海淀区高三年级第一学期期末练习

数　学（理科）

2017.1

学校__________班级__________姓名__________成绩__________

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 抛物线 $y^2=2x$ 的焦点到准线的距离为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 在极坐标系中，点 $(1,\frac{\pi}{4})$ 与点 $(1,\frac{3\pi}{4})$ 的距离为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

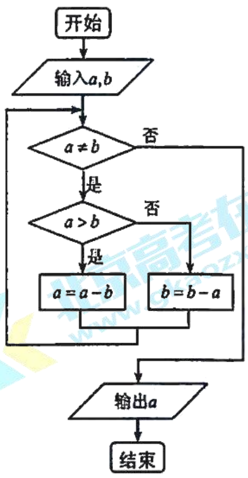
3. 右侧程序框图所示的算法来自于《九章算术》. 若输入 a 的值为16，b 的值为24，则执行该程序框图输出的结果为

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9



4. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. -2　　D. 2

5. 已知直线 l 经过双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的一个焦点且与其一条渐近线平行，则直线 l 的方程可以是

A. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $y=\frac{1}{2}x-\sqrt{5}$　　C. $y=2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $y=-2x+\sqrt{3}$

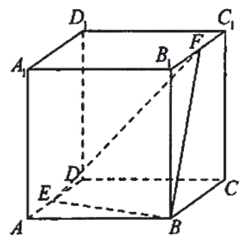
6. 设 x,y 满足 $\begin{cases} x-y\leqslant 0, \\ x+y-2\geqslant 0, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ 则 $(x+1)^2+y^2$ 的最小值为

A. 1　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 5　　D. 9

7. 在手绘涂色本的某页上画有排成一列的 6 条未涂色的鱼，小明用红、蓝两种颜色给这些鱼涂色，每条鱼只能涂一种颜色，两条相邻的鱼不都涂成红色，涂色后，既有红色鱼又有蓝色鱼的涂色方法种数为

A. 14　　B. 16　　C. 18　　D. 20

8. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E,F 分别是棱 AD,B_1C_1 上的动点，设 $AE=x,B_1F=y$. 若棱 DD_1 与平面 BEF 有公共点，则 $x+y$ 的取值范围是



A. $[0,1]$　　B. $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

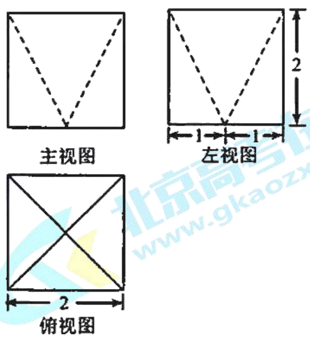
C. $[1,2]$　　D. $[\frac{3}{2},2]$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2$，则 $z=$ ______.

10. 在 $(x^2+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中，常数项为______.（用数字作答）

11. 若一个几何体由正方体挖去一部分得到，其三视图如图所示，则该几何体的体积为______.



12. 已知圆 $C:x^2-2x+y^2=0$，则圆心坐标为______；

若直线 l 过点 $(-1,0)$ 且与圆 C 相切，则直线 l 的方程为______.

13. 已知函数 $y=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$.

①若 $f(0)=1$，则 $\varphi=$ ____；

②若 $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $f(x+2)-f(x)=4$ 成立，则 ω 的最小值是______.

14. 已知函数$f(x)=e^{-|x|}+\cos\pi x$，给出下列命题：

① $f(x)$ 的最大值为 2；

② $f(x)$ 在$(-10,10)$内的零点之和为 0；

③ $f(x)$ 的任何一个极大值都大于 1.

其中，所有正确命题的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$c=2a$，$B=120°$，且 $\triangle ABC$ 面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求 b 的值；

（Ⅱ）求 $\tan A$ 的值.

