2019 北京市朝阳区高三二模

数　　学（文）

2019.5

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x>1\}$，$B=\{x\,|\,x(x-2)<0\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x\,|\,x>0\}$　　（B）$\{x\,|\,1<x<2\}$

（C）$\{x\,|\,1\le x<2\}$　　（D）$\{x\,|\,x>0$ 且 $x\neq 1\}$

2. 复数 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 的虚部为

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）$\sqrt{2}$

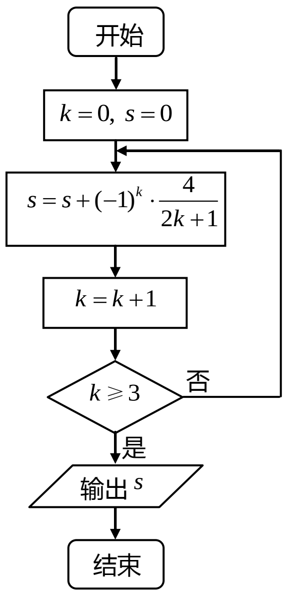
3. 已知 $a=\log_3 \mathrm{e}$，$b=\ln 3$，$c=\log_3 2$，则 a，b，c 的大小关系是

（A）$c>a>b$　　（B）$c>b>a$

（C）$a>b>c$　　（D）$b>a>c$

4. 在数学史上，中外数学家使用不同的方法对圆周率 π 进行了估算. 根据德国数学家莱布尼茨在 1674 年给出的求 π 的方法绘制

的程序框图如图所示. 执行该程序框图，输出 s 的值为



（A）4

（B）$\frac{8}{3}$

（C）$\frac{52}{15}$

（D）$\frac{304}{105}$

5. 已知平面向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，且$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

（A）3　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）7　　（D）$\sqrt{7}$

6. 已知等差数列$\{a_n\}$首项为a_1，公差$d\neq 0$．则“a_1,a_3,a_9成等比数列”是“$a_1=d$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

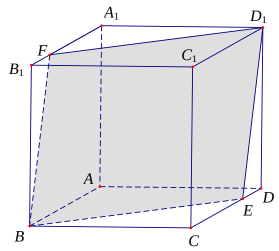
（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

7. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq a,\\ -x, x<a.\end{cases}$若函数$f(x)$存在零点，则实数$a$的取值范围是

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(0,+\infty)$

（C）$(-\infty,1)$　　（D）$(1,+\infty)$

8. 在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E,F分别为线段CD和A_1B_1上的动点，且满足$CE=A_1F$，则四边形D_1FBE所围成的图形（如图所示阴影部分）分别在该正方体有公共顶点的三个面上的正投影的面积之和



A. 有最小值$\dfrac{3}{2}$　　B. 有最大值$\dfrac{5}{2}$

C. 为定值3　　D. 为定值2

第二部分（非选择题 共 110 分）

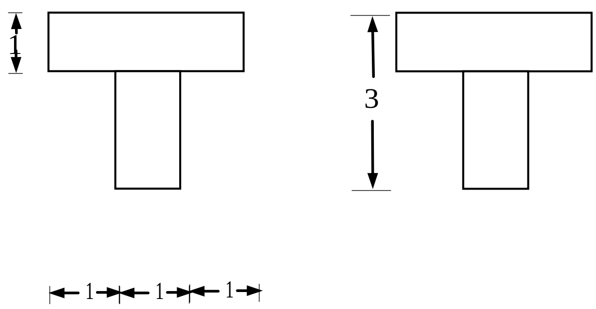
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 函数$f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$的最小正周期为______.

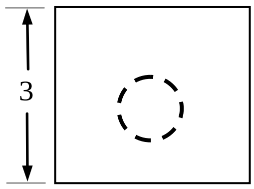
10. 已知点$M(1,2)$在抛物线$C:y^2=2px(p>0)$上，则$p=$______；点M到抛物线C的焦点的距离是______.

11. 圆$C:x^2+(y-1)^2=1$上的点P到直线$l:x-2y-3=0$的距离的最小值是______.

12. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为______.



正视图　　侧视图



俯视图

13. 实数 x,y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq x, \\ x+y \leq 4. \end{cases}$ 能说明“若 $z=x+y$ 的最大值是 4，则 $x=1,y=3$”为假命题的一组 (x,y) 值是________.

14. 设全集 $U=\{1,2,3,\cdots,20\}$，非空集合 A， B 满足以下条件：

① $A \bigcup B=U$， $A \bigcap B=\varnothing$；

② 若 $x \in A$， $y \in B$，则 $x+y \notin A$ 且 $xy \notin B$.

