密云区 2019-2020 学年第二学期高三第一次阶段性测试

数学试卷参考答案及评分标准

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	A	D	B	D	D	C	C

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．-10　　12．$(0,\pm\sqrt{2})$；$y=\pm x$　　13．16；21

14．π；$[-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\pi],k\in\mathbf{Z}$　　15. $(-\infty,3)$．

备注：若小题有两问，第一问 3 分，第二问 2 分．

三、解答题：共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

在 ΔABC 中，$0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$．

若选择①和②

方法一

将 $a=\sqrt{7}$，$b=2$ 代入 $b^2+c^2-a^2=bc$ 化简得 $c^2-2c-3=0$．

所以 $c=-1$（舍），或 $c=3$．

因此 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times2\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

方法二

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sin B}$，因此 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．

在 ΔABC 中，因为 $a>b$，所以 $A>B$．

因此 B 为锐角，所以 $\cos B=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$．

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$．

因此 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

若选择①和③

由 $\sin C=2\sin B$ 得

$2R\sin C=2\times 2R\sin B$（$R$ 为 ΔABC 外接圆的半径），

所以 $c=2b$.

将 $a=\sqrt{7}$，$c=2b$ 代入 $b^2+c^2-a^2=bc$ 解得 $b=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

所以 $c=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{6}$.

若选择②和③

由 $\sin C=2\sin B$ 得

$2R\sin C=2\times 2R\sin B$（$R$ 为 ΔABC 外接圆的半径），

所以 $c=2b$.

因为 $b=2$，所以 $c=4$.

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

（Ⅱ）解：因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $B+C=\frac{2\pi}{3}$.

所以 $\cos B+\cos C=\cos B+\cos(\frac{2\pi}{3}-B)$

$$=\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\cos B+\sin\frac{2\pi}{3}\sin B$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B=\sin(B+\frac{\pi}{6}).$$

因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{5\pi}{6}$.

所以当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos B+\cos C$ 有最大值 1.

17. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：记"选取的这份试卷的调查结果是膳食合理状况类中习惯良好者"为事件 A.

有效问卷共有 380+550+330+410+400+430=2500（份），

受访者中膳食合理习惯良好的人数是 $400\times 0.65=260$ 人，

所以，$P(A)=\frac{260}{2500}$=0.104 .

（Ⅱ）解：记事件 A 为"该区卫生习惯良好者"，

事件 B 为"该区体育锻炼状况习惯良好者"，

事件 C 为“该区膳食合理习惯良好者”，

由题意，估计可知 $P(A)$=0.6，$P(B)$=0.8，$P(C)$=0.65，

设事件 E 为“该居民在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯中，至少具备 2 个良好习惯”.

由题意知，

$E=(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)\cup(ABC)$

所以事件 E 的概率

$P(E)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)+P(ABC)$

$=P(A)P(B)P(\overline{C})+P(A)P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$

$=0.6\times0.8\times0.35+0.6\times0.2\times0.65+0.4\times0.8\times0.65+0.6\times0.8\times0.65$

$=0.168+0.078+0.208+0.312$

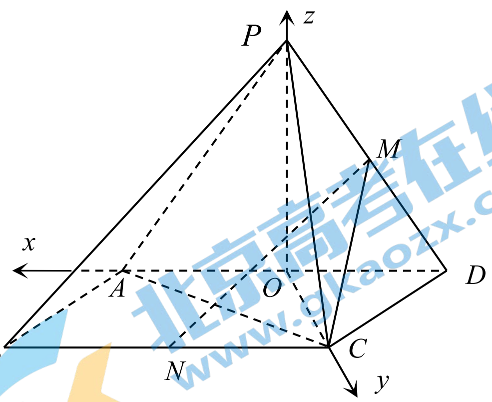
$=0.766$

所以该居民在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯中，至少具备 2 个良好习惯的概率为 0.766.

（III）解：$D\xi_6=D\xi_1>D\xi_5>D\xi_4>D\xi_3>D\xi_2$.

18.（本小题满分 15 分）

（Ⅰ）解：取 AD 中点为 O，连接 OP，OC 和 AC.



因为 ΔPAD 为等边三角形，

所以 $PO\perp OD$.

因为平面 PAD ⊥平面 $ABCD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $OC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp OC$.

在菱形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle ADC=60^\circ$，

所以 ΔADC 为正三角形，因此 $OC\perp AD$.

以 O 为原点建立空间直角坐标系，如图所示.

