2023年普通高等学校招生全国统一考试压轴卷(T8联盟)

数学试题(一)

命题学校:华师一附中

试卷满分:150分　　　　考试用时:120分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 纯洁的冰雪,激情的约会,2030年冬奥会预计在印度孟买举行.按常理,该次冬奥会共有7个大项,如冰球、冰壶、滑冰、滑雪、雪车等;一个大项又包含多个小项,如滑冰又分为花样滑冰、短道速滑、速度滑冰三个小项.若集合U代表所有项目的集合,一个大项看作是几个小项组成的集合,其中集合A为滑冰三个小项构成的集合,下列说法不正确的是

A."短道速滑"不属于集合A相对于全集U的补集

B."雪车"与"滑雪"交集为空集

C."速度滑冰"与"冰壶"交集不为空集

D.集合U包含"滑冰"

2. 若复数z满足$z(1+i)^2=1-i$,则$\bar{z}$的虚部为

A. $-\frac{1}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}i$　　D. $\frac{1}{2}$

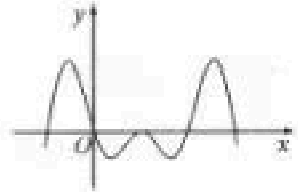
3. 已知函数$f(x)=|\sin \pi x|$,$g(x)=\sin \frac{\pi}{2}x$,若函数$\varphi(x)=f(x)$,$x\in\{x|f(x)\neq g(x)\}$,则$\varphi(x)$的最小正周期为

A. π　　B. 2　　C. 4　　D. 4π

4. 设F_1,A分别是椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$的左焦点和右顶点,点$P$为椭圆上异于$A$点的任意一点,则使得$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0$成立的点$P$的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知函数$f(x)$的部分图象如图所示,则$f(x)$的解析式可能为



A. $f(x)=-x\cos \pi x$　　B. $f(x)=(x-1)\sin \pi x$

C. $f(x)=x\cos[\pi(x+1)]$　　D. $f(x)=(x-1)\cos \pi x$

6. 已知正数a,b,c满足$2\,022^a=2\,023$,$2\,023^b=2\,022$,$c=\ln 2$,下列说法正确的是

A. $\log_a c>\log_b c$　　B. $\log_c a>\log_c b$　　C. $a^c<b^c$　　D. $c^a<c^b$

7. 已知抛物线$C_1:y=x^2+2x$和$C_2:y=-x^2+a$,若C_1和C_2有且仅有两条公切线l_1和l_2,l_1和C_1、C_2分别相切于M,N点,l_2与C_1、C_2分别相切于P,Q两点,则线段PQ与MN

A. 总是互相垂直　　B. 总是互相平分

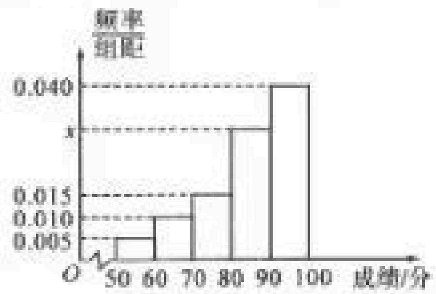
C. 总是互相垂直且平分　　D. 上述说法均不正确

8. 在平面四边形$ABCD$中,$AB\perp AC$,且$AB=AC$,$AD=\sqrt{2}CD=2\sqrt{2}$,则BD的最大值为

A. $2\sqrt{7}$　　B. 6　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{3}$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 某校组织全体学生参加了"喜迎二十大,结合中华传统文化与楚文化的创新突破"的剧本创作大赛,随机抽取了400名学生进行成绩统计,发现抽取的学生的成绩都在50分至100分之间,进行适当分组后(每组的取值区间均为左闭右开),画出频率分布直方图(如图),下列说法正确的是



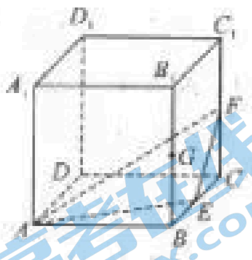
A. 在被抽取的学生中,成绩在区间[90,100)内的学生有160人

B. 图中 x 的值为 0.020

C. 估计全校学生成绩的平均分约为 83

D. 估计全校学生成绩的 80% 分位数为 95

10. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E,F,G 分别为棱 BC,CC_1,BB_1 的中点，则下列结论正确的是



A. 直线 EF 到平面 A_1ADD_1 的距离为 2

B. 直线 AE 与直线 C_1G 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

C. 点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离之比为 $1:2$

D. 平面 AEF 截正方体所得截面面积为 $\dfrac{9}{2}$

11. 已知实数 a,b，则下面说法正确的是

A. 若 $a>b$，则 $a^2|a|>b^2|b|$

B. 若 a,b 均大于 0 且 $b\ln a=a\ln b$，则 $a>b$

C. 若 $a>0,b>0,a+b=2$，则 $\dfrac{1}{a^2+1}+\dfrac{1}{b^2+1}$ 最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

D. 若 $a^2+b^2=1$，则 ab 的取值范围为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

12. 已知集合 $A=\{x|x=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{x|x=2^n,n\in\mathbf{N}^*\}$，集合 $C=A\cup B$，将集合 C 中所有元素从小到大依次排列为一个数列 $\{a_n\}$，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则

A. $S_8=39$

B. $a_{n+2}-a_{n+1}=1$ 或 2

C. $S_{2^{n-1}+n}=2^{2n-2}+2^{n+1}-2$

D. 若存在 $n\in\mathbf{N}^*$ 使 $S_n>12a_{n+1}$，则 n 的最小值为 26

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中的常数项为________.

