

## 2019 北京十一学校高二（上）期中

## 数 学

2019.10

考试时间：120 分钟

满分：100 分

命题人：张厂丽

一、 选择题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1. 下列叙述中，错误的一项为（ ）

- A. 棱柱的面中，至少有两个面相互平行  
 B. 棱柱的各个侧面都是平行四边形  
 C. 棱柱的两底面是全等的多边形  
 D. 棱柱中两个互相平行的平面一定是棱柱的底面

2. 下列函数中，在定义域内为奇函数，且在  $(0, +\infty)$  上为减函数的是（ ）

- A.  $f(x) = \log_2 x$                       B.  $f(x) = 2 - x^2$                       C.  $f(x) = 3^{-x}$                       D.  $f(x) = -\frac{x^2}{4}$

3. 圆锥的高缩小为原来的  $\frac{1}{3}$ ，底面半径扩大为原来的 2 倍，则它的体积是原来体积的（ ）

- A.  $\frac{2}{3}$                                       B.  $\frac{3}{2}$                                       C.  $\frac{4}{3}$                                       D.  $\frac{3}{4}$

4. 设  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面， $m$  是直线且  $m \subset \alpha$ ，“ $m \parallel \beta$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
 C. 充分必要条件                              D. 既不充分也不必要条件

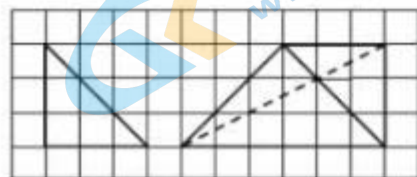
5. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左右焦点分别是  $F_1, F_2$ ，过  $F_1$  作倾斜角为  $30^\circ$  的直线交双曲线的右支于  $M$ ，若  $MF_2$  垂直于  $x$  轴，则双曲线的离心率为（ ）

- A.  $\sqrt{6}$                                       B.  $\sqrt{3}$                                       C. 2                                      D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，若  $A = 60^\circ$ ， $b = 10$ ，则结合  $a$  的值解三角形有两解的为（ ）

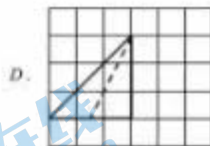
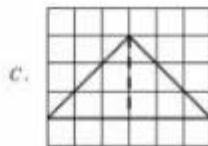
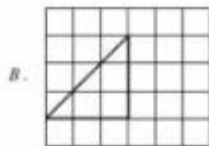
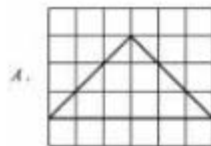
- A.  $a = 8$                                       B.  $a = 9$                                       C.  $a = 10$                                       D.  $a = 11$

7. 如图，网格纸的各小格都是正方形，粗线画出的是一个三棱锥的侧视图和俯视图，则该三棱锥的正视图可能是（ ）



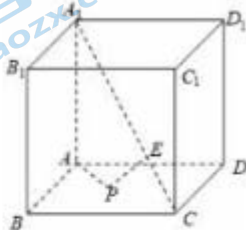
侧视图

俯视图



8. 如图, 正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $P$  为底面  $ABCD$  上的动点,  $PE \perp A_1C$  于  $E$ , 且  $PA=PE$ , 则点  $P$  的轨迹是 ( )

- A. 线段  
B. 圆弧  
C. 椭圆的一部分  
D. 抛物线的一部分



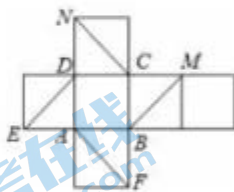
二、填空题 (共 7 小题, 其中, 第 9-14 题, 每小题 3 分, 共 18 分; 第 15 题, 每空 2 分, 共 4 分)

9. 圆  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$  上的点到直线  $3x + 4y + 8 = 0$  的最大距离是\_\_\_\_\_。

10. 若将函数  $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$  的图像向左平移  $\phi$  个单位, 所得图像关于  $y$  轴对称, 则  $\phi$  的最小正值是\_\_\_\_\_。

11. 如图是正方形的平面展开图, 在这个正方体中, ①  $BM$  与  $ED$  平行; ②  $CN$  与  $BE$  是异面直线; ③  $CN$  与  $BM$  成  $60^\circ$  角; ④  $DM$  与  $BN$  垂直。

以上四个命题中, 正确命题的序号是\_\_\_\_\_。

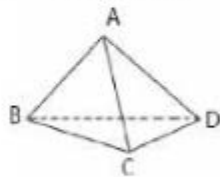


12. 已知点  $P$  是抛物线  $y^2 = 2x$  上的一个动点, 则点  $P$  到点  $(0, 2)$  的距离与点  $P$  到该抛物线准线的距离之和的最小值为\_\_\_\_\_。

13. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $BC=CC_1=1$ ,  $\angle AD_1B = \frac{\pi}{3}$ , 则直线  $AB_1$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为\_\_\_\_\_。

14. 已知函数  $f(x) = ax^2 - 1$  的图象在点  $(1, f(1))$  处的切线与直线  $x + 8y = 0$  垂直, 若数列  $\{\frac{1}{f(n)}\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则  $S_n =$ \_\_\_\_\_。

15. 如图, 四面体  $ABCD$  的一条棱长为  $x$ , 其余棱长均为 1, 记四面体  $ABCD$  的体积为  $F(x)$ , 则函数  $F(x)$  的单调增区间是\_\_\_\_\_; 最大值为\_\_\_\_\_。



三、解答题 (共 5 小题, 共 54 分, 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。)

16. (8 分) 已知函数  $f(x) = \sin^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cdot \sin(\omega x + \frac{\pi}{2}) - 1$  ( $\omega > 0$ ) 的相邻两条对称轴之间的距离为  $\frac{\pi}{2}$

- (1) 求  $\omega$  的值;  
(2) 当  $x \in [-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$  时, 求函数  $f(x)$  的值域。

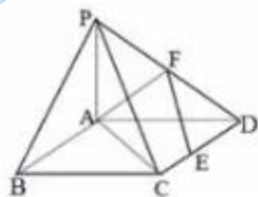
17. (8 分) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 满足  $a_1 = b_1 = 2$ ,  $2a_2 = b_2$ ,  $S_2 + T_2 = 13$

- (1) 求数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  通项公式;  
(2) 设  $c_n = a_n + b_n$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $H_n$

18. (10分) 如图, 在四棱锥P-ABCD, 底面ABCD是正方形, PA⊥底面ABCD, 且PA=AD, 点F是棱PD的中点, 点E为CD的中点.

(1) 证明: EF//平面PAC;

(2) 证明: AF⊥PC



19. (14分) 已知椭圆C:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点F( $\sqrt{3}$ , 0) 点M( $-\sqrt{3}, \frac{1}{2}$ ) 在椭圆C上.

(1) 求椭圆C的标准方程;

(2) 直线l过点F, 且与椭圆C交于A, B两点, 过原点O作直线l的垂线, 垂足为P, 如果 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{\lambda|AB|+4}{2|OP|}$  ( $\lambda$ 为实数), 求 $\lambda$ 的值.

20. (14分) 已知函数  $f(x) = a(x-2\ln x) - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ .

(1) 讨论f(x)的单调性;

(2) 若f(x)有两个不同的零点, 求a的取值范围.