则 $O(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(2,\sqrt{3},0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，

$P(0,0,\sqrt{3})$，$M(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$N(1,\sqrt{3},0)$.

所以 $\overrightarrow{CM}=(-\frac{1}{2},-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{3})$.

设平面 PAB 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,\ y,\ z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ -x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-1,1)$.

设直线 CM 与平面 PAB 所成角为 θ ，

则有 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{CM},\boldsymbol{m}>|=\dfrac{|\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{CM}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

所以直线 CM 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

（Ⅱ）解：因为 $OC\perp AD,OC\perp PO$ ，所以 $OC\perp$ 平面 PAD.

所以 $\overrightarrow{OC}=(0,\sqrt{3},0)$ 是平面 PAD 的法向量，

则有 $\cos<\boldsymbol{m},\overrightarrow{OC}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{OC}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ，

因为二面角 $B-AP-D$ 的平面角为钝角，

所以二面角 $B-AP-D$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

（Ⅲ）解：结论 MN //平面 PAB .

因为 $\overrightarrow{MN}=(\dfrac{3}{2},\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ ，

所以 $\overrightarrow{MN}\bullet\boldsymbol{m}=\dfrac{3}{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times(-1)+(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\times1=0$.

因此 $\overrightarrow{MN}\perp\boldsymbol{m}$.

又因为直线 $MN\not\subset$ 平面 PAB ，

所以 MN //平面 PAB .

19.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：因为 $f(x)=\mathrm{e}^x\left(ax+1\right)$， $x\in\mathbf{R}$，

所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x\left(ax+a+1\right)$， $x\in\mathbf{R}$.

$k=f'(0)=a+1$ ，

又因为 $f(0)=1$，

所以切线方程为 $y=(a+1)x+1$.

（Ⅱ）解：因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x\left(ax+a+1\right)$， $x\in\mathbf{R}$， $a\in\mathbf{R}$ ，

（1）当 $a=0$ 时

因为 $f'(x)=e^x>0, x\in\mathbf{R}$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,+\infty)$，无单调减区间.

（2）当 $a\neq 0$ 时

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1-\dfrac{1}{a}$.

① 当 $a>0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下：

x	$(-\infty, -1-\frac{1}{a})$	$-1-\frac{1}{a}$	$(-1-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↘		↗

所以 $f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -1-\dfrac{1}{a})$，单调增区间是 $(-1-\dfrac{1}{a},+\infty)$.

②当 $a<0$ 时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的变化情况如下：

x	$(-\infty, -1-\frac{1}{a})$	$-1-\frac{1}{a}$	$(-1-\frac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	↗		↘

所以 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -1-\dfrac{1}{a})$，单调减区间是 $(-1-\dfrac{1}{a},+\infty)$.

综上所述，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,+\infty)$，无单调减区间；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调减区间是 $(-\infty, -1-\dfrac{1}{a})$，单调增区间是 $(-1-\dfrac{1}{a},+\infty)$；当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty, -1-\dfrac{1}{a})$，单调减区间是 $(-1-\dfrac{1}{a},+\infty)$.

（III）解：方法一

因为 $f(x)=e^x(ax+1), x\in\mathbf{R}$，

所以令 $f(x)=0$，得 $ax+1=0$.

（1）当 $a=0$ 时，方程无解，

此时函数 $f(x)$ 无零点；

（2）当 $a\neq 0$ 时，解得 $x=-\dfrac{1}{a}$，

此时函数 $f(x)$ 有唯一的一个零点.

综上所述，当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 无零点；当 $a\neq 0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点.

方法二

（1）当 $a=0$ 时

因为 $f(x)=e^x>0$，

所以函数 $f(x)$ 无零点；

（2）当 $a>0$ 时

因为 $-1-\dfrac{1}{a}<0$，$f(0)=1>0$，$f(x)$ 在区间 $(-1-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1-\frac{1}{a},+\infty)$ 内有且仅有唯一的零点；

若 $x\in(-\infty,-1-\frac{1}{a})$，则 $ax+1<a(-1-\frac{1}{a})+1=-a<0$，

又因为 $e^x>0$，所以 $f(x)=e^x(ax+1)<0$.

即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ -1-\frac{1}{a})$ 内没有零点.

故当 $a>0$ 时，$f(x)$ 有且仅有唯一的零点.