14. 若函数 $y=f(x)$ 的图象上存在不同的两点，使函数图象在这两点处的切线斜率之积小于 0 且斜率之和等于常数 e，则称该函数为"e 函数"，下列四个函数中，其中为"e 函数"的是________.

①$y=\dfrac{\ln x}{x}$；②$y=\begin{cases}-x,x\leqslant 0\\(e+1+x)x,x>0\end{cases}$；③$y=x^2+2x$；④$y=\left|\dfrac{1}{x}\right|$

15. 已知有 L,M,S 三种尺寸的检测样品盒，其中每个 L 盒至多放置 10 支完全相同的样品，且 L 盒至少比 M 盒多 2 支样品，M 盒至少比 S 盒多 2 只样品，则不同的放置方法共有________种.（注：L,M,S 不可为空盒）

16. 已知直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A,B 两点（与坐标原点 O 均不重合），且 $OA\perp OB$，抛物线的焦点为 F，记 $\triangle AOB$、$\triangle AOF$、$\triangle BOF$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3，若满足 $S_1=6S_2+3S_3$，则直线 l 的方程为________________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对边分别为 a,b,c，若满足 $a(\sin 2A-\cos B\cos C)+b\sin A\sin C=0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=2$，求$\triangle ABC$ 面积的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，满足 $2S_n=n(n+a_1-1)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

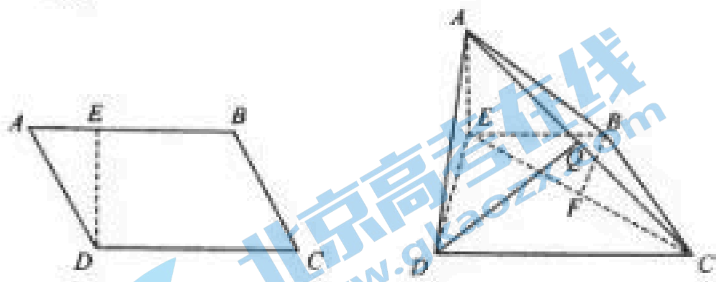
(2)令 $b_n=a_n\cdot 2^{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=3\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，过 D 点作 $DE\perp AB$ 于 E，以 DE 为轴，将△ADE 向上翻折使平面 $ADE\perp$ 平面 $BCDE$，连接 CE，F 点为线段 CE 的中点，Q 为线段 AC 上一点.

(1)证明：$BF\perp AC$；

(2)若二面角 A-DQ-E 的余弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$，求$\frac{CQ}{CA}$的值.



20.（本小题满分 12 分）

长江十年禁渔计划全面施行，渔民老张积极配合政府工作，如期收到政府的补偿款. 他决定拿出其中 10 万元进行投资，并看中了两种为期 60 天（视作 2 个月）的稳健型（不会亏损）理财方案.

方案一：年化率 2.4%，且有 10%的可能只收回本金；

方案二：年化率 3.0%，且有 20%的可能只收回本金；

已知老张对每期的投资本金固定（都为 10 万元），且第一次投资时选择了方案一，在每期结束后，老张不间断地进行下一期投资，并且他有 40%的可能选择另一种理财方案进行投资.

(1)设第 i 次投资（$i=1,2,3,\cdots,n$）选择方案一的概率为 P_i，求 P_4；

(2)求一年后老张可获得总利润的期望（精确到 1 元）.

[注：若拿 1 千元进行 5 个月年化率为 2.4%的投资，则该次投资获利 $\omega=2.4\%\times\frac{5}{12}\times 1\,000=10$ 元]

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，四点 $P_1(-2,1)$，$P_2(0,\sqrt{2})$，$P_3(2,1)$，$P_4(3,1)$中恰有三点在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)椭圆 C 上是否存在异于 P_2 的两点 M，N 使得直线 P_2M 与 P_2N 的斜率之和与直线 MN 的斜率（不为零）的 2 倍互为相反数？若存在，请判断直线 MN 是否过定点；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=2x-\sin x-\sqrt{a}\ln x$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论函数 $f(x)$的极值点个数；

(2)若存在 x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$，使 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$x_1x_2<a$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试压轴卷(T8 联盟)

数学试题(一)
参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	B	D	B	B	AD	ACD	ACD	ABC

1.【答案】C

【解析】选项 A，∵集合 A 为滑冰三个小项构成的集合，其中包含了短道速滑，∴短道速滑属于集合 A，不属于集合 A 相对于全集 U 的补集，故 A 正确；

选项 B，∵“雪车”与“滑雪”是不同的大项，∴交集为空集，故 B 正确；

选项 C，∵冰壶、滑冰是为不同大项，交集为空集，速度滑冰又是滑冰的小项，∴速度滑冰与冰壶交集为空集，故 C 错误；

选项 D，∵全集 U 包含冬奥会的所有项目，

∴全集 U 包含滑冰，故 D 正确. 故选 C.