当 $7 \in A$ 时，1______ B（填 $\in$ 或 $\notin$），此时 B 中元素个数为______.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（本小题满分 13 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_3=12, a_2+a_4=18$，$n \in \mathbf{N}^*$.

（I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

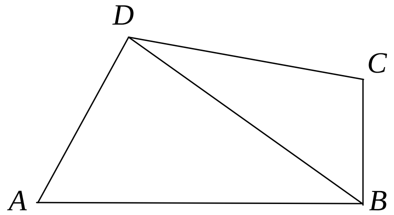
（II）求 $a_3+a_6+a_9+...+a_{3n}$.

16. （本小题满分 13 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，$\angle ABC=90°$．已知 $AD=\sqrt{3}$， $BD=\sqrt{6}$.

（Ⅰ）求 $\sin\angle ABD$ 的值；

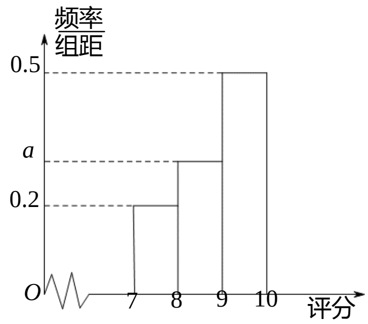
（II）若 $CD=2$，且 $CD>BC$，求 BC 的长.



17. （本小题满分 13 分）

某电视台举行文艺比赛，并通过网络对比赛进行直播. 比赛现场由 5 名专家组成评委给每位参赛选手评分，场外观众也可以通过网络给每位参赛选手评分. 每位选手的最终得分需要综合考虑专家评分和观众评分. 某选手参与比赛后，现场专家评分情况如下表. 另有约数万名场外观众参与评分，将观众评分按照$[7,8),[8,9),[9,10]$分组，绘成频率分布直方图如下图.

专家	A	B	C	D	E
评分	10	10	8.8	8.9	9.7



（Ⅰ）求 a 的值，并用频率估计概率，估计某场外观众评分不小于 9 的概率；

（Ⅱ）从现场专家中随机抽取 2 人，求其中评分高于 9 分的至少有 1 人的概率；

（Ⅲ）考虑以下两种方案来确定该选手的最终得分.

方案一：计算所有专家与观众评分的平均数$\overline{x}$作为该选手的最终得分；

方案二：分别计算专家评分的平均数$\overline{x_1}$和观众评分的平均数$\overline{x_2}$，用$\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$作为该选手最终得分.

请直接写出$\overline{x}$与$\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$的大小关系.

18.（本小题满分 13 分）

如图 1，在直角梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$\angle BAD=90^{\circ}$，$AB=4$，$AD=2$，$DC=3$，点E在CD上，且$DE=2$，将$\triangle ADE$沿AE折起，使得平面$ADE\perp$平面$ABCE$（如图 2）.

G为AE中点.

（Ⅰ）求证: $DG\perp$平面$ABCE$；

（Ⅱ）求四棱锥$D-ABCE$的体积；

（Ⅲ）在线段BD上是否存在点P，使得$CP//$平面ADE？若存在，求$\dfrac{BP}{BD}$的值；若不存在，请说明理由.

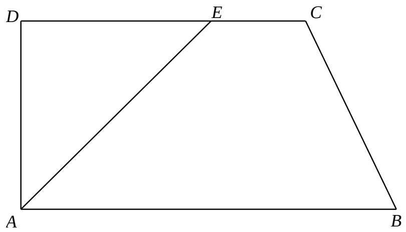


图 1

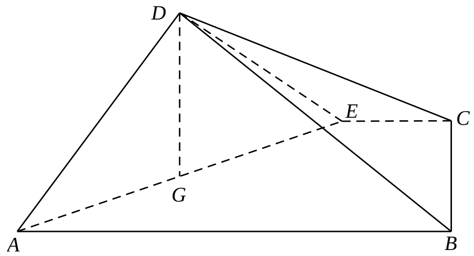


图 2

19. （本小题满分 14

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1\ (a>1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 l 过点 $M(1,0)$ 且与椭圆 C 相交于 A, B 两点. 过点 A 作直线 $x=3$ 的垂线，垂足为 D. 证明直线 BD 过 x 轴上的定点.

20. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=(m+1)x+\ln x\ (m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个极值点，求 m 的取值范围.