（3）当 $a<0$ 时

因为 $f(-1-\frac{1}{a})=e^{-1-\frac{1}{a}}(-a)>0$，$f(1-\frac{1}{a})=ae^{1-\frac{1}{a}}<0$，

并且 $f(x)$ 在区间 $(-1-\frac{1}{a},+\infty)$ 单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $(-1-\frac{1}{a},+\infty)$ 内有且仅有唯一的零点；

若 $x\in(-\infty,-1-\frac{1}{a})$，则 $ax+1>a(-1-\frac{1}{a})+1=-a>0$，

又因为 $e^x>0$，所以 $f(x)=e^x(ax+1)>0$.

即函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ -1-\frac{1}{a})$ 内没有零点.

故当 $a<0$ 时，$f(x)$ 有且仅有唯一的零点.

综上所述：当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 无零点；当 $a\neq0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点.

21.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：根据题意得 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3}.\end{cases}$

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）解：方法一 点 M 在以 OD 为直径的圆上.

设点 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0\neq0$，$y_0\neq\pm1$，

并且 $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，$Q(0,y_0)$，$M(\frac{x_0}{2},y_0)$.

因此 $k_{AM}=\frac{y_0-1}{\frac{x_0}{2}}=\frac{2(y_0-1)}{x_0}$.

所以直线 AM 的方程为 $y=\frac{2(y_0-1)}{x_0}x+1$.

令 $y=-1$，解得 $x=\dfrac{x_0}{1-y_0}$.

所以 $N(\dfrac{x_0}{1-y_0},-1)$， $D(\dfrac{x_0}{2(1-y_0)},-1)$.

所以 $\overrightarrow{MD}=(\dfrac{x_0}{2(1-y_0)}-\dfrac{x_0}{2},-1-y_0)=(\dfrac{x_0y_0}{2(1-y_0)},-1-y_0)$.

因为 $\overrightarrow{MO}=(-\dfrac{x_0}{2},-y_0)$，

所以 $\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{MO}=\dfrac{x_0y_0}{2(1-y_0)}\times(-\dfrac{x_0}{2})+y_0(1+y_0)$

$=-\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}\times\dfrac{y_0}{(1-y_0)}+y_0(1+y_0)$.

因为 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，所以 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}=1-y_0^{\ 2}$.

所以 $\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{MO}=-(1-y_0^{\ 2})\times\dfrac{y_0}{1-y_0}+y_0(1+y_0)=0$.

因此 $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{MO}$.

所以点 M 在以 OD 为直径的圆上.

方法二 点 M 在以 OD 为直径的圆上.

设点 $P(x_0,y_0)$，

则 $\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，并且 $Q(0,y_0)$， $M(\dfrac{x_0}{2},y_0)$.

因此 $k_{AM}=\dfrac{y_0-1}{\dfrac{x_0}{2}}=\dfrac{2(y_0-1)}{x_0}$.

所以直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{2(y_0-1)}{x_0}x+1$.

令 $y=-1$，解得 $x=\dfrac{x_0}{1-y_0}$.

所以 $N(\dfrac{x_0}{1-y_0},-1)$， $D(\dfrac{x_0}{2(1-y_0)},-1)$.

设 E 为线段 OD 的中点，则 $E(\frac{x_0}{4(1-y_0)},-\frac{1}{2})$.

所以 $ME^2=(\frac{x_0}{4(1-y_0)}-\frac{x_0}{2})^2+(y_0+\frac{1}{2})^2=\frac{x_0^{\ 2}(2y_0-1)^2}{16(1-y_0)^2}+(y_0+\frac{1}{2})^2$.

设以 OD 为直径的圆的半径为 r ，

则 $r^2=OE^2=\frac{x_0^{\ 2}}{16(1-y_0)^2}+\frac{1}{4}$.

所以 $r^2-ME^2=\frac{x_0^{\ 2}}{16(1-y_0)^2}-\frac{x_0^{\ 2}(2y_0-1)^2}{16(1-y_0)^2}+\frac{1}{4}-(y_0+\frac{1}{2})^2$

$=\frac{x_0^{\ 2}}{4}\times\frac{(y_0-y_0^{\ 2})}{(1-y_0)^2}+\frac{1}{4}-(y_0+\frac{1}{2})^2$

因为 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}+y_0^{\ 2}=1$，所以 $\frac{x_0^{\ 2}}{4}=1-y_0^{\ 2}$.

所以 $r^2-ME^2=(1-y_0^{\ 2})\times\frac{(y_0-y_0^{\ 2})}{(1-y_0)^2}+\frac{1}{4}-(y_0+\frac{1}{2})^2=0$.

因此 $r=|ME|$.

所以点 M 在以 OD 为直径的圆上.

22.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）解：由题意，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=5n-5$ ，

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=9n-9$.