2.【答案】D

【解析】∵$z(1+i)^2=1-i$，∴$z=\frac{1-i}{(1+i)^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，∴$\bar{z}$的虚部为$\frac{1}{2}$，故选 D.

3.【答案】C

【解析】由题可知，$f(x)=|\sin \pi x|$的最小正周期为 1，$g(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$的最小正周期为 4，∵$\varphi(x)=f(x)$，$x\in\{x|f(x)\neq g(x)\}$，∴$\varphi(x)$的最小正周期为 4. 故选 C.

4.【答案】B

【解析】∵$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PA}=0$，∴$P$ 在以 F_1A 为直径的圆上，该圆与椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$有三个公共点，又 P 点与 A 点不重合，故符合条件的点 P 的个数有 2 个，故选 B.

5.【答案】B

【解析】由图象可知 $f(0)=0$，∴排除 D 选项；又图象不关于原点对称，∴$f(x)$不是奇函数，$f(x)=x\cos[\pi(x+1)]=-x\cos \pi x$，是奇函数，∴排除 A、C 选项，故选 B.

6.【答案】D

【解析】∵$2\ 022^a=2\ 023$，$2\ 023^b=2\ 022$，$c=\ln 2$，

∴$a=\log_{2\ 022}2\ 023>1$，

$b=\log_{2\ 023}2\ 022$，$0<b<1$，$0<c<1$；

∴$\log_a c<0$，$\log_b c>0$，∴$\log_a c<\log_b c$，故 A 错误；

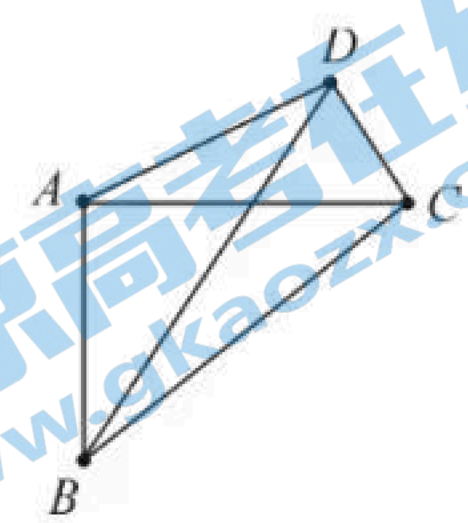
∵$0<c<1$，$a>b$，∴$\log_c a<\log_c b$，$a^c>b^c$，$c^a<c^b$，

故 BC 错误，D 正确，故选 D.

7.【答案】B

【解析】∵抛物线$C_1:y=x^2+2x$ 和$C_2:y=-x^2+a$ 分别是 $y=x^2$ 经过平移、对称变换而得到，∴它们是全等的，具有中心对称性，∵l_1 和 l_2 是它们的公切线，l_1 和C_1、C_2 分别相切于 M，N 两点，l_2 和C_1、C_2 分别相切于 P，Q 两点，∴M，N 和 P，Q 都关于对称中心对称，线段 PQ 与 MN 互相平分，故选 B.

8.【答案】B



【解析】由题意可知：$AB=AC$，$AD=2\sqrt{2}$，$CD=2$，

设 $\angle ADC=\theta$，在 $\triangle ADC$ 中，$\frac{AC}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin\angle DAC}$，

$AC\sin\angle DAC=CD\sin\theta=2\sin\theta$，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\theta=12-8\sqrt{2}\cos\theta$.

在$\triangle ADB$ 中，

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB$

$=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle DAC\right)$

$=12-8\sqrt{2}\cos\theta+8+4\sqrt{2}AC\sin\angle DAC$

$=20-8\sqrt{2}\cos\theta+8\sqrt{2}\sin\theta$

$=20+16\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 36$，

∴BD 的最大值为 6，故选 B.

9.【答案】AD

【解析】由所给频率分布直方图可知，抽取的学生成绩在区间$[90,100)$内的频率为 $0.040\times 10=$

0.4，∴成绩在区间[90，100)内的学生有 $0.4\times400=160$ 人，故 A 正确；

由 $(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times10=1$，得 $x=0.030$，故 B 错误；

