2024 北京十一学校高一（上）期末

数　　学

（2024.1）

考试时间：120 分钟　满分：150 分

一、选择题（共 12 道小题，每题 5 分，共 60 分），请将答案填写到答题卡规定的位置

1. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$，则此幂函数的解析式为(　　)

A. $f(x)=x^{-2}$　　B. $f(x)=x^{2}$　　C. $f(x)=2^{x}$　　D. $f(x)=2^{-x}$

2. 已知点 $P\left(\cos\frac{\pi}{3},-1\right)$ 是角 α 终边上一点，则 $\sin\alpha=$（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的值域为（　）

A. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　D. $(0,2]$

4. 已知 $a=4^{0.5}$，$b=\log_{0.5}4$，$c=0.5^4$，那么 a，b，c 的大小关系为

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

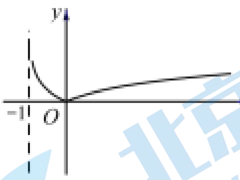
5. 若 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，则 $\tan\alpha=$（　）

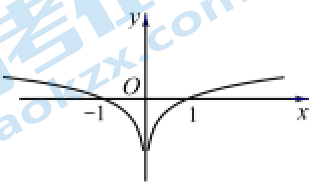
A. $\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{4}{3}$

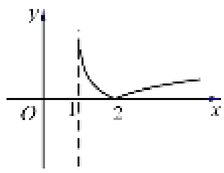
6. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$（$n\geq 2$），且 $a_1=9$，$a_8=-5$，则当 $\{a_n\}$ 的前 n 项和取到最大值，n 的值为（　）

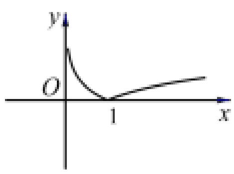
A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

7. 函数 $y=|\lg(x-1)|$ 的图象是（　）

A.


B.


C.


D.


8. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，公比 $q=\frac{2}{3}$，记其前 n 项的和为 S_n，则对于 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_n<m$ 都成立的最小整数 m 等于（　）

A. 6　　B. 3　　C. 4　　D. 2

9. 已知扇形的圆心角为 8rad，其面积是 4 cm^2，则该扇形的弧长是（　）

A. 10cm　　B. 8cm

C. $8\sqrt{2}$ cm　　D. $4\sqrt{2}$ cm

10. 已知无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d \neq 0$，则“$d>0$”是“存在无限项 a_n 满足 $a_n>2023$”（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

11. 函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-ax+3\right)$ 在 $[1,2]$ 上恒为正数，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $2\sqrt{2}<a<2\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}<a<\frac{7}{2}$

C. $3<a<\frac{7}{2}$　　D. $3<a<2\sqrt{3}$

12. 形如 $2^{2^n}+1$(n 是非负整数)的数称为费马数，记为 F_n.数学家费马根据 F_0,F_1,F_2,F_3，F_4 都是质数提出了猜想:费马数都是质数.多年之后，数学家欧拉计算出 F_5 不是质数，那 F_5 的位数是（　）

(参考数据: $lg2 \approx 0.3010$)

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

二、填空题（共 6 个小题，每题 5 分，共 30 分），请将答案填写到答题卡规定的位置

13. 计算：$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+\lg 5^2+\lg 40=$____________.

14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7=19$，$a_2+a_8=26$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和为____________.

15. 在各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 a_2，a_5 的等差中项为 a_4+2，则 $a_6=$____________.

16. 在平面直角坐标系中，动点 M 在单位圆上按逆时针方向做匀速圆周运动，每 12 分钟转动一周.若点 M 的初始位置坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则运动到 3 分钟时，动点 M 所处位置的坐标是____________.

17. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax, x\le 1\\ \log_3 x, x>1\end{cases}$，若函数 $y=f(x)-2$ 有且仅有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是____________.

