frac{5\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$，

又 $f(0)=0$，$f(\pi)=-\pi$，

所以 $f(x)_{max}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$，$f(x)_{min}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$，

因为对任意 $x\in[0$，$\pi]$ 都有 $m\leqslant\sin 2x-x\leqslant M$ 成立，

所以，$m\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6}$，$M\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$，

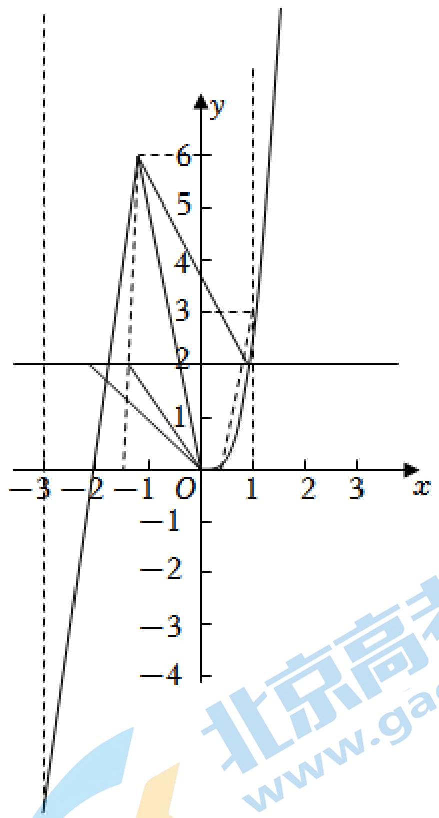
所以，$M-m\geqslant(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6})-(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$，即 $M-m$ 的最小值为 $\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$．

故选：D．

【点评】本题考查了导数的应用，考查了三角函数的最值的应用，考查了函数思想，属于中档题．

10．【分析】作出 $g(x)=3f(x)$ 的图象，由不等式的几何意义：曲线上一点与 $(a,2)$ 连线的直线斜率小于 0，结合图象即可求得 a 范围．

【解答】解：令 $g(x)=3f(x)=\begin{cases}3x^3, x\geqslant 0,\\ -6|x+1|+6, x<0,\end{cases}$ 作出 $g(x)$ 的图象如图所示：



$\frac{x-a}{3f(x)-2}<0$ 等价于 $\frac{g(x)-2}{x-a}<0$，表示点 $(x$，$g(x))$ 与点 $(a,2)$ 所在直线的斜率，

可得曲线 $g(x)$ 上只有一个整数点 $(x$，$g(x))$ 与 $(a,2)$ 所在的直线斜率小于 0，

而点 $(a,2)$ 在直线 $y=2$ 上运动，由 $g(-2)=0$， $g(-1)=6$， $g(0)=0$ 可知当 $-2\leqslant a\leqslant -1$ 时，

只有点 $(0,0)$ 满足 $\frac{(x)-2}{x-a}<0$，当 $0\leqslant a\leqslant 1$ 时，只有点 $(-1,6)$ 满 $\frac{g(x)-2}{x-a}<0$，

当 $a>1$ 时，至少有 $(-1,6)$， $(1,3)$ 满足 $\frac{g(x)-2}{x-a}<0$，不满足唯一整数点，故舍去，

当 $a<-2$ 时，至少有 $(0,0)$， $(-2,0)$ 满足 $\frac{g(x)-2}{x-a}<0$，不满足唯一整数点，故舍去，

因为 a 为整数，故 a 可取 -2， -1， 0， 1，

故选： B .

【点评】本题考查分段函数的应用，考查学生的运算能力，属于中档题.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

11．【分析】利用对数的运算性质求解.

【解答】解：原式 $=2\log_9 3+\log_3 15-\log_3 5=\log_9 3^{\ 2}+\log_3\frac{15}{5}=\log_9 9+\log_3 3=1+1=2$，

故答案为：2．

【点评】本题主要考查了对数的运算性质，是基础题.

12．【分析】写出展开式的通项公式，令 $r=3$，可得 x 的系数；各项系数之和与二项式系数和相等，即为 2^n .

【解答】解：展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}(\frac{1}{x})^r=C_5^r x^{10-3r}$， $r=0$， 1…， 5，

令 $r=3$，可得 x 的系数为 $C_5^3=20$；

各项系数之和与二项式系数和相等，即为 $2^5=32$.

【点评】本题考查二项式展开式的项，考查各项系数和，考查学生计算能力，属于基础题.

13．【分析】根据平均数，方差的计算公式计算即可.