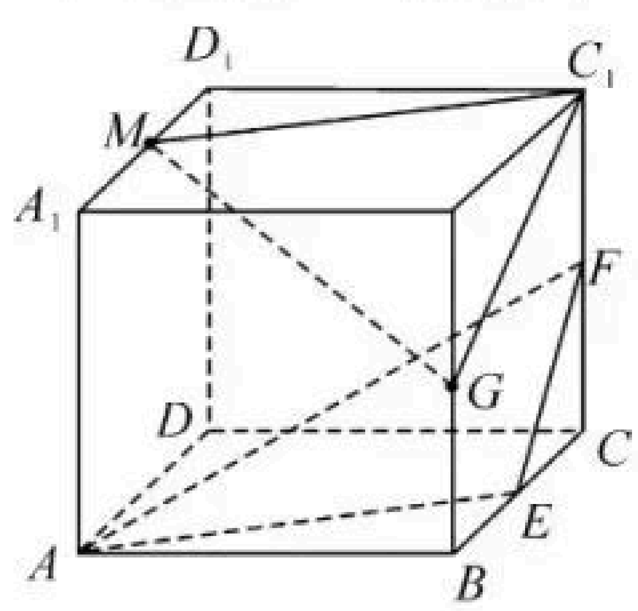
抽取的学生的平均分为 $0.05\times55+0.10\times65+0.15\times75+0.30\times85+0.40\times95=84$，估计全校的平均分为 84，故 C 错误；

设抽取学生成绩 80% 分位数为 m，则 $\frac{m-90}{100-90}=\frac{0.8-0.6}{0.4}$，解得 $m=95$，估计全校学生成绩的 80% 分位数为 95，故 D 正确. 故选 AD.

10.【答案】ACD

【解析】∵平面 A_1ADD_1 // 平面 B_1BCC_1，$EF\subset$ 平面 B_1BCC_1，∴直线 EF 到平面 A_1ADD_1 的距离为 2，故 A 正确；

如图，取 A_1D_1 的中点 M，连接 MC_1，易证 MC_1 // AE，∴$\angle MC_1G$ 是直线 AE 与直线 C_1G 的夹角，



∵$MC_1=C_1G=\sqrt5$，$MG=\sqrt6$，

∴$\cos\angle MC_1G=\frac{MC_1{}^2+C_1G^2-MG^2}{2MC_1\cdot C_1G}=\frac{2}{5}$，

故 B 错误；

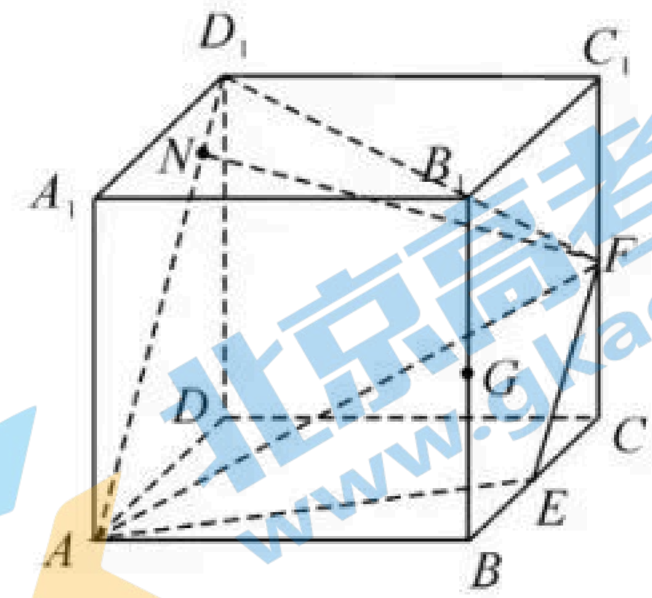
记点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离分别为 d_1、d_2，

∵$V_{C\text{-}AEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot d_1=V_{A\text{-}CEF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\times1}{2}\cdot2=\frac{1}{3}$，

$V_{G\text{-}AEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle AEF}\cdot d_2=V_{A\text{-}GEF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\times1}{2}\cdot2=\frac{2}{3}$，∴$d_1:d_2=1:2$，即点 C 与点 G 到平面 AEF 的距离之比为 $1:2$，故 C 正确；

连接 FD_1、AD_1，易证 AD_1 // EF，A、D_1、F、E 四点共面，∴平面 AEF 截正方体所得截面为梯形 AD_1FE，如图作 $FN\perp AD_1$，垂足为 N，

∵$FD_1=AE=\sqrt5$，$EF=\sqrt2$，$AD_1=2\sqrt2$，



∴$FN=\sqrt{(\sqrt5)^2-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt2}{2}$，

$S_{梯形AD_1FE}=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt2+2\sqrt2)\cdot\frac{3\sqrt2}{2}=\frac{9}{2}$，

故 D 正确. 故选 ACD.

11.【答案】ACD

【解析】对于选项 A，若 $a>b\geqslant0$，则 $a^3|a|=a^4>b^4=b^3|b|$，若 $a\geqslant0>b$，则 $a^3|a|\geqslant0>b^3|b|$，若 $0>a>b$，则 $a^3|a|=-a^4>-b^4=b^3|b|$，∴若 $a>b$，都有 $a^3|a|>b^3|b|$，故 A 正确；

对于选项 B，当 $a=b>0$，$b\ln a=a\ln b$ 显然成立，故 B 错误；

对于选项 C，∵$a+b=2$，$a^2+b^2=4-2ab$，

∴$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}=\frac{4-2(ab-1)}{(ab-1)^2+4}$，

令 $t=ab-1(t\leqslant0)$，则 $\frac{4-2(ab-1)}{(ab-1)^2+4}=\frac{4-2t}{t^2+4}$，

令 $4-2t=m$，则 $t=\frac{4-m}{2}$，$\frac{4-2t}{t^2+4}=\frac{4m}{m^2-8m+32}$

$=\frac{4}{m+\frac{32}{m}-8}\leqslant\frac{4}{8\sqrt2-8}=\frac{\sqrt2+1}{2}$，

∴$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}$ 最大值为 $\frac{\sqrt2+1}{2}$，故 C 正确；

对于选项 D，∵$a^2+b^2=1$，∴$2|ab|\leqslant1$，$-\frac{1}{2}\leqslant ab\leqslant\frac{1}{2}$，则 ab 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，故 D 正确. 故选 ACD.