18. 已知数列 $\{a_n\}(n\le 9)$ 各项均为正整数，对任意的 $k\in N^*(2\le k\le 8)$，$a_k=a_{k-1}+1$ 和 $a_k=a_{k+1}-1$ 中有且仅有一个成立，且 $a_1=6$，$a_9=14$．记 $S_9=a_1+a_2+\cdots+a_9$．给出下列四个结论：

①$\{a_n\}$ 可能为等差数列；

②$\{a_n\}$ 中最大的项为 a_9；

③ S_9 不存在最大值；

④ S_9 的最小值为 36.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题（五个大题，一共 60 分），请将答案填写到答题卡规定的位置

19. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n = n^2$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

20. 已知函数 $f(x)=\lg(1-x)-\lg(1+x)$.

（1）求函数的 $f(x)$ 定义域；

（2）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并用定义证明你的结论；

（3）若函数 $f(x)<0$，求实数 x 的取值范围.

21. （1）P 是角 α 的终边上一点，已知点 P 的坐标为 $\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，求 $\tan\alpha$ 和 $\dfrac{3\sin(\pi-\alpha)+5\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\cos(-\alpha)}-\tan(\pi+\alpha)$ 的值；

（2）若 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 是方程 $4x^2+2mx+m=0$ 的两根，求 m 的值.

22. 已知首项为 0 的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_2，a_3，a_4+1 成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $b_n=\begin{cases} a_n+1, & n\text{为奇数} \\ 2^{a_n}, & n\text{为偶数} \end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n}.

23. 若在定义域内存在实数 x_0，使得 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$ 成立，则称函数有“飘移点” x_0.

（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是否有“飘移点”？请说明理由；

（2）证明函数 $f(x)=x^2+2^x$ 在 $(0,1)$ 上有“飘移点”；

（3）若函数 $f(x)=\lg\left(\dfrac{a}{x^2+1}\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有“飘移点”，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 12 道小题，每题 5 分，共 60 分），请将答案填写到答题卡规定的位置

1.【答案】A

【分析】由幂函数 $y=f\left(x\right)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$，得到 $2^{\alpha}=\dfrac{1}{4}$，求出 $\alpha=-2$，由此能求出此幂函数的解析式.

【详解】$\because$ 幂函数 $y=f\left(x\right)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$，

$\therefore 2^{\alpha}=\dfrac{1}{4}$，

解得 $\alpha=-2$，

$\therefore$ 此幂函数的解析式为 $f\left(x\right)=x^{-2}$.

故选 A.

【点睛】本题考查幂函数的解析式的求法，考查幂函数的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2.【答案】D

【分析】根据题意，结合三角函数的定义，即可求解.

【详解】由点 $P(\cos\dfrac{\pi}{3},-1)$ 是角 α 终边上一点，即点 $P(\dfrac{1}{2},-1)$，

可得 $|OP|=\sqrt{(\dfrac{1}{2})^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{-1}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选：D.

3.【答案】A

【分析】

利用二次函数的性质求出 $2x-x^2$ 的范围，再根据指数函数的单调性即可求出函数值域.

【详解】$\because 2x-x^2=-\left(x-1\right)^2+1\le 1$，

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-x^2}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}=\dfrac{1}{2}$，

故 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-x^2}$ 的值域为 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

故选：A.

【点睛】本题考查指数型函数值域的求法，属于基础题.

4.【答案】A

【分析】容易看出 $4^{0.5}>1$，$\log_{0.5}4<0$，$0<0.5^4<1$，从而可得出 a，b，c 的大小关系．

【详解】$\because 4^{0.5}>4^0=1$，$\log_{0.5}4<\log_{0.5}1=0$，$0<0.5^4<0.5^0=1$；

$\therefore b<c<a$．

故选 A．

【点睛】本题考查指数函数、对数函数的单调性，以及指对函数的值域问题，属于基础题．

5.【答案】B

【分析】

根据同角三角函数基本关系，由题中条件先求正弦，进而可求出正切

【详解】因为 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$，

因此 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}$.