【解答】解：由题意得，原数据的平均数 $\frac{0+3+5+7+10}{5}=5$，

原数据的方差为 $\frac{1}{5}[(0-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(10-5)^2]=11.6$，

新数据的平均数 $\overline{x}=\frac{0+3+5+7+10+a}{6}=\frac{25+a}{6}\leqslant 5$，解得 $a\leqslant 5$， $a\in Z$，

新数据的方差为 $\frac{1}{6}[(0-\overline{x})^2+(3-\overline{x})^2+(a-\overline{x})^2+(5-\overline{x})^2+(7-\overline{x})^2+(10-\overline{x})^2]$

$=\frac{1}{6}[6\overline{x}^2-(50+2a)\overline{x}+183+a^2]<\frac{58}{5}$

将 $\overline{x}=\frac{25+a}{6}$ 代入得， $a^2-10a+11.8<0$，

解得： $a\in(5-\frac{2\sqrt{87}}{5}$， $5+\frac{2\sqrt{87}}{5})$，

$9<\sqrt{87}<10$， $1<5-\frac{2\sqrt{87}}{5}<1.4$，所以 $a\in\{2$， 3， 4， 5}，

故答案为：2（答案不唯一，{2， 3， 4， 5} 中任取一个都正确）.

【点评】本题考查了求平均数与方差的问题，记住平均数与方差的公式是解题的关键.

14.【分析】根据独立事件和互斥事件概率计算方法计算即可.

【解答】解：某人从该地随机购买了一台降价促销的计算机，设买到的计算机是 A 品牌为事件 A，买到的计算机是 B 品牌为事件 B，

则由题可知 P（A）$=\frac{3}{5}$，P（B）$=\frac{2}{5}$，

从品牌中购买一个，设买到的计算机一年内不需要维修为事件 C，从 B 品牌中购买一个，设买到的计算机一年内不需要维修为事件 D，

则由题可知 P（C）$=95\%$，P（D）$=94\%$，A、B、C、D 互相独立，

故购买一台降价促销的计算机，则它在一年内不需要维修的概率为 $P(AC)+P(BD)=P$（A）P（C）$+P$（B）P（D）$=\frac{3}{5}\times 95\%+\frac{2}{5}\times 94\%=0.946$.

故答案为：0.946.

【点评】本题考查独立事件和互斥事件的概率，属于基础题.

15.【分析】对于第一空：根据题意，由特殊值法可得 f（1）$=f$（3），结合解析式计算可得答案；

对于第二空：分析可得 $f(x)=-f(x-4)$，当 $x\in(5,7)$ 时，$x-4\in(1,3)$，由此分析可得答案.

【解答】解：根据题意，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(1+x)=f(3-x)$，

令 $x=0$ 可得：f（1）$=f$（3），

当 $x\in(0$，$2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则 f（1）$=1-2=-1$，故 f（3）$=-1$；

$f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(3-x)$，则有 $f(x)=f(4-x)$，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

又由 $(4+x)+f(4-x)=0$，则 $f(x+4)=-f(x)$，

当 $x\in(5,7)$ 时，$x-4\in(1,3)$，此时有 $f(x)=-f(x-4)$，

当 $x\in(0$，$2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$ 且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，则区间 $(1,3)$ 上，有 $-1<f(x-4)\leqslant 0$，

又由 $f(x)=-f(x-4)$，则 $0\leqslant f(x)<1$，

当 $x\in(5,7)$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $[0$，$1)$；

故答案为：-1，$[0$，$1)$.

【点评】本题考查抽象函数的性质，涉及函数值的计算，属于基础题.

16.【分析】求出函数定义域，利用奇偶性定义判断函数奇偶性；求导研究函数单调性；数形结合求解零点问题；通过研究导函数的值域判断曲线不存在与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 垂直的切线.

【解答】解：$f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}-1$ 的定义域为 R，$f(-x)+f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}-1+\frac{2}{1+e^{2x}}-1=0$，故②正确，

又 $y=e^{-2x}$ 在 R 上单调递减，所以 $f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}-1$ 在 R 上单调递增. 故①正确，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}-1<1$ 恒成立，所以函数 $y=|f(x)|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $y=|f(x)|<1$，

故当 $a=0$ 时，$g(x)=ax+1=1$，此时函数 $y=|f(x)|-ax-1$ 无零点，故③错误，

又 $f'(x)=\dfrac{4}{e^{-2x}+e^{2x}+2}\leqslant\dfrac{4}{2\sqrt{e^{-2x}e^{2x}}+2}=1$，且 $0<f'(x)\leqslant 1$，

所以 $f'(x)$ 不可能为 $\sqrt{2}$，故不存在与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 垂直的切线，故④正确.