12.【答案】ABC

【解析】对于选项 A，由题意 $\{a_n\}$ 的前 8 项为 1，2，3，4，5，7，8，9，$S_8=39$，故 A 正确；

对于选项 B，集合 A 为奇数集，集合 B 中的元素都是偶数，按照从小到大排列，若连续的两个数是奇数，则 $a_{n+2}-a_{n+1}=2$，若连续的两个数是一个奇数，一个偶数，则 $a_{n+2}-a_{n+1}=1$，故 B 正确；

对于选项 C，令 $k=2^{n-1}+n$，∵$2\times2^{n-1}-1$ 比 2^n

小1,∴$\{a_n\}$的前k项中,来自集合A的有2^{n-1}个,来自集合B的有n个,∴$S_k=1+3+\cdots+(2\times2^{n-1}-1)+2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2^{n-1}(1+2\times2^{n-1}-1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{2n-2}+2^{n+1}-2$,即$S_{2^{n-1}+n}=2^{2n-2}+2^{n+1}-2$,故C正确;

对于选项D,$\{a_n\}$的前26项包括A集合的1,3,5,…,41共21个,B集合的2,4,8,16,32共5个,∴$S_{26}=1+3+\cdots+41+2+4+\cdots+32=\frac{21\times(1+41)}{2}+\frac{2(1-2^5)}{1-2}=503$,

∵$a_{27}=43$,$12a_{27}=516$,$S_{26}<12a_{27}$,不符合条件,故D错误.故选ABC.

13.【答案】28

【解析】$\left(x-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$的通项公式为

$T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=(-1)^r C_8^r x^{8-\frac{4r}{3}}$,

当$8-\frac{4r}{3}=0$时,解得$r=6$,

∴展开式中的常数项为$(-1)^6C_8^6=28$.

14.【答案】①③④

【解析】记$g(x)=f'(x)$,$k_1=g(x_1)<0$,$k_2=g(x_2)>0$.

①$y=\frac{\ln x}{x}$,$g(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,$g'(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$,

当$x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$时,$g'(x)<0$,当$x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$,∴$x=e^{\frac{3}{2}}$,$g(x)$有最小值$-\frac{1}{2e^3}$,

$g(x)$值域为$\left(-\frac{1}{2e^3},+\infty\right)$,

∴存在x_1、x_2使$k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$,

故$y=\frac{\ln x}{x}$是e函数;

②$y=\begin{cases}-x,x\leqslant0,\\(e+1+x)x,x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-1,x\leqslant0,\\e+1+2x,x>0.\end{cases}$

∵$k_1=g(x_1)<0$,$k_2=g(x_2)>0$,

∴$k_1=-1$,$k_2=e+1+2x_2(x_2>0)$,

∴$k_1+k_2=e+2x_2>e$,不存在x_1、x_2使$k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$,

故$y=\begin{cases}-x,x\leqslant0,\\(e+1+x)x,x>0\end{cases}$不是e函数;

③$y=x^2+2x$,$g(x)=2x+2$,$g(x)$值域为$\mathbf{R}$,

∴存在x_1、x_2使$k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$,故$y=x^2+2x$是e函数;

④$y=\left|\frac{1}{x}\right|$,$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2},x<0,\\-\frac{1}{x^2},x>0,\end{cases}$

$g(x)$值域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

∴存在x_1、x_2使$k_1+k_2=g(x_1)+g(x_2)=e$,故$y=\left|\frac{1}{x}\right|$是e函数.

15.【答案】56

【解析】当L盒放置10支样品,且M盒放置8支样品时,S盒可放置6、5、4、3、2、1支样品,共6种不同的放置方法;当L盒放置10支样品,且M盒放置7支样品时,S盒可放置5、4、3、2、1支样品,共5种不同的放置方法;……当L盒放置10支样品,且M盒放置3支样品时,S盒可放置1支样品,只1种放置方法.