故选：B.

6.【答案】A

【分析】根据题意可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，进而求公差和通项公式，利用 a_n 的符号性判断前 n 项和的最值.

【详解】因为 $a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$（$n\ge 2$），可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设公差为 d，

则 $a_8=a_1+7d=9+7d=-5$，解得 $d=-2$，

可得 $a_n=9-2(n-1)=11-2n$，

令 $a_n=11-2n>0$，解得 $n<\dfrac{11}{2}$，

可知 $n\le 5$ 时，$a_n>0$；$n\ge 6$ 时，$a_n<0$；

所以当 $n=5$ 时，$\{a_n\}$ 的前 n 项和取到最大值.

故选：A.

7.【答案】C

【分析】将函数 $y=\lg x$ 的图象进行变换可得出函数 $y=|\lg(x-1)|$ 的图象，由此可得出合适的选项.

【详解】将函数 $y=\lg x$ 的图象先向右平移1个单位长度，可得到函数 $y=\lg(x-1)$ 的图象，

再将所得函数图象位于 x 轴下方的图象关于 x 轴翻折，位于 x 轴上方图象不变，可得到函数 $y=|\lg(x-1)|$ 的图象.

故合乎条件的图象为选项 C 中的图象.

故选：C.

【点睛】结论点睛：两种常见的图象翻折变换：

$f(x) \xrightarrow{\text{保留}x\text{轴上方，将}x\text{轴下方的图象沿}x\text{轴对称}} |f(x)|$，

$f(x) \xrightarrow{\text{保留}y\text{轴右方图像，将}y\text{轴右方图象沿着}y\text{轴对称}} f(|x|)$.

8. 【答案】A

【分析】由题可得 $S_n = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$，即可得答案.

【详解】由题，$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$，则 $S_n < 6 \le m$.

故选：A

9. 【答案】B

【分析】根据扇形的弧长公式和面积公式，准确计算，即可求解.

【详解】设扇形所在圆的半径为 r，

因为扇形的圆心角为 8rad，其面积是 4cm^2，可得 $\frac{1}{2}\times 8\times r^2 = 4$，解得 $r=1$，

又由扇形的弧长公式，可得 $l = 8\cdot r = 8\text{cm}$.

故选：B.

10. 【答案】C

【分析】根据题意，结合等差数列 $\{a_n\}$ 的单调性，结合充分条件、必要条件的判定方法，即可求解.

【详解】由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d>0$，则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，

所以存在无限项 a_n 满足 $a_n > 2023$ 成立，即充分性成立；

反之：由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d \ne 0$，在数列 $\{a_n\}$ 为单调数列，

若存在无限项 a_n 满足 $a_n > 2023$ 成立，则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，则 $d>0$，即必要性成立，

所以"$d>0$"是"存在无限项 a_n 满足 $a_n > 2023$"充要条件.

故选：C.

11. 【答案】D

【分析】根据底数是 $\frac{1}{3}$，$y=f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-ax+3)$ 在 $[1,2]$ 上恒为正数，故 $0<x^2-ax+3<1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，进而解不等式就可以了.

【详解】解：由于底数是 $\frac{1}{3}$，从而 $y=f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-ax+3)$ 在 $[1,2]$ 上恒为正数，

故 $0<x^2-ax+3<1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

即 $x+\frac{2}{x}<a<x+\frac{3}{x}$

由于 $x\in[1,2]$，$x+\dfrac{3}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{3}{x}}=2\sqrt{3}$ 当且仅当 $x=\dfrac{3}{x}$ 即 $x=\sqrt{3}$ 时取等号；

由对勾函数的性质可知，函数 $g(x)=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt{2},2\right]$ 上单调递增，且

$g(1)=g(2)=3$

所以 $3<a<2\sqrt{3}$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查对数型函数，一元二次函数值域问题，属于中档题.