16.（本小题满分 13 分）

诚信是立身之本，道德之基. 某校学生会创设了“诚信水站”，既便于学生用水，又推进诚信教育，并用“$\frac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$”表示每周“水站诚信度”. 为了便于数据分析，以四周为一周期，下表为该水站连续十二周（共三个周期）的诚信度数据统计：

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一个周期	95%	98%	92%	88%
第二个周期	94%	94%	83%	80%
第三个周期	85%	92%	95%	96%

（Ⅰ）计算表中十二周“水站诚信度”的平均数 $\bar{x}$；

（Ⅱ）分别从上表每个周期的 4 个数据中随机抽取 1 个数据，设随机变量 X 表示取出的 3 个数据中“水站诚信度”超过 91% 的数据的个数，求随机变量 X 的分布列和期望；

（Ⅲ）已知学生会分别在第一个周期的第四周末和第二个周期的第四周末各举行了一次“以诚信为本”的主题教育活动. 根据已有数据，说明两次主题教育活动的宣传效果，并根据已有数据陈述理由.

17.（本小题满分 14 分）

如图 1，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$\angle ABC = 90^\circ$，$AB = 2DC = 2BC = 4$，O 是边 AB 的中点．将三角形 AOD 绕边 OD 所在直线旋转到 A_1OD 位置，使得 $\angle A_1OB = 120^\circ$，如图 2．设 m 为平面 A_1DC 与平面 A_1OB 的交线．

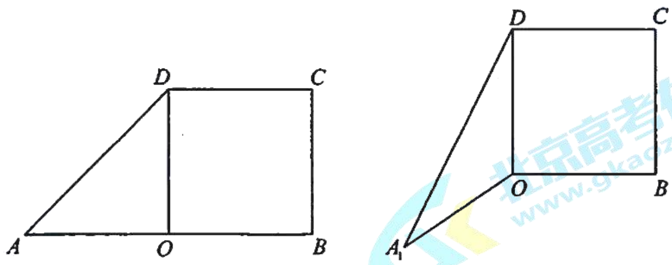


图 1　　图 2

（Ⅰ）判断直线 DC 与直线 m 的位置关系并证明；

（Ⅱ）若在直线 m 上的点 G 满足 $OG \perp A_1D$，求出 A_1G 的长；

（Ⅲ）求直线 A_1O 与平面 A_1BD 所成角的正弦值．

18.（本小题满分 13 分）

已知 $A(0,2)$，$B(3,1)$ 是椭圆 G：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两点．

（Ⅰ）求椭圆 G 的离心率；

（Ⅱ）已知直线 l 过点 B，且与椭圆 G 交于另一点 C（不同于点 A），若以 BC 为直径的圆经过点 A，求直线 l 的方程．

19.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x) = \ln x - \dfrac{a}{x} - 1$.

（Ⅰ）若曲线 $y = f(x)$ 存在斜率为 -1 的切线，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）设函数 $g(x) = \dfrac{x+a}{\ln x}$，求证：当 $-1 < a < 0$ 时，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在极小值．

20.（本小题满分 13 分）

对于无穷数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $b_k = \max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\} - \min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k=1,2,3,\cdots)$，则称 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“收缩数列”．其中，$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$ 分别表示 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中的最大数和最小数．

已知 $\{a_n\}$ 为无穷数列，其前 n 项和为 S_n，数列 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“收缩数列”．

（Ⅰ）若 $a_n = 2n+1$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和；

（Ⅱ）证明：$\{b_n\}$ 的“收缩数列”仍是 $\{b_n\}$；

（Ⅲ）若 $S_1+S_2+\cdots+S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}a_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}b_n(n=1,2,3,\cdots)$，求所有满足该条件的 $\{a_n\}$．

海淀区高三年级第一学期期末练习

数学（理科）答案及评分标准

2017.1

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1.B　2.B　3. C　4.C　5.A　6. B　7.D　8.C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，

9. $1-\mathrm{i}$　10. 15　11. $\frac{16}{3}$　12. $(1,0)$；$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$ 和 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

13. $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$　14. ①②③

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由ΔABC面积公式及题设得

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}a\times 2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得 $a=1, c=2$,

由余弦定理及题设可得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=1+4-2\times1\times2\times(-\frac{1}{2})=7$$

