绝密★启用前

高三数学考试

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

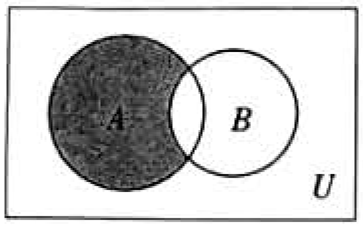
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|x<4\}$，$B=\{x|x>2\}$，则图中阴影部分表示的集合为



A. $\{1,2\}$

B. $\{0,1,2\}$

C. $\{x|x\leqslant 2\}$

D. $\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}$　　B. $\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

C. $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}$　　D. $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(m,3-m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$

A. -3　　B. -2　　C. 1　　D. 2

4. 一封闭的正方体容器 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，P，Q，R 分别是 AB，BC 和 C_1D_1 的中点，由于某种原因，P，Q，R 处各有一个小洞，当此容器内存水的表面恰好经过这三个小洞时，容器中水的上表面形状是

A. 三角形　　B. 四边形

C. 五边形　　D. 六边形

5. 若关于 x 的不等式 $ax^2-(a^2+6a+9)x+a+1<0$ 的解集是 $\{x|m<x<n\}$，则 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

6. 香农定理是所有通信制式最基本的原理，它可以用香农公式 $C=B\log_2(1+\dfrac{S}{N})$ 来表示，其中 C 是信道支持的最大速度或者叫信道容量，B 是信道的带宽(Hz)，S 是平均信号功率(W)，N 是平均噪声功率(W). 已知平均信号功率为 1000 W，平均噪声功率为 10 W，在不改变平均噪声功率和信道带宽的前提下，要使信道容量增加到原来的 2 倍，则平均信号功率需要增加到原来的

A. 1.2 倍　　B. 12 倍　　C. 102 倍　　D. 1002 倍

7. 甲、乙、丙等七人相约到电影院看电影《长津湖》，恰好买到了七张连号的电影票. 若甲、乙两人必须相邻，且丙坐在七人的正中间，则不同的坐法的种数为

A. 240　　B. 192　　C. 96　　D. 48

8. 若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $f(x)=e^{x-2}$ 与 $g(x)=e^{x+2022}-2022$ 的公切线，则 $k=$

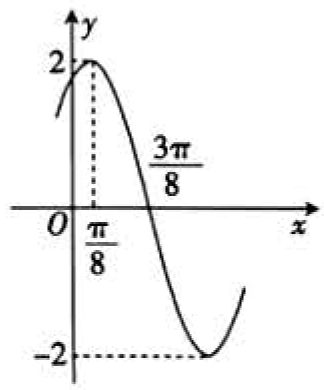
A. $\frac{1011}{1012}$　　B. 1　　C. $\frac{1012}{1011}$　　D. 2022

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. “方程 $\frac{x^2}{m+2}+\frac{y^2}{2-m}=1$ 表示椭圆”的一个充分条件是

A. $m=-1$　　B. $m=0$　　C. $m=1$　　D. $m>0$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{16}$ 个单位长度，再将图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则



A. $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$ 对称

C. $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{8},0)$ 对称

D. 函数 $f(x)+g(x)$ 的最小值为 -4

11. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1B_1=2AB=4$，$AA_1=2$，则

A. 该棱台的高为 $\sqrt{2}$　　B. 该棱台的表面积为 $20+12\sqrt{3}$

C. 该棱台的体积为 $28\sqrt{2}$　　D. 该棱台外接球的表面积为 40π

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_i=1$ 或 $a_i=2$ 的概率均为 $\frac{1}{2}(i=1,2,3,\cdots,n)$. 设 S_n 能被 3 整除的概率为 P_n，则

A. $P_2=1$　　B. $P_3=\frac{1}{4}$

C. $P_{11}=\frac{341}{1024}$　　D. 当 $n\geqslant 5$ 时，$P_n<\frac{1}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知 θ 为三角形的内角，且 $\sin 2\theta=\sin^2\theta$，则 $\frac{\sin\theta(1-\cos 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$ ▲ .

14. 已知圆 $C:x^2+(y-1)^2=m$ 与抛物线 $x^2=4y$ 的准线相切，则 $m=$ ▲ .