12.【答案】B

【分析】

$F_5=2^{32}+1$,设 $m=2^{32}$,两边取常用对数估算 m 的位数即可.

【详解】$\because F_5=2^{32}+1$,设 $m=2^{32}$，则两边取常用对数得

$\lg m=\lg 2^{32}=32\lg 2=32\times 0.3010=9.632$.

$m=10^{9.632}\approx 10^{9}$，

故 F_5 的位数是 10，

故选：B.

【点睛】解决对数运算问题的常用方法：

(1)将真数化为底数的指数幂的形式进行化简.

(2)将同底对数的和、差、倍合并.

(3)利用换底公式将不同底的对数式转化成同底的对数式，要注意换底公式的正用、逆用及变形应用.

(4)利用常用对数中的 $\lg 2+\lg 5=1$ 简化计算.

二、填空题（共 6 个小题，每题 5 分，共 30 分），请将答案填写到答题卡规定的位置

13.【答案】$\dfrac{7}{2}$

【分析】根据题意，结合指数幂的运算法则及对数的运算性质，准确计算，即可求解.

【详解】根据指数幂的运算法则及对数的运算性质，可得：

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}+\lg 5^2+\lg 40=[(\frac{1}{2})^3]^{\frac{1}{3}}+\lg 25+\lg 40=\frac{1}{2}+\lg 1000=\frac{7}{2}.$$

故答案为：$\dfrac{7}{2}$.

14.【答案】-25

【分析】根据等差数列的性质，求得 $a_6=13$，求得 $d=6$，再结合等差数列的求和公式，即可求解.

【详解】由 $a_2+a_8=26$，可得 $a_2+a_8=2a_6=26$，解得 $a_6=13$，

又因为 $a_7=19$，可得 $d=\dfrac{a_7-a_6}{7-6}=\dfrac{19-13}{1}=6$，

又由 $a_7=a_1+6d=a_1+6\times6=19$，解得 $a_1=-17$，

所以 $S_5=5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=5\times(-17)+\dfrac{5\times4}{2}\times6=-25$.

故答案为：-25.

15.【答案】64

【分析】根据等差中项结合等比数列通项公式运算求解.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$，

因为 a_2，a_5 的等差中项为 a_4+2，则 $2(a_4+2)=a_2+a_5$，

即 $2(2q^3+2)=2q+2q^4$，则 $4(q^3+1)=2q(q^3+1)$，

且 $q>0$，可知 $q^3+1>0$，解得 $q=2$，

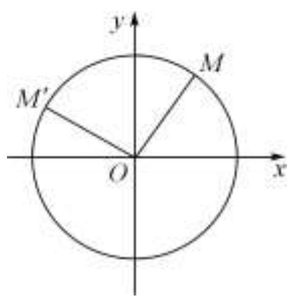
所以 $a_6=2\times2^5=64$.

故答案为：64.

16.【答案】$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

【分析】根据题意画出图形，结合图形求出 3 分钟转过的角度，结合三角函数的定义计算点 M 所处位置 M' 的坐标.

【详解】解：由题意可得图：



每 12 分钟转动一周，则运动到 3 分钟时，转过的角为 $\dfrac{3}{12}\times2\pi=\dfrac{\pi}{2}$；

点 M 的初始位置坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，若角的始边为 x 轴的非负半轴，此时角 α 终边所在直线为 OM，则

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$

运动到 3 分钟时，形成的角度为 $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

动点M所处位置M'的坐标是$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

故答案为：$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

17.【答案】$(-1,+\infty)$

【分析】分$x>1$和$x\le 1$两种情况，结合分段函数解析式分析可知方程$x^2-ax-2=0$在$(-\infty,1]$内只有一个根，结合二次函数性质分析求解.