∴L盒放置10支样品,共有放置方法:6+5+4+3+2+1=21种,

同理L盒放置9支样品,共有放置方法:5+4+3+2+1=15种,

L盒放置8支样品,共有放置方法:4+3+2+1=10种,

L盒放置7支样品,共有放置方法:3+2+1=6种,

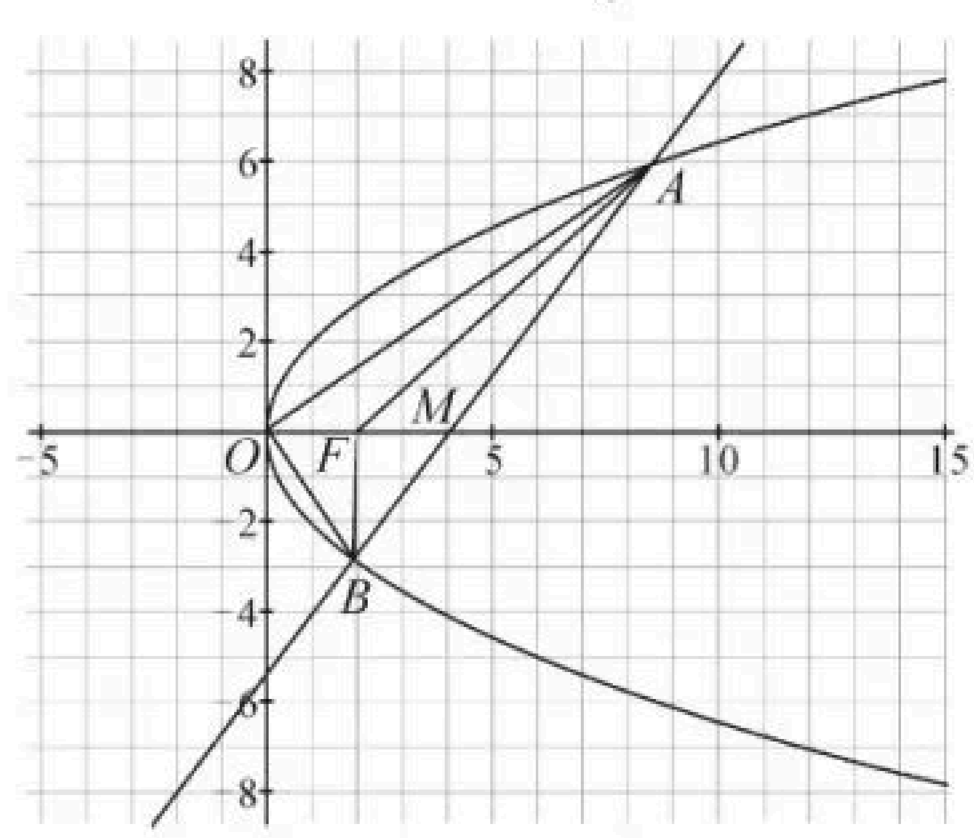
L盒放置6支样品,共有放置方法:2+1=3种,

L盒放置5支样品,共有放置方法:1种,

∴不同的放置方法总数为21+15+10+6+3+1=56种.

16.【答案】$\sqrt{2}x+y-4\sqrt{2}=0$或$\sqrt{2}x-y-4\sqrt{2}=0$

【解析】由已知可设直线OA方程为$y=kx$,又$OA\perp OB$,OB方程为$y=-\frac{1}{k}x$,



由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx\end{cases}$解得$A\left(\frac{4}{k^2},\frac{4}{k}\right)$，

由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=-\frac{1}{k}x\end{cases}$解得$B(4k^2,-4k)$，

$k_{AB}=\dfrac{-4k-\frac{4}{k}}{4k^2-\frac{4}{k^2}}=\dfrac{k}{1-k^2}$，

$AB:y+4k=\dfrac{k}{1-k^2}(x-4k^2)$，

令 $y=0$，得 $x=4$，∴直线 l 与 x 轴交点 $M(4,0)$，

$S_1=S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle MOB}$

$=\frac{1}{2}\times4\times\left|\frac{4}{k}+4k\right|=\dfrac{8(k^2+1)}{|k|}$，

$S_2=S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}\times1\times\left|\frac{4}{k}\right|=\dfrac{2}{|k|}$，

$S_3=S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}\times1\times|-4k|=2|k|$.

∵$S_1=6S_2+3S_3$，

∴$\dfrac{8(k^2+1)}{|k|}=\dfrac{12}{|k|}+6|k|$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$，

∴直线 l 的方程 $y=\pm\sqrt{2}(x-4)$，

即$\sqrt{2}x\pm y-4\sqrt{2}=0$.

17. 解：(1)由正弦定理知，$\sin A(\sin 2A-\cos B\cos C)+\sin B\sin A\sin C=0$，显然 $\sin A\neq0$，

故 $\sin 2A-\cos B\cos C+\sin B\sin C=0$，

化简得 $\sin 2A=\cos B\cos C-\sin B\sin C=\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)$，

∵$A\in(0,\pi)$，∴$2A+A-\frac{\pi}{2}=\pi$(其中 $2A=A-\frac{\pi}{2}$舍去)，即 $A=\frac{\pi}{2}$. …………………………… 5 分

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{2}$，则 $b^2+c^2=a^2=4$，

那么△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\leqslant\frac{b^2+c^2}{4}=1$(当且仅当 $b=c=\sqrt{2}$时等号成立)，

则△ABC 面积的取值范围为$(0,1]$. …… 10 分

18. 解：(1)当 $n=1$ 时，$2a_1=1+a_1-1$，故 $a_1=0$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=(n-1)(n-1+a_1-1)$，作差得，$2a_n=n(n-1)-(n-1)(n-2)$，即 $a_n=n-1$，此式对 $n=1$ 也成立，故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………… 5 分