又 $b>0, \therefore b=\sqrt{7}$.（不写 b>0 也不扣分）

（Ⅱ）在ΔABC中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得：

$$\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{14},$$

又 $B=120^\circ$，所以 A 是锐角（或：因为 $a=1<c=2$.）

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{\frac{175}{196}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

所以 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{21}}{5\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）十二周"水站诚信度"的平均数为 $\bar{x}=\dfrac{95+98+92+88+94+94+83+80+85+92+95+96}{12\times100}=91\%$

（Ⅱ）随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3

三个周期"水站诚信度"超过 91% 分别有 3 次，2 次，3 次

$P(X=0)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{64}$

$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{14}{64}$

$P(X=2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{30}{64}$

$P(X=3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{9}{32}$

$EX=0\times\frac{1}{32}+1\times\frac{7}{32}+2\times\frac{15}{32}+3\times\frac{9}{32}=2$

（Ⅲ）本题为开放问题，答案不唯一，在此给出评价标准，并给出可能出现的答案情况，阅卷时按照标准酌情给分.

给出明确结论，1 分，结合已有数据，能够运用以下三个标准中的任何一个陈述得出该结论的理由，2 分.

标准 1:会用主题活动前后的百分比变化进行阐述

标准 2：会用三个周期的诚信度平均数变化进行阐述

标准 3：会用主题活动前后诚信度变化趋势进行阐述

17. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）直线 $DC\,//\,m$.

证明：由题设可得 $CD\,//\,OB$，$CD\not\subset$ 平面 A_1OB，$OB\subset$ 平面 A_1OB，

所以 $CD\,//$ 平面 A_1OB.

又因为 $CD\subset$ 平面 A_1DC，平面 $A_1DC\cap$ 平面 $A_1OB=m$，

所以 $CD\,//\,m$.

（此处漏写 $CD\not\subset$ 平面 A_1OB 扣 1 分，漏写 平面 $A_1DC\cap$ 平面 $A_1OB=m$ 扣 1 分）

法 1：

（Ⅱ）由已知 $AB=2CD=2BC=4$，O 是边 AB 的中点，$AB\,//\,CD$，

所以 $CD \underline{\underline{//}} OB$，

因为 $\angle ABC=90^\circ$，所以四边形 $CDOB$ 是正方形，

所以在图 1 中 $DO \perp AB$，

所以结合题设可得，在图 2 中有 $DO \perp OA_1$， $DO \perp OB$，

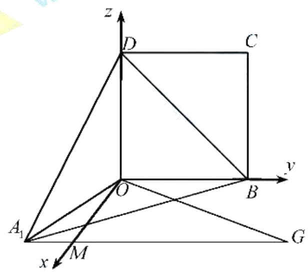
又因为 $OA_1 \cap OB = O$，

所以 $DO \perp$ 平面A_1OB .

在平面 AOB 内作 OM 垂直 OB 于 M， 则 $DO \perp OM$.
如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则

$A_1(\sqrt{3},-1,0), B(0,2,0), D(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1D}=(-\sqrt{3},1,2)$.



设 $G(\sqrt{3},m,0)$，则由 $OG \perp A_1D$ 可得

$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{OG}=0$，即

$(-\sqrt{3},1,2)\cdot(\sqrt{3},m,0)=-3+m=0$

解得 $m=3$.

所以 $A_1G=4$.

（III）设平面 A_1BD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y+2z=0,\\ -\sqrt{3}x+3y=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $x=\sqrt{3}, z=1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$，

设直线 A_1O 与平面 A_1BD 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{A_1O},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1O}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1O}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

（公式 1 分，数值 1 分）

法 2：

（II）由已知 $AB=2CD=2BC=4$， O 是边 AB 的中点， $AB//CD$，

所以 $CD \underline{\underline{//}} OB$，

因为 $\angle ABC=90^\circ$，所以四边形 $CDOB$ 是正方形，
所以在图 1 中 $DO \perp AB$，

所以结合题设可得，在图 2 中有 $DO \perp OA_1$， $DO \perp OB$，

又因为 $OA_1 \cap OB = O$，

所以 $DO \perp$ 平面 A_1OB.