【详解】令$y=f(x)-2=0$，

当$x>1$时，则$\log_3 x-2=0$，即$\log_3 x=2=\log_3 9$，解得$x=9$；

当$x\le 1$时，则$x^2-ax-2=0$

由题意可知：方程$x^2-ax-2=0$在$(-\infty,1]$内只有一个根，

注意到二次函数$g(x)=x^2-ax-2$的图象开口向上，且$g(0)=-2<0$，

可得$g(1)=1-a-2<0$，解得$a>-1$，

所以实数a的取值范围是$(-1,+\infty)$.

故答案为：$(-1,+\infty)$.

18.【答案】③④

【分析】利用等差数列的定义判断①；利用已知举例说明判断②③；求出S_9的最小值判断④作答.

【详解】当$k\in N^*(2\le k\le 8)$时，由$a_k=a_{k-1}+1$得$a_k-a_{k-1}=1$，由$a_k=a_{k+1}-1$得$a_{k+1}-a_k=1$，

于是a_k-a_{k-1}与$a_{k+1}-a_k$仅只一个为1，即$a_k-a_{k-1}\ne a_{k+1}-a_k$，因此数列$\{a_n\}$不能是等差数列，①错误；

令$b_m=a_{m+1}-a_m(1\le m\le 8)$，依题意，$b_m$与$b_{m+1}$均为整数，且有且仅有一个为1（即隔项为1），

若$b_1=b_3=b_5=b_7=1$，则$a_2=a_1+b_1=7,a_3=a_2+b_2\ge 1,a_4=a_3+b_3\ge 2,a_5=a_4+b_4\ge 1$，

$a_6=a_5+b_5\ge 2,a_7=a_6+b_6\ge 1,a_8=a_7+b_7\ge 2$，而$a_1=6$，$a_9=14$，

因此$S_9=\sum_{i=1}^{9}a_i\ge 6+7+1+2+1+2+1+2+14=36$，当且仅当数列为$6,7,1,2,1,2,1,2,14$时取等号，

若$b_2=b_4=b_6=b_8=1$，则$a_2=a_1+b_1\ge 1,a_3=a_2+b_2\ge 2,a_4=a_3+b_3\ge 1,a_5=a_4+b_4\ge 2$，

$a_6=a_5+b_5\ge 1,a_7=a_6+b_6\ge 2,a_8=a_9-b_8=13$，而$a_1=6$，$a_9=14$，

因此 $S_9=\sum_{i=1}^{9}a_i\geq 6+1+2+1+2+1+2+13+14=42$，当且仅当数列为 $6,1,2,1,2,1,2,13,14$ 时取等号，

从而 S_9 的最小值为 36，④正确；

当 $b_1=b_3=b_5=b_7=1$ 时，取 $b_2=b_4=b_6=p,b_8=4-3p,p\in\mathrm{N},p\neq 1$，数列 $\{a_n\}$ 为：

$6,7,7+p,8+p,8+2p,9+2p,9+3p,10+3p,14$，满足题意，

取 $p=2$，$a_8=16>14=a_9$，$\{a_n\}$ 中最大的项不为 a_9，②错误；

由于 p 的任意性，即 p 无最大值，因此 $S_9=78+12p$ 不存在最大值，③正确，

所以所有正确结论的序号是③④.

故答案为：③④

【点睛】关键点睛：涉及数列新定义问题，关键是正确理解给出的定义，由给定的数列结合新定义探求数列的相关性质，并进行合理的计算、分析、推理等方法综合解决.

三、解答题（五个大题，一共 60 分），请将答案填写到答题卡规定的位置

19. 【答案】（1）$a_n=2n-1$

（2）$T_n=\dfrac{n}{2n+1}$

【分析】（1）利用 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1\\S_n-S_{n-1},n\geq 2\end{cases}$ 求得 a_n.

（2）利用裂项求和法求得 T_n.

【小问 1 详解】

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $S_n=n^2$，得 $S_{n-1}=(n-1)^2$，

则 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时，有 $S_1=1=a_1$，符合上式.

综上，$a_n=2n-1$.