数学试题答案

一、选择题（40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	C	B	C	B	D

二、填空题（30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	π	2；2	$\sqrt{5}-1$	$9+\frac{\pi}{2}$	$(2,2)$ (答案不唯一)	$\in$；18

三、解答题（80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（I）因为$\{a_n\}$是等差数列，$a_1+a_3=12, a_2+a_4=18$，所以$\begin{cases}2a_1+2d=12,\\2a_1+4d=18.\end{cases}$

解得$d=3, a_1=3$. 则$a_n=3+(n-1)\times 3=3n$，$n\in\mathbf{N}^*$.　　…………. 7 分

（II）$a_3, a_6, a_9, ..., a_{3n}$ 构成首项为$a_3=9$，公差为9的等差数列.

则$a_3+a_6+a_9+...+a_{3n}=9n+\frac{1}{2}n(n-1)\times 9=\frac{9}{2}(n^2+n)$.　…………. 13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）在$\triangle ABD$中，由正弦定理，得$\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{BD}{\sin\angle A}$.

因为$\angle A=60°$，$AD=\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{6}$，

所以$\sin\angle ABD=\frac{AD}{BD}\times\sin\angle A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\times\sin 60°=\frac{\sqrt{6}}{4}$.　…………. 6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$\sin\angle ABD=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

因为$\angle ABC=90°$，

所以$\cos\angle CBD=\cos(90°-\angle ABD)=\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

在ΔBCD中，由余弦定理，得$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\angle CBD$.

因为$CD=2$，$BD=\sqrt{6}$，

所以$4=BC^2+6-2BC\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，即　$BC^2-3BC+2=0$，

解得$BC=1$或$BC=2$.

又$CD>BC$，则$BC=1$.　　　　…………. 13 分

17．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$a=0.3$，某场外观众评分不小于 9 的概率是$\dfrac{1}{2}$.　　…………. 3 分

（Ⅱ）设“从现场专家中随机抽取 2 人，其中评分高于 9 分的至少有 1 人”为事件 Q.

因为基本事件有AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE

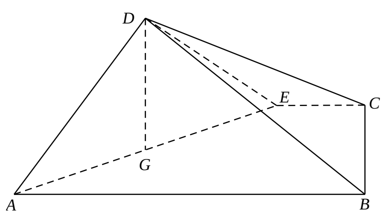
共 10 种，事件 Q 的对立事件只有CD 1 种，

所以$P(Q)=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$.　　　…………. 9 分

（Ⅲ）$\bar{x}<\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$.　　　　…………. 13 分

18．（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）证明：



因为G为AE中点，$AD=DE=2$，

所以$DG\perp AE$.

因为平面$ADE\perp$平面$ABCE$，

平面$ADE\cap$平面$ABCE=AE$，$DG\subset$平面ADE，

所以$DG\perp$平面$ABCE$.　　　　…………. 4 分

（Ⅱ）在直角三角形ADE中，易求$AE=2\sqrt{2}$，则$DG=\dfrac{AD\cdot DE}{AE}=\sqrt{2}$.

所以四棱锥 $D-ABCE$ 的体积的体积为

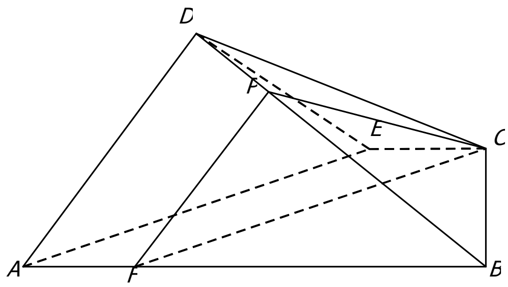
$$V_{D-ABCE}=\frac{1}{3}\times\frac{(1+4)\times 2}{2}\times\sqrt{2}=\frac{5}{3}\sqrt{2}.$$ …………8 分

（Ⅲ） 过点 C 作 $CF//AE$ 交 AB 于点 F，则 $AF:FB=1:3$.

过点 F 作 $FP//AD$ 交 DB 于点 P，连接 PC，则 $DP:PB=1:3$.

又因为 $CF//AE$， $AE\subset$ 平面 ADE，$CF\not\subset$ 平面 ADE，

所以 $CF//$ 平面 ADE.



同理 $FP//$ 平面 ADE.

又因为 $CF\cap PF=F$，

所以平面 $CFP//$ 平面 ADE.

因为 $CP\subset$ 平面 CFP ，

所以 $CP//$ 平面 ADE.

所以在 BD 上存在点 P，使得 $CP//$ 平面 ADE，且 $\frac{BP}{BD}=\frac{3}{4}$.