又因为 $OG \subset$ 平面 A_1OB，所以 $DO \perp OG$.

若在直线 m 上的点 G 满足 $OG \perp A_1D$，又 $OD \cap A_1D = D$，

所以 $OG \perp$ 平面 A_1OD，

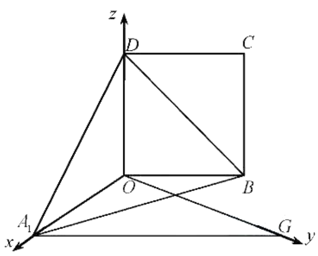
所以 $OG \perp OA_1$，

因为 $\angle A_1OB = 120^\circ, OB \parallel A_1G$，所以 $\angle OA_1G = 60^\circ$，

因为 $OA_1 = 2$，所以 $A_1G = 4$.

（III）由（II）可知 OD、OA_1、OG 两两垂直，

如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则



$O(0,0,0), A_1(2,0,0), B(-1,\sqrt{3},0), D(0,0,2)$,

所以 $\overrightarrow{A_1D} = (-2,0,2), \overrightarrow{A_1B} = (-3,\sqrt{3},0,)$

设平面 A_1BD 的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$，则

$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x + 2z = 0, \\ -3x + \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$，

则 $y = \sqrt{3}, z = 1$，

所以 $\vec{n} = (1,\sqrt{3},1)$，

设直线 A_1O 与平面 A_1BD 所成角为 θ，则

$$\sin\theta = \cos < \overrightarrow{A_1O}, \vec{n} >= \frac{\overrightarrow{A_1O} \cdot \vec{n}}{\left|\overrightarrow{A_1O}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

（公式 1 分，数值 1 分）

18.（本小题满分 13 分）

解：（I）由已知 $b = 2$,

由点 $B(3,1)$ 在椭圆 G 上可得 $\frac{9}{a^2} + \frac{1}{4} = 1$，

解得 $a^2 = 12, a = 2\sqrt{3}$.

所以$c^2=a^2-b^2=8,c=2\sqrt{2}$

所以椭圆G的离心率是$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅱ）法1：

因为以BC为直径的圆经过点A，所以$AB\perp AC$，

由斜率公式和$A(0,2),B(3,1)$可得$k_{AB}=-\dfrac{1}{3}$，

所以$k_{Ac}=3$，

设直线AC的方程为$y=3x+2$.

由$\begin{cases}y=3x+2,\\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$得$7x^2+9x=0$，

由题设条件可得$x_A=0,x_C=-\dfrac{9}{7}$，

所以$C(-\dfrac{9}{7},-\dfrac{13}{7})$.

所以直线BC的方程为$y=\dfrac{2}{3}x-1$.

法2：因为以BC为直径的圆经过点A，所以$AB\perp AC$，

由斜率公式和$A(0,2),B(3,1)$可得$k_{AB}=-\dfrac{1}{3}$，

所以$k_{Ac}=3$，

设$C(x_C，y_C)$，则$k_{Ac}=\dfrac{y_C-2}{x_C}=3$，即$y_C=3x_C+2$　　①

由点C在椭圆上可得$\dfrac{{x_C}^2}{12}+\dfrac{{y_C}^2}{4}=1$　　②

将①代入②得　$7{x_C}^2+9x_C=0$，

因为点C不同于点A，　所以$x_C=-\dfrac{9}{7}$　，

所以$C(-\dfrac{9}{7},-\dfrac{13}{7})$

所以直线BC的方程为$y=\dfrac{2}{3}x-1$.

法3：当直线l过点B且斜率不存在时，可得点$C(3,-1)$，不满足条件.