故答案为：①②④.

【点评】本题主要考查复合函数函数奇偶性、单调性、导数以及函数零点相关知识，属于较难题.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

17.【分析】(I) 根据对立事件以及相互独立事件的乘法公式即可求解；

(II) 根据超几何分布即可求概率，进而可得分布列以及期望.

【解答】解：(I) 由题意可知：乙能答对一道题的概率为 $\dfrac{3}{4}$，若两人都不能答对的概率 $P=(1-\dfrac{3}{4})(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{1}{12}$，

则至少有 1 人能答对的概率为 $1-P=\dfrac{11}{12}$；

(II) X 的取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_2^2}{C_8^2}=\dfrac{1}{28},P(X=1)=\dfrac{C_6^1C_2^1}{C_8^2}=\dfrac{12}{28}=\dfrac{3}{7},P(X=2)=\dfrac{C_6^2}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{28}$	$\dfrac{3}{7}$	$\dfrac{15}{28}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{28}+1\times\dfrac{3}{7}+2\times\dfrac{15}{28}=\dfrac{3}{2}$.

【点评】本题考查了对立事件以及相互独立事件的乘法公式和离散型随机变量的分布列与期望，属于中档题.

18.【分析】(I) 求导，根据导函数在某点处的导数值是切线的斜率即可求解；

(II) 根据导函数的正负即可确定 $y=f(x)$ 的单调区间.

【解答】解：(I) 由 $f(x)=2ln(1-x)-\dfrac{1}{x}$，得 $f'(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x+1)(2x-1)}{x^2(x-1)}$，

故 $f'(-1)=0$，$f(-1)=2ln2+1$，所以切线方程为 $y=2ln2+1$.

(II) $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$，由 (I) 知当 $x<-1$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $-1<x<\dfrac{1}{2}$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $\dfrac{1}{2}<x<1$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

故 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,\dfrac{1}{2})$，单调递减区间为 $(-\infty,-1),(\dfrac{1}{2},1)$.

【点评】本题考查了利用导数研究函数的单调性与切线方程，属基础题.

19.【分析】(I) 根据频率分布直方图直接计算即可；

(II) 可得 X 的可能取值且 $X\sim B(3,\dfrac{1}{2})$，求出 X 取不同值的概率即可得出分布列，求出数学期望；

(III) 分别计出 μ_1，μ_2，μ_3 即可比较.

【解答】解：(I) 根据题意，估计该校学生日均收看北京冬奥会的时长的平均值为：

$(0.5\times0.1+1\times0.3+1.5\times0.4+2\times0.6+2.5\times0.4+3\times0.2)\times0.5=1.875$ 小时；

(II) 由条件可知，从全校学生中随机抽取 1 人，其日均收看北京冬奥会的时长在 $(1.5，2.5]$ 的概率估计为 $0.3+0.2=0.5$，

X 的可能取值为 0，1，2，3，且 $X\sim B(3,\frac{1}{2})$，

则 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8},P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8},P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；

(III) $\mu_1=0.5\times1=0.5$ 小时，

因为 $(0.5，1]$，$(1，1.5]$ 的人数之比为 $3:4$，所以 $\mu_2=(1\times\frac{3}{7}+1.5\times\frac{4}{7})\times\frac{2}{3}=\frac{6}{7}$ 小时，

因为 $(1.5，2]$，$(2，2.5]$，$(2.5，3]$ 的人数之比为 $3:2:1$，

所以 $\mu_3=(2\times\frac{3}{6}+2.5\times\frac{2}{6}+3\times\frac{1}{6})\times\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$ 小时，

所以 $\mu_2>\mu_3>\mu_1$.

【点评】本题考查了离散型随机变量的分布列与期望，属于中档题.

20.【分析】(I) 对函数求导，若 $y=f(x)$ 在 R 上是增函数，即 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，得 $a\leqslant(1+x)e^x$，设 $g(x)=(1+x)e^x$，求导后利用单调性求得函数的最小值，即可求得结果；

(II) 对函数二次求导后求得导数的单调性即可判断出结果；

(III) 若存在三个实数 $x_1<x_2<x_3$，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则函数 $f(x)$ 存在 3 个单调区间，结合 (I) 中函数 $g(x)$ 的单调性且 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to0$，利用单调性解得结果.