15. 写出一个同时具有下列性质①②的函数 $f(x)$： ▲ .

①直线 $x=1$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴；② $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上恰有三个零点.

16. 平面上到两条相交直线的距离之和为常数的点的轨迹为平行四边形，其中这两条相交直线是该平行四边形对角线所在的直线. 若平面上到两条直线 $x-y=0$，$y=0$ 的距离之和为 2 的点 P 的轨迹为曲线 Γ，则曲线 Γ 围成的图形面积为 ▲ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）

2022 年 6 月某一周，“东方甄选”直播间的交易额共计 3.5 亿元，数据统计如下表：

第 t 天	1	2	3	4	5	6	7
交易额 y/千万元	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

(1)通过分析，发现可用线性回归模型拟合交易额 y 与 t 的关系，请用相关系数（系数精确到 0.01）加以说明；

(2)利用最小二乘法建立 y 关于 t 的经验回归方程（系数精确到 0.1），并预测下一周的第一天（即第 8 天）的交易额．

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=42.1$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=8.1$，$\sqrt{7}\approx 2.65$．

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$．

在回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 中，斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$．

18.（12 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $(a+b)(\sin A-\sin B)+(c-\sqrt{3}a)\sin C=0$．

(1)求角 B 的大小；

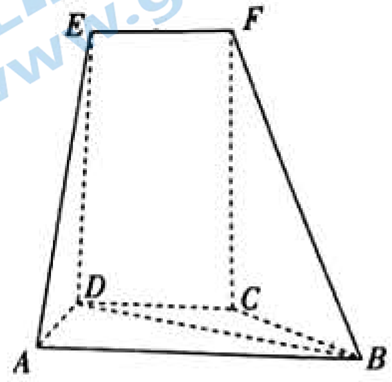
(2)若 BC 边上的高为 $b-c$，求 $\sin A$．

19.(12 分)

在多面体 $EF-ABCD$ 中,平面 $EDCF\perp$ 平面 $ABCD$,$EDCF$ 是面积为$\sqrt{3}$的矩形,$CD/\!/AB$,$AD=DC=CB=1$,$AB=2$.

(1)证明:$BD\perp EA$.

(2)求平面 $EDCF$ 与平面 EAB 夹角的余弦值.



20.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$的首项为 1,满足 $a_3-a_4=a_3a_4$,且$\frac{a_{n+2}}{a_n}$,$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$,1 成等差数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:$a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_5+\cdots+a_na_{n+1}a_{n+2}<\frac{1}{4}$.

21.(12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{13}x$,一个焦点到该渐近线的距离为$\sqrt{39}$.

(1)求 C 的方程;

(2)设 A,B 是直线 $x=-9$ 上关于 x 轴对称的两点,直线 $y=k(x+9)$与 C 交于 M,N 两点,证明:直线 AM 与 BN 的交点在定直线上.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=2a\ln x+\frac{1}{2}x^2-(2a+1)x,a\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$的单调区间;

(2)设函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+(2a-1)x+\frac{8}{x}$,若 $g(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,证明:$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+4<2a$.

高三数学考试参考答案

1. B 【解析】本题考查集合的运算，考查逻辑推理的核心素养.

$A=\{x\in\mathbf{N}|x<4\}=\{0,1,2,3\}$，图中阴影部分表示的集合为$\{x|x\in A,x\notin B\}=\{0,1,2\}$.

2. C 【解析】本题考查复数的四则运算，考查运算求解能力.

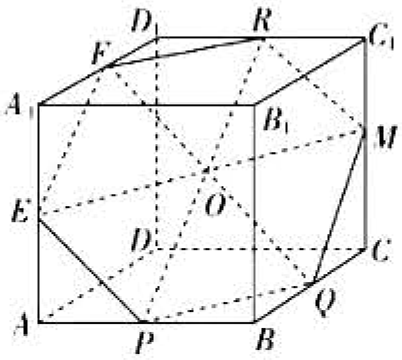
由$z=\dfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(\sqrt{3})^2+1}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}$，知$\bar{z}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4}$.

3. D 【解析】本题考查平面向量的数量积公式，考查运算求解能力.

由$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得$m-6+2m=0$，则$m=2$.