设直线BC的方程为$y-1=k(x-3)$，点$C(x_C，y_C)$

由 $\begin{cases} y=kx+1-3k, \\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 可得 $(3k^2+1)x^2+6k(1-3k)x+3(1-3k)^2-12=0$，

显然 $\Delta>0$，此方程两个根是点 B 和点 C 的横坐标，

所以 $3x_C=\dfrac{3(1-3k)^2-12}{3k^2+1}$，即 $x_C=\dfrac{(1-3k)^2-4}{3k^2+1}$，

所以 $y_C=\dfrac{-3k^2-6k+1}{3k^2+1}$，

因为以 BC 为直径的圆经过点 A，

所以 $AB\perp AC$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

（此处用 $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$ 亦可）

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3,-1)\cdot(\dfrac{9k^2-6k-3}{3k^2+1},\dfrac{-9k^2-6k-1}{3k^2+1})=\dfrac{36k^2-12k-8}{3k^2+1}=0$，

即 $(3k-2)(3k+1)=0$，

$k_1=\dfrac{2}{3},k_2=-\dfrac{1}{3}$，

当 $k_2=-\dfrac{1}{3}$ 时，即直线 AB，与已知点 C 不同于点 A 矛盾，

所以 $k_1=k_{BC}=\dfrac{2}{3}$，

所以直线 BC 的方程为 $y=\dfrac{2}{3}x-1$.

19. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\ln x-\dfrac{a}{x}-1$ 得

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x+a}{x^2}(x>0)$

由已知曲线 $y=f(x)$ 存在斜率为 -1 的切线，

所以 $f'(x)=-1$ 存在大于零的实数根，

即 $x^2+x+a=0$ 存在大于零的实数根，

因为 $y=x^2+x+a$ 在 $x>0$ 时单调递增，

所以实数 a 的取值范围 $(-\infty,0)$.

（Ⅱ）由 $f'(x)=\dfrac{x+a}{x^2}$，$x>0$，$a\in\mathbf{R}$ 可得

当 $a\geq 0$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$；

当 $a<0$ 时，若 $x\in(-a,+\infty)$， $f'(x)>0$，若 $x\in(0,-a)$， $f'(x)<0$，

所以此时函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-a,+\infty)$，减区间为 $(0,-a)$．

（III）由 $g(x)=\dfrac{x+a}{\ln x}$ 及题设得 $g'(x)=\dfrac{\ln x-\dfrac{a}{x}-1}{(\ln x)^2}=\dfrac{f(x)}{(\ln x)^2}$，

由 $-1<a<0$ 可得 $0<-a<1$，由(II)可知函数 $f(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 上递增，

所以 $f(1)=-a-1<0$，

取 $x=\mathrm{e}$，显然 $\mathrm{e}>1$，

$f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}-\dfrac{a}{\mathrm{e}}-1=-\dfrac{a}{e}>0$，

所以存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$ 满足 $f(x_0)=0$，即

存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$ 满足 $g'(x_0)=0$，

所以 $g(x),g'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(1,x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	极小	↗

所以当 $-1<a<0$ 时，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在极小值．

（本题所取的特殊值不唯一，注意到 $\dfrac{-a}{x}>0(x>1)$），因此只需要 $\ln x_0\geq 1$ 即可）

20. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a_n=2n+1$ 可得 $\{a_n\}$ 为递增数列，

所以 $b_n=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=a_n-a_1=2n+1-3=2n-2$，

故 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\dfrac{2n-2}{2}\times n=n(n-1)$．

（Ⅱ）因为 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}(n=1,2,3,\cdots)$，

$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geq\min\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}(n=1,2,3,\cdots)$，

所以 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}\geq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

所以 $b_{n-1}\geq b_n(n=1,2,3,\cdots)$．

又因为 $b_1=a_1-a_1=0$，

所以 $\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}-\min\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}=b_n-b_1=b_n$，

所以 $\{b_n\}$ 的“收缩数列”仍是 $\{b_n\}$．

（III）由 $S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{n(n-1)}{2}b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ 可得

当 $n=1$ 时，$a_1=a_1$；

当 $n=2$ 时，$2a_1+a_2=3a_1+b_2$，即 $b_2=a_2-a_1$，所以 $a_2\ge a_1$；

当 $n=3$ 时，$3a_1+2a_2+a_3=6a_1+3b_3$，即 $3b_3=2(a_2-a_1)+(a_3-a_1)$（*），

若 $a_1\le a_3<a_2$，则 $b_3=a_2-a_1$，所以由（*）可得 $a_3=a_2$，与 $a_3<a_2$ 矛盾；

若 $a_3<a_1\le a_2$，则 $b_3=a_2-a_3$，所以由（*）可得 $a_3-a_2=3(a_1-a_3)$，

所以 a_3-a_2 与 a_1-a_3 同号，这与 $a_3<a_1\le a_2$ 矛盾；

若 $a_3\ge a_2$，则 $b_3=a_3-a_1$，由（*）可得 $a_3=a_2$.