得， $c_{i,j}=(5i-5)+(9j-9)=5i+9j-14$ ，则 $c_{2,6}=50$ ， $c_{396,6}=2020$.

得， $d_{i,j}=(5i-5)-[9(j+1)-9]=5i-9j-5$ ，则 $d_{2,6}=-49$.

（Ⅱ）证明：已知 $a=6$ ， $b=7$ ，得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=6n-6$ ，

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=7n-7$.

所以， $c_{i,j}=6(i-1)+7(j-1)=6i+7j-13$ ， $i\in\mathbf{N}^*,j\in\mathbf{N}^*$.

所以， $d_{i,j}=(6i-6)-[7(j+1)-7]=6i-7j-6$ ， $1\leqslant i\leqslant 7,i\in\mathbf{N}^*,j\in\mathbf{N}^*$.

所以，若 $t\in M$ ，则存在 $u\in\mathbf{N},v\in\mathbf{N}$ ，使 $t=6u+7v$.

若 $t\in M^*$ ，则存在 $u\in\mathbf{N},u\leqslant 6,v\in\mathbf{N}^*$ ，使 $t=6u-7v$.

因此，对于整数 t ，考虑集合 $M_0=\{x\,|\,x=t-6u,u\in\mathbf{N},u\leqslant 6\}$ ，

即 $\{t$ ， $t-6$ ， $t-12$ ， $t-18$ ， $t-24$ ， $t-30$ ， $t-36\}$.

下面证明：集合 M_0 中至少有一元素是 7 的倍数.

反证法：假设集合 M_0 中任何一个元素，都不是 7 的倍数，

则集合 M_0 中每一元素关于 7 的余数可以为 1，2，3，4，5，6.

又因为集合 M_0 中共有 7 个元素，

所以集合 M_0 中至少存在两个元素关于 7 的余数相同，

不妨设为 $t-6u_1, t-6u_2$，其中 $u_1,u_2\in\mathbf{N}, u_1<u_2\leqslant 6$.

则这两个元素的差为 7 的倍数，即 $t-6u_2-(t-6u_1)=6(u_1-u_2)$.

所以 $u_1-u_2=0$，与 $u_1<u_2$ 矛盾.

所以假设不成立，即原命题成立.

即集合 M_0 中至少有一元素是 7 的倍数，不妨设该元素为 $t-6u_0, u_0\in\mathbf{N}, u_0\leqslant 6$.

则存在 $s\in\mathbf{Z}$，使 $t-6u_0=7s, u_0\in\mathbf{N}, u_0\leqslant 6$，即 $t=6u_0+7s, u_0\in\mathbf{N}, u_0\leqslant 6, s\in\mathbf{Z}$.

由已证可知，若 $t\in M$，则存在 $u\in\mathbf{N}, v\in\mathbf{N}$，使 $t=6u+7v$.

而 $t\notin M$，所以 s 为负整数，设 $v=-s$，则 $v\in\mathbf{N}^*$，且 $t=6u_0-7v, u_0\in\mathbf{N}, u_0\leqslant 6, v\in\mathbf{N}^*$.

所以，当 $a=6$，$b=7$ 时，对于整数 t，若 $t\notin M$，则 $t\in M^*$ 成立.

（III）解：下面用反证法证明：若对于整数 t，$t\in M^*$，则 $t\notin M$.

假设命题不成立，即 $t\in M^*$，且 $t\in M$.

则对于整数 t，存在 $n\in\mathbf{N}, m\in\mathbf{N}$，$u\in\mathbf{N}, u\leqslant 6, v\in\mathbf{N}^*$，使 $t=6u-7v=6n+7m$ 成立.

整理，得 $6(u-n)=7(m+v)$.

又因为 $m\in\mathbf{N}$，$v\in\mathbf{N}^*$，所以 $u-n=\frac{7}{6}(m+v)>0$ 且 $u-n$ 是 7 的倍数.

因为 $u\in\mathbf{N}, u\leqslant 6$，所以 $u-n\leqslant 6$，所以矛盾，即假设不成立.

所以，对于整数 t，若 $t\in M^*$，则 $t\notin M$.

又由第二问，对于整数 t，$t\notin M$，则 $t\in M^*$.

所以 t 的最大值，就是集合 M^* 中元素的最大值.

又因为 $t=6u-7v, u\in\mathbf{N}, v\in\mathbf{N}^*, u\leqslant 6$，

所以 $t_{\max}=(M^*)_{\max}=6\times 6-7\times 1=29$.