【小问 2 详解】

由（1）得，$\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

则 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

20. 【答案】（1）$(-1,1)$；（2）见解析；（3）$0<x<1$

【分析】（1）由$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}$，求得 x 的范围，可得函数的定义域；

（2）根据函数的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=-f(x)$，可得 $f(x)$ 为奇函数；

（3）由 $f(x)<0$，利用函数的定义域和单调性求出不等式的解集.

【详解】（1）由$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x>-1,\\x<1.\end{cases}$

所以 $-1<x<1$, 故函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$.

（2）函数 $f(x)$ 是奇函数.

由（1）知定义域关于原点对称.

因为 $f(-x)=\lg(1-(-x))-\lg(1+(-x))$

$=-(\lg(1-x)-\lg(1+x))=-f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

(3) 由 $f(x)<0$ 可得 $\lg(1-x)<\lg(1+x)$.

得$\begin{cases}-1<x<1\\1-x<1+x\end{cases}$,

解得 $0<x<1$.

【点睛】本题考查了函数的定义域、奇偶性问题，考查了对数函数单调性的应用，考查转化思想，是一道中档题.

21.【答案】（1）$\frac{11}{6}$；（2）$1-\sqrt{5}$

【分析】（1）根据三角函数的定义，得到 $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos=-\frac{3}{5}$，且 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，结合三角函数的诱导公式，代入即可求解；

（2）根据题意，得到韦达定理得到$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=-\frac{m}{2}\\\sin\theta\cos\theta=\frac{m}{4}\end{cases}$，结合三角函数的基本关系式和正弦函数的性质，即可求解.

【详解】解：（1）由点 P 的坐标为$\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$,

根据三角函数的定义，可得 $\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos=-\frac{3}{5}$，且 $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$，

则 $\dfrac{3\sin(\pi-\alpha)+5\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\cos(-\alpha)}-\tan(\pi+\alpha)=\dfrac{3\sin\alpha+5\cos\alpha}{2\cos\alpha}-\tan\alpha=\dfrac{3\times\frac{4}{5}+5\times(-\frac{3}{5})}{2\times(-\frac{3}{5})}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{11}{6}$.

（2）由 $\sin\theta$， $\cos\theta$ 是方程 $4x^2+2mx+m=0$ 的两根，

可得 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{m}{2}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{4}\end{cases}$，即 $\begin{cases}1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{m^2}{4}\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{4}\end{cases}$，解得 $m=1-\sqrt{5}$ 或 $m=1+\sqrt{5}$.

又因为 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{4}$，可得 $\sin 2\theta=\dfrac{m}{2}$，所以 $-1\le\dfrac{m}{2}\le 1$，解得 $-2\le m\le 2$，

当 $m=1-\sqrt{5}$ 时.满足 $\Delta>0$，所以 $m=1-\sqrt{5}$.

22.【答案】（1） $a_n=n-1$；

（2） $T_{2n}=n^2+\dfrac{2^{2n+1}-2}{3}$.

【分析】（1）等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由等比数列的性质列式可得 $d=0$ 或 $d=1$，验证可得 $d=1$，根据等差数列的通项公式即可求解；

（2） $b_n=\begin{cases}n,\ n\text{为奇数}\\ 2^{n-1},n\text{为偶数}\end{cases}$，由分组求和法，结合等差数列与等比数列的求和公式即可求解.

【小问 1 详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 a_2， a_3， a_4+1 成等比数列，所以 $a_2(a_4+1)=a_3^2$，

即 $d(3d+1)=(2d)^2$，即 $d^2=d$，解得 $d=0$ 或 $d=1$.

若 $d=0$，则 $a_n=0$，则 a_2， a_3 不能是等比数列中的项，故 $d=0$ 不符合题意.

所以 $d=1$， $a_n=0+(n-1)\times 1=n-1$，

可得 $a_2=1,a_3=2$， $a_4+1=4$，符合 a_2， a_3， a_4+1 成等比数列，

所以 $a_n=n-1$.