猜想：满足 $S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{n(n-1)}{2}b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{a_n\}$ 是：

$$a_n=\begin{cases}a_1, n=1,\\ a_2, n>1,\end{cases} a_2\ge a_1.$$

经验证，左式 $=S_1+S_2+\cdots+S_n=na_1+[1+2+\cdots+(n-1)]a_2=na_1+\frac{n(n-1)}{2}a_2$，

右式 $=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{n(n-1)}{2}b_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1+\frac{n(n-1)}{2}(a_2-a_1)=na_1+\frac{n(n-1)}{2}a_2$.

下面证明其它数列都不满足（III）的题设条件.

法 1：由上述 $n\le 3$ 时的情况可知，$n\le 3$ 时，$a_n=\begin{cases}a_1, n=1,\\ a_2, n>1,\end{cases} a_2\ge a_1$ 是成立的.

假设 a_k 是首次不符合 $a_n=\begin{cases}a_1, n=1,\\ a_2, n>1,\end{cases} a_2\ge a_1$ 的项，则 $a_1\le a_2=a_3=\cdots=a_{k-1}\ne a_k$，

由题设条件可得 $\frac{k^2-k-2}{2}a_2+a_k=\frac{k(k-1)}{2}a_1+\frac{k(k-1)}{2}b_k$（*），

若 $a_1\le a_k<a_2$，则由（*）式化简可得 $a_k=a_2$ 与 $a_k<a_2$ 矛盾；

若 $a_k<a_1\le a_2$，则 $b_k=a_2-a_k$，所以由（*）可得 $a_k-a_2=\frac{k(k-1)}{2}(a_1-a_k)$

所以 a_k-a_2 与 a_1-a_k 同号，这与 $a_k<a_1\le a_2$ 矛盾；

所以 $a_k\ge a_2$，则 $b_k=a_k-a_1$，所以由（*）化简可得 $a_k=a_2$.

这与假设 $a_k\ne a_2$ 矛盾.

所以不存在数列不满足 $a_n=\begin{cases}a_1,n=1,\\ a_2,n>1,\end{cases}a_2\ge a_1$ 的 $\{a_n\}$ 符合题设条件.

法 2：当 $i\le n$ 时，$a_i-a_1\le\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}-\min\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}=b_i$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{k}(a_i-a_1)\le b_1+b_2+\cdots+b_k$，$(k=1,2,3,\cdots,n)$

即 $S_k\le ka_1+(b_1+b_2+\cdots+b_k)$，$(k=1,2,3,\cdots,n)$

由 $b_{n-1}\ge b_n(n=1,2,3,\cdots)$ 可得 $b_k\le b_n(k=1,2,3,\cdots,n)$

又 $b_1=0$，所以可得 $S_k\le ka_1+(k-1)b_n\ (k=1,2,3,\cdots)$，

所以 $S_1+S_2+\cdots+S_n\le(a_1+2a_1+\cdots+na_1)+[0\times b_n+b_n+2b_n+\cdots+(n-1)b_n]$，

即 $S_1+S_2+\cdots+S_n\le\dfrac{(n+1)n}{2}a_1+\dfrac{(n-1)n}{2}b_n$

所以 $S_1+S_2+\cdots+S_n\le\dfrac{(n+1)n}{2}a_1+\dfrac{(n-1)n}{2}b_n$ 等号成立的条件是

$a_i-a_1=b_i=b_n(i=1,2,3,\cdots,n)$，

所以，所有满足该条件的数列 $\{a_n\}$ 为 $a_n=\begin{cases}a_1,n=1,\\ a_2,n>1,\end{cases}a_2\ge a_1$.