(2)由(1)知，$b_n=(n-1)\cdot2^{n-1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$，不妨令 $c_n=(n-1)\cdot2^{n-1}$，且数列$\{c_n\}$的前 n 项和 W_n，

则 $W_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}$，

$2W_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n$，

作差，得$-W_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-(n-1)\cdot2^n$，

即 $W_n=(n-2)\cdot2^n+2$. ……………………… 9 分

则 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=W_n+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=W_n+1-\dfrac{1}{n+1}$

$=(n-2)\cdot2^n+3-\dfrac{1}{n+1}$，

即数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 为$(n-2)\cdot2^n+3-\dfrac{1}{n+1}$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)证明：∵面 $ADE\perp$面 $BCDE$，面 $ADE\cap$面 $BCDE=DE$，且 $AE\perp DE$，

∴$AE\perp$面 $BCDE$，又 $BF\subset$面 $BCDE$，∴$AE\perp BF$，

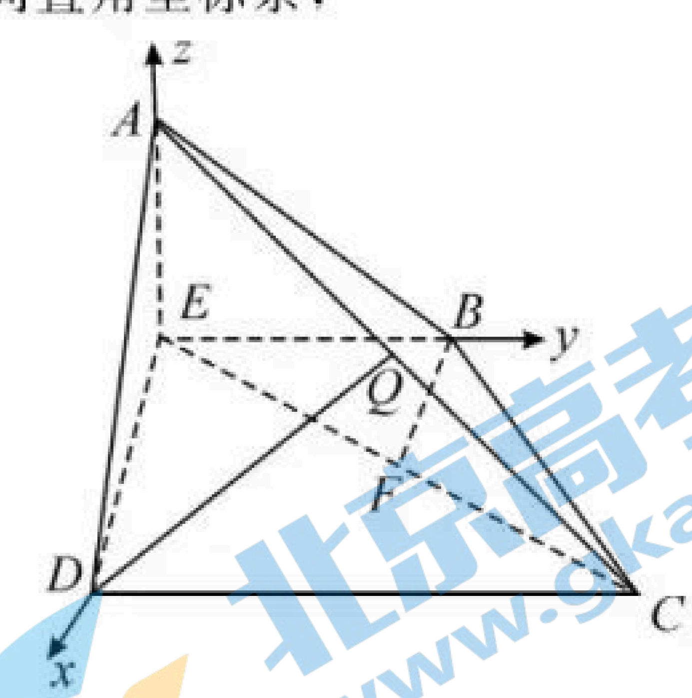
又在 Rt△AED 中，$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，

则 $BE=2\sqrt{2}=BC$，又 F 为 CE 中点，

故 $BF\perp EC$，且 $AE\cap EC=E$，则 $BF\perp$面 AEC，

又 $AC\subset$面 AEC，所以 $BF\perp AC$. ………… 6 分

(2)由(1)知，ED,EB,EA 互相垂直，分别以 ED,EB,EA 为 x,y,z 轴非负半轴建立如图所示的空间直角坐标系，



其中 $E(0,0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$D(\sqrt{6},0,0)$，$C(\sqrt{6},3\sqrt{2},0)$，则$\overrightarrow{ED}=(\sqrt{6},0,0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,3\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{6},0,\sqrt{2})$，

不妨设$\overrightarrow{CQ}=\lambda\overrightarrow{CA}$，则$\overrightarrow{DQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{6}\lambda,3\sqrt{2}(1-\lambda),\sqrt{2}\lambda)$，

再设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$分别是面 ADQ、面 EDQ 的法向量，

则分别满足$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$与$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，$y_2=\lambda$，得到 $\boldsymbol{m}=(1,0,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{n}=(0,\lambda,3(\lambda-1))$.

由题意知，$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3\sqrt{3}(1-\lambda)}{2\sqrt{\lambda^2+9(\lambda-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$，即$\dfrac{CQ}{CA}=\dfrac{1}{3}$. ………… 12 分

20. 解：(1)由题意知，$P_{i+1}=(1-40\%)P_i+40\%(1-P_i)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}P_i$，

整理得，$P_{i+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}\left(P_i-\frac{1}{2}\right)$，其中 $P_1=1$，

故数列$\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$是以 $P_1-\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{5}$ 为公比的等比数列，则 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

即 $P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

那么 $P_4=\frac{63}{125}$. ………………………………… 6 分

(2)当某期选择方案一时，获利期望值为 $W_1=(1-10\%)\times2.4\%\times\frac{2}{12}\times100\ 000=360$ 元；

当某期选择方案二时，获利期望值为 $W_2=(1-20\%)\times3.0\%\times\frac{2}{12}\times100\ 000=400$ 元；

那么，在一年间，老张共投资了 6 次，获得的总利润的期望为 $W=[P_1W_1+(1-P_1)W_2]+[P_2W_1+(1-P_2)W_2]+\cdots+[P_6W_1+(1-P_6)W_2]$

$=(P_1+P_2+\cdots+P_6)W_1+[(1-P_1)+(1-P_2)+\cdots+(1-P_6)]W_2$

$\approx2\ 400-40\times\left(3+\frac{5}{8}\right)=2\ 255$ 元，

即一年后老张可获得的利润的期望约为 2 255 元.