…………. 13 分

19. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由题意可得 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\ a=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. …………. 4 分

（Ⅱ）直线 BD 恒过 x 轴上的定点 $N(2,0)$. 证明如下

（1） 当直线 l 斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，

不妨设 $A(1,\frac{\sqrt{6}}{3})$，$B(1,-\frac{\sqrt{6}}{3})$，$D(3,\frac{\sqrt{6}}{3})$.

此时，直线 BD 的方程为：$y=\frac{\sqrt{6}}{3}(x-2)$，所以直线 BD 过点 $(2,0)$.

（2）当直线 l 的斜率存在时，设 $l: y=k(x-1)$， $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$D(3,y_1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{3k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{3k^2-3}{3k^2+1}$.

直线 $BD: y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-3}(x-3)$，令 $y=0$，得 $x-3=\dfrac{-y_1(x_2-3)}{y_2-y_1}$，

所以 $x=\dfrac{3y_2-3y_1-y_1x_2+3y_1}{y_2-y_1}$

$$=\frac{3y_2-y_1x_2}{y_2-y_1}$$

$$=\frac{4x_2-3-x_1x_2}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{4x_2-\dfrac{12k^2}{3k^2+1}}{x_2-x_1}.$$

由于 $x_1=\dfrac{6k^2}{3k^2+1}-x_2$，所以 $x=\dfrac{4x_2-\dfrac{12k^2}{3k^2+1}}{2x_2-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}}=2$.

故直线 BD 过点 $(2,0)$.

综上所述，直线 BD 恒过 x 轴上的定点 $(2,0)$. …………. 14 分

20. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当 $m=1$时，$f(x)=2x+\ln x$，

所以 $f'(x)=2+\dfrac{1}{x}$， $f'(1)=3$.

又 $f(1)=2$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $3x-y-1=0$.

…………. 4 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． $f'(x)=m+1+\frac{1}{x}=\frac{(m+1)x+1}{x}$，

（1） 当 $m+1\geqslant 0$ 即 $m\geqslant -1$ 时，

因为 $x\in(0,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$．

（2） 当 $m+1<0$，即 $m<-1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{m+1}$．

当 $0<x<-\frac{1}{m+1}$ 时， $f'(x)>0$；

当 $x>-\frac{1}{m+1}$ 时， $f'(x)<0$；

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,-\frac{1}{m+1})$，减区间为 $(-\frac{1}{m+1},+\infty)$．

综上，当 $m\geqslant -1$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $m<-1$ 时， $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,-\frac{1}{m+1})$，减区间为 $(-\frac{1}{m+1},+\infty)$． ……. 9 分

（Ⅲ）因为 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-(m+1)x-\ln x$，

所以 $g'(x)=x-\frac{1}{x^2}-(m+1)-\frac{1}{x}=\frac{x^3-(m+1)x^2-x-1}{x^2}$．

令 $h(x)=x^3-(m+1)x^2-x-1$， $h'(x)=3x^2-2(m+1)x-1$．

若函数 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个极值点,

则函数 $h(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内存在零点.

又 $h'(0)=-1<0$，

所以 $h'(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内有唯一零点 x_0．

且 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时， $h'(x)<0;$

$x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时， $h'(x)>0,$

则 $h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 内为减函数，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 内为增函数.

又因为 $h(0)=-1<0,$ 且 $h(x)$ 在 $\left(1,2\right)$ 内存在零点,

所以$\begin{cases} h(1)<0, \\ h(2)>0. \end{cases}$

解得$-2<m<\dfrac{1}{4}$.

显然$h(x)$在$\left(1,2\right)$内有唯一零点，记为x_1.

当$x\in\left(1,x_1\right)$时，$h(x)<0$，$x\in\left(x_1,2\right)$时，$h(x)>0$，所以$h(x)$在x_1点两侧异号，即$g'(x)$在x_1点两侧异号，x_1为函数$g(x)$在区间$(1,2)$内唯一极值点.

当$m\le -2$时，$h(1)=-m-2\ge 0$,

又$h'(1)>0, h'(x)>0$在$(1,2)$内成立,

所以$h(x)$在$(1,2)$内单调递增，故$g(x)$无极值点.

当$m\ge\dfrac{1}{4}$时，$h(2)\le 0, h(0)<0$, 易得$x\in\left(1,2\right)$时, $h(x)<0$, 故$g(x)$无极值点.

所以当且仅当$-2<m<\dfrac{1}{4}$时，函数$g(x)$在区间$(1,2)$内有且只有一个极值点.　　……. 14 分