【解答】解：$(I)\because f(x)=xe^x-ax(a\in R)$，则 $f'(x)=(1+x)e^x-a$，

若 $y=f(x)$ 在 R 上是增函数，即 $f'(x)\geqslant0$ 恒成立，得 $a\leqslant(1+x)e^x$，

设 $g(x)=(1+x)e^x$，$g'(x)=(x+2)e^x$，$g'(x)>0$ 得 $x>-2$，$g'(x)<0$ 得 $x<-2$，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 递减，在 $(-2,+\infty)$ 递增，则 $g(x)\geqslant g(-2)=-\frac{1}{e^2}$，

故 $a\leqslant-\frac{1}{e^2}$. 即 $a\in[-\frac{1}{e^2}，+\infty)$，

(II) 当 $a=1$ 时，$f'(x)=(1+x)e^x-1$，$f'(x)=(x+2)e^x$，$f'(x)>0$ 得 $x>-2$，

则 $f'(x)$ 递增，$f'(0)=0$，

则 $x\in(-2,0)$ 时， $f'(x)<0$ ， $x\in(0,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ，则 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递增，

故 $x=0$ 是函数的极小值点.

$(III)\because f'(x)=(1+x)e^x-a$ ，令 $f'(x)=0$ ，得 $(1+x)e^x=a$ ，由 (I) 得 $g(x)=a$ ，

又 $g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 递减，在 $(-2,+\infty)$ 递增，则 $g(x)\geqslant g(-2)=-\dfrac{1}{e^2}$ ，

且 $x\to-\infty$ 时， $g(x)\to0$ ， $g(-1)=0$ ，当 $x<-1$ 时， $g(x)<0$ ，

若存在三个实数 $x_1<x_2<x_3$ ，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ ，

故当 $g(x)=a$ 有两根 x_4 ， x_5 使得 $x_4<-2<x_5<-1$ ，故 $x<x_4$ 或 $x>x_5$ 时， $g(x)>a$ ，

此时 $f(x)$ 递增， $x_4<x<x_5$ 时， $g(x)<a$ ，此时 $f(x)$ 递减，且 $x\to+\infty$ 时， $f(x)\to+\infty$ ，

则必有 $f(x)$ 先增后减再增，故必存在 $x_1<x_2<x_3$ ，满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$ ，

故 $g(-2)<a<0$ ，即 $-\dfrac{1}{e^2}<a<0$. 故 $a\in(-\dfrac{1}{e^2},0)$.

【点评】本题考查利用导数研究函数的极值，考查学生的运算能力，属于难题.

21. 【分析】（I）根据性质 P 满足的条件可验证 $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}<\frac{1}{30}$，不符合要求即可判断，根据性质 P 满足的要求即可写出集合 A;

（II）根据 $|a_i-a_j|\geqslant\frac{1}{30}$，由累加法即可得最大项与最小项的关系.

【解答】（I）解：因为 $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}<\frac{1}{30}$，故该集合不符合性质 P;

符合性质 P 的集合 $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\}$.

（II）（i）证明：$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，不放设 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，则 $a_i-a_j\geqslant\frac{1}{30}(i>j)$，

故 $a_n-a_1=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)\geqslant\frac{n-1}{30}$，故（$a_i-a_j$）的最大值不小于 $\frac{n-1}{30}$;

（ii）解：要使 n 最大，$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，不放设 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，

则 A 中的元素满足 $a_n=\frac{1}{k}$，$a_{n-1}=\frac{1}{k+1}$，$\cdots$，$a_1=\frac{1}{k+n-1}(k\in N^*)$，

则由（i）知：$a_2-a_1=\frac{1}{k+n-2}-\frac{1}{k+n-1}\geqslant\frac{n-1}{30}\Rightarrow(k+n-2)(k+n-1)\leqslant30$，

又 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\geqslant\frac{1}{30}\Rightarrow k(k+1)\leqslant30\Rightarrow1\leqslant k\leqslant5$，$k\in N$，

当 $k=5$ 时，由（$k+n-2$）（$k+n-1$）≤30 解得：$n\leq2$，且 $n\in N^*$，

当 $k=4$ 时，由（$k+n-2$）（$k+n-1$）≤30 解得：$n\leq3n\in N^*$，

$k=3$ 时，由（$k+n-2$）（$k+n-1$）≤30 解得：$n\leq4$，$n\in N^*$，

$k=2$ 时，由（$k+n-2$）（$k+n-1$）≤30 解得：$n\leq5$，$n\in N^*$，

$k=1$ 时，由（$k+n-2$）（$k+n-1$）≤30 解得：$n\leq6$，$n\in N^*$，

故 n 最大值为 6，此时集合 $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{6}\}$.

【点评】本题主要考查数列中的递推关系，数列中的新定义及其应用等知识，属于中等题.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〃 精益求精、专业严谨 〃 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。