4. D 【解析】本题考查截面问题，考查空间想象能力.

如图，分别取A_1D_1，A_1A，CC_1的中点F，E，M，连接RF，FE，EP，PQ，QM，MR，EM，QF，RP. 由正方体性质知$RF// PQ$，所以R，F，P，$Q\in$平面α，且$RF// PQ// ME$，又QF，RP，EM交于同一点O，所以E，$M\in$平面α，所以点P，Q，R确定的平面β为六边形$RFEPQM$，则六边形$RFEPQM$为容器中水的上表面的形状.



5. A 【解析】本题考查不等式的应用，考查逻辑推理的核心素养.

根据一元二次不等式的解集与系数的关系可得$x=m$和$x=n$是方程$ax^2-(a^2+6a+9)x+a+1=0$的两根且$a>0$，即$m+n=\dfrac{a^2+6a+9}{a}$，$mn=\dfrac{a+1}{a}$.

故$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{a^2+6a+9}{a+1}=\dfrac{(a+1)^2+4(a+1)+4}{a+1}=(a+1)+\dfrac{4}{a+1}+4\geqslant4+4=8$，当且仅当$a=1$时，等号成立.

6. C 【解析】本题考查对数的计算，考查数学建模的核心素养.

由题意可得$S=1000$ W，$N=10$ W，则在信道容量未增加时，信道容量为$C_1=B\log_2(1+\dfrac{S}{N})=B\log_2 101$，当信道容量增加到原来的2倍时，$C_2=B\log_2(1+\dfrac{S'}{10})=2C_1$，则$\log_2 101^2=\log_2(1+\dfrac{S'}{10})$，即$1+\dfrac{S'}{10}=101^2$，解得$S'=102000$，则平均信号功率需要增加到原来的102倍.

7. B 【解析】本题考查排列组合的应用，考查逻辑推理的核心素养.

丙在正中间(4号位)，甲、乙两人只能坐12，23或56，67号位，有4种情况；考虑到甲、乙的顺序有A_2^2种情况；剩下的4个位置其余4人坐，有A_4^4种情况. 故不同的坐法的种数为$C_4^1A_2^2A_4^4=192$.

8. A 【解析】本题考查导数的几何意义，考查数形结合的数学思想.

设直线$y=kx+b$与$f(x)=e^{x-2}$的图象相切于点$P_1(x_1,y_1)$，与$g(x)=e^{x+2022}-2022$的图象相切于点$P_2(x_2,y_2)$，又$f'(x)=e^{x-2}$，$g'(x)=e^{x+2022}$，所以$y_1=e^{x_1-2}$，$y_2=e^{x_2+2022}-2022$.

由点$P_1(x_1,y_1)$在切线上，得切线方程为$y-e^{x_1-2}=e^{x_1-2}(x-x_1)$；

由点$P_2(x_2,y_2)$在切线上，得切线方程为$y-e^{x_2+2022}+2022=e^{x_2+2022}(x-x_2)$.

故$\begin{cases}e^{x_1-2}=e^{x_2+2022},\\ e^{x_1-2}(1-x_1)=e^{x_2-2022}(1-x_2)-2022,\end{cases}$解得$e^{x_1-2}=\dfrac{1011}{1012}$. 故$k=e^{x_1-2}=\dfrac{1011}{1012}$.

9. AC 【解析】本题考查椭圆的标准方程以及充分条件，考查逻辑推理的核心素养.

若方程$\dfrac{x^2}{m+2}+\dfrac{y^2}{2-m}=1$表示椭圆，则$\begin{cases}m+2>0,\\2-m>0,\\m+2\neq2-m,\end{cases}$解得$-2<m<0$或$0<m<2$. 故选AC.

10. ACD 【解析】本题考查三角函数的图象，考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

从图象可以看出，$A=2$，$\dfrac{3\pi}{8}-\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1}{4}T$，因为$\omega>0$，所以$\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=2$，

将点$(\dfrac{\pi}{8},2)$代入解析式，得$2\sin(\dfrac{\pi}{4}+\varphi)=2$，其中$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，解得$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，所以$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$.