【小问 2 详解】

$b_n=\begin{cases}a_n+1,\ n\text{为奇数}\\ 2^{a_n},n\text{为偶数}\end{cases}=\begin{cases}n,\ n\text{为奇数}\\ 2^{n-1},n\text{为偶数}\end{cases}$，

所以 $T_{2n}=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}$

$=(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1})+(b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{2n})$

$=(1+3+5+\cdots+2n-1)+(2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1})$

$=\frac{[1+(2n-1)]n}{2}+\frac{2\times(1-4^n)}{1-4}=n^2+\frac{2^{2n+1}-2}{3}$.

所以 $T_{2n}=n^2+\frac{2^{2n+1}-2}{3}$.

23.【答案】（1）不存在，理由见详解

（2）证明见详解　（3）$\left[3-\sqrt{5},2\right)$

【分析】（1）根据题意整理得 $x_0^2+x_0+1=0$，通过 Δ 判断该方程是否有解；

（2）根据题意可得 $2^{x_0-1}+x_0-1=0$，构建函数 $g(x)=2^{x-1}+x-1$，结合零点存在性定理分析证明；

（3）根据题意整理得 $\frac{a}{2}=1-\frac{2x_0+1}{x_0^2+2x_0+2}$，利用换元结合基本不等式运算求解.

【小问 1 详解】

不存在，理由如下：

对于 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$，则 $\frac{1}{x_0+1}=\frac{1}{x_0}+1$，整理得 $x_0^2+x_0+1=0$，

$\because \Delta=1-4=-3<0$，则该方程无解，

$\therefore$ 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 不存在"飘移点".

【小问 2 详解】

对于 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$，则 $(x_0+1)^2+2^{x_0+1}=x_0^2+2^{x_0}+3$，整理得 $2^{x_0-1}+x_0-1=0$，

$\because g(x)=2^{x-1}+x-1$ 在 $(0,1)$ 内连续不断，且 $g(0)=-\frac{1}{2}<0, g(1)=1>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 内存在零点，则方程 $2^{x_0-1}+x_0-1=0$ 在 $(0,1)$ 内存在实根，

故函数 $f(x)=x^2+2^x$ 在 $(0,1)$ 上有"飘移点".

【小问 3 详解】

对于 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$，则 $\lg\left[\frac{a}{(x_0+1)^2+1}\right]=\lg\left(\frac{a}{x_0^2+1}\right)+\lg\left(\frac{a}{2}\right)=\lg\left[\frac{a^2}{2(x_0^2+1)}\right]$，即

$\frac{a}{(x_0+1)^2+1}=\frac{a^2}{2(x_0^2+1)}$，

$\because a\neq 0$，则 $\frac{a}{2}=\frac{x_0^2+1}{x_0^2+2x_0+2}=1-\frac{2x_0+1}{x_0^2+2x_0+2}$，

令 $t=2x_0+1>1$，则 $x_0=\frac{t-1}{2}$，

$\therefore \dfrac{a}{2}=1-\dfrac{t}{\left(\dfrac{t-1}{2}\right)^2+2\times\dfrac{t-1}{2}+2}=1-\dfrac{4t}{t^2+2t+5}=1-\dfrac{4}{t+\dfrac{5}{t}+2}$，

又$\because t+\dfrac{5}{t}+2\geq 2\sqrt{t\times\dfrac{5}{t}}+2=2\sqrt{5}+2$，当且仅当$t=\dfrac{5}{t}$，即$t=\sqrt{5}$时等号成立，

则$0<\dfrac{4}{t+\dfrac{5}{t}+2}\leq\dfrac{4}{2\sqrt{5}+2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq 1-\dfrac{4}{t+\dfrac{5}{t}+2}<1$，

$\therefore \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leq\dfrac{a}{2}<1$，即$3-\sqrt{5}\leq a<2$，

故实数a的取值范围为$\left[3-\sqrt{5},2\right)$.