……………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由椭圆的对称性知，$P_1(-2,1)$，$P_2(0,\sqrt{2})$，$P_3(2,1)$三点在椭圆 C 上，故 $b^2=2$，$a^2=8$，

从而椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……… 4 分

(2)直线 MN 过定点$(0,-2\sqrt{2})$，证明如下：

假设存在，不妨设直线 P_2M、P_2N、MN 的斜率分别为 k_1,k_2,k，满足 $k_1+k_2+2k=0$，

设直线 MN 的方程为 $y=kx+m\ (k\neq0)$，

且 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

与椭圆 C 的方程联立，得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-2)=0$，

则 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-2)>0$，

即 $m^2<8k^2+2\ (*)$，

且$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4(m^2-2)}{1+4k^2},\end{cases}$

那么 $k_1+k_2+2k=\frac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}+\frac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}+2k=0$，

化简得，$4kx_1x_2+(m-\sqrt{2})(x_1+x_2)=0$，

整理得，$m^2+\sqrt{2}m-4=0$，

即 $m=-2\sqrt{2}$ 或 $m=\sqrt{2}$（舍去），

故直线 MN 过定点$(0,-2\sqrt{2})$. ……… 12 分

22. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=2x-\sin x-\ln x$，

则 $f'(x)=2-\cos x-\frac{1}{x}$，

当 $x\geq1$ 时，$f'(x)\geq1-\cos x\geq0$，

故 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，不存在极值点；

当 $0<x<1$ 时，$f''(x)=\sin x+\frac{1}{x^2}>0$ 总成立，

故函数 $f'(x)$在$(0,1)$上单调递增，

且 $f'(1)=1-\cos1>0$，$f'\left(\frac{1}{4}\right)=-\cos\frac{1}{4}-2<0$，故在$\left(\frac{1}{4},1\right)$上存在唯一极值点，

综上，当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点有且仅有一个. ………………………………………… 5 分

(2)由 $f(x_1)=f(x_2)$ 知 $2x_1-\sin x_1-\sqrt{a}\ln x_1=2x_2-\sin x_2-\sqrt{a}\ln x_2$，

整理得，$2(x_1-x_2)-(\sin x_1-\sin x_2)=\sqrt{a}(\ln x_1-\ln x_2)\ (*)$，

不妨令 $g(x)=x-\sin x\ (x>0)$，

则 $g'(x)=1-\cos x\geq0$，

故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当 $0<x_1<x_2$ 时，有 $g(x_1)<g(x_2)$，

即 $x_1-\sin x_1<x_2-\sin x_2$，

那么 $\sin x_1-\sin x_2>x_1-x_2$， ………… 8 分

因此，$(*)$即转化为$\sqrt{a}>\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}$，

接下来证明$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\sqrt{x_1x_2}\ (0<x_1<x_2)$，

等价于证明 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}-\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$，

不妨令$\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}=t\ (0<t<1)$，

建构新函数 $\varphi(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$，

$\varphi'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，

则 $\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递减，

$\varphi(t)>\varphi(1)=0$，故 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}-\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$得证.

由不等式的传递性知 $\sqrt{x_1x_2}<\sqrt{a}$，即 $x_1x_2<a$.

……………………………………………… 12 分

多维细目表

题型	题号	考查知识板块	考查知识方法	分值	难易度		
					简单	中等	较难
选择题	1	集合	会集合的实际应用	5	√		
	2	复数	会复数的计算	5	√		
	3	三角函数	会求函数的周期	5	√		
	4	椭圆	会椭圆与向量的综合应用	5	√		
	5	函数	会根据函数图象推测解析式	5	√		
	6	指数函数与对数函数	会利用指数函数和对数函数的性质比较大小	5		√	
	7	抛物线	会利用抛物线切线的性质求解线段关系	5		√	
	8	立体几何	会用三角函数求解线段最值	5			√
	9	频率分布直方图	会根据频率分布直方图求解相关数据	5	√		
	10	立体几何	会立体几何的综合应用	5	√		
	11	不等式	会不等式的综合应用	5		√	
	12	数列	数列的综合性问题	5			√
填空题	13	二项式定理	会求展开项系数	5	√		
	14	新定义问题	新定义结合函数性质	5	√		
	15	排列组合	会排列组合的综合应用	5		√	
	16	抛物线	会结合抛物线的性质求解直线的方程	5			√
解答题	17	解三角形	会利用三角函数变换求解角度和面积取值范围	10	√		
	18	数列	会求数列通项、裂项求和	12		√	
	19	立体几何	会证明线线位置关系和求线段比值	12		√	
	20	概率统计	会利用概率知识选择合适的投资方案	12		√	
	21	椭圆	会求椭圆方程以及直线过定点问题	12			√
	22	导数	用导数解决极值点问题以及不等式证明	12			√