易得$g(x)=2\sin(x-\dfrac{\pi}{8})$. 因为$f(x)+g(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})+2\sin(x-\dfrac{\pi}{8})\geqslant-4$，且$f(-\dfrac{3\pi}{8})+g(-\dfrac{3\pi}{8})=-4$，所以函数$f(x)+g(x)$的最小值为$-4$. 故选ACD.

11. ABD 【解析】本题考查正四棱台的空间结构,考查空间想象能力.

由题可知 $AC=2\sqrt{2}$,$A_1C_1=4\sqrt{2}$,所以正四棱台的高 $h=\sqrt{2^2-(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{2}$,正四棱台的斜高 $h'=\sqrt{2^2-(\frac{4-2}{2})^2}=\sqrt{3}$,所以正四棱台的侧面积为 $4\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times\sqrt{3}=12\sqrt{3}$,上、下底面的面积分别为 4,16,即正四棱台的表面积 $S=4+16+12\sqrt{3}=20+12\sqrt{3}$,正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}(4+\sqrt{4\times16}+16)\times\sqrt{2}=\frac{28\sqrt{2}}{3}$.

设该棱台外接球的球心为 O,半径为 R,点 O 到上底面的距离为 x,所以 $\begin{cases}R^2=(\sqrt{2})^2+x^2,\\R^2=(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-x)^2,\end{cases}$ 解得 $R=\sqrt{10}$,所以该棱台外接球的表面积为 40π. 故选 ABD.

12. BC 【解析】本题考查概率以及数列的应用,考查逻辑推理的核心素养.

由题可知 $P_1=0$,$P_3=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$,$S_n$ 被 3 整除的余数有 3 种情况,分别为 0,1,2,所以 $P_{n+1}=\frac{1}{2}(1-P_n)$,则 $P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(P_n-\frac{1}{3})$,所以 $P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$,即 $P_n=-\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}$.

故 $P_2=\frac{1}{2}$,$P_3=\frac{1}{4}$,$P_{11}=\frac{341}{1024}$. 故选 BC.

13. $\frac{16}{15}$ 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

由 $\sin 2\theta=\sin^2\theta$,可得 $\tan\theta=2$,

故 $\frac{\sin\theta(1-\cos 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan\theta+1}\cdot 2\sin^2\theta=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{16}{15}$.

14. 4 【解析】本题考查抛物线与圆的方程,考查数形结合的数学思想.

因为圆 $C:x^2+(y-1)^2=m$ 的圆心为(0,1),半径 $r=\sqrt{m}$,抛物线 $x^2=4y$ 的准线为 $y=-1$,

所以 $|1+1|=\sqrt{m}$,解得 $m=4$.

15. $f(x)=x(x-1)^2(x-2)$(答案不唯一,也可写 $f(x)=(x-1)^2(2-|x-1|)$) 【解析】本题考查函数的性质,考查逻辑推理的核心素养.

由题可知先找出一个偶函数,且有三个零点,例如 $g(x)=x^2(x^2-1)$,再将 $g(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度,得到 $f(x)=(x-1)^2[(x-1)^2-1]=x(x-1)^2(x-2)$ 的图象.

16. $8\sqrt{2}$ 【解析】本题考查动点的轨迹,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

设 $P(x,y)$,则 P 的轨迹方程为 $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}+|y|=2$,

令 $y=0$,得曲线 Γ 与 $y=0$ 交于 $A(2\sqrt{2},0)$,$C(-2\sqrt{2},0)$,

令 $x=y$,得曲线 Γ 与 $x-y=0$ 交于 $B(2,2)$,$D(-2,-2)$,

因为 $|OA|=|OB|=2\sqrt{2}$,所以 $S=4S_{\triangle OAB}=4\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}=8\sqrt{2}$.

17. 解:(1) $\bar{t}=4$,$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$,$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=42.1$,$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=8.1$,

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\frac{42.1}{2\times2.65\times8.1}\approx0.98$. ………………………… 3 分

因为交易额 y 与 t 的相关系数近似为 0.98,说明交易额 y 与 t 具有很强的正线性相关,

从而可用线性回归模型拟合交易额 y 与 t 的关系. ………………………… 5 分

(2)因为 $\bar{y}=\frac{35}{7}=5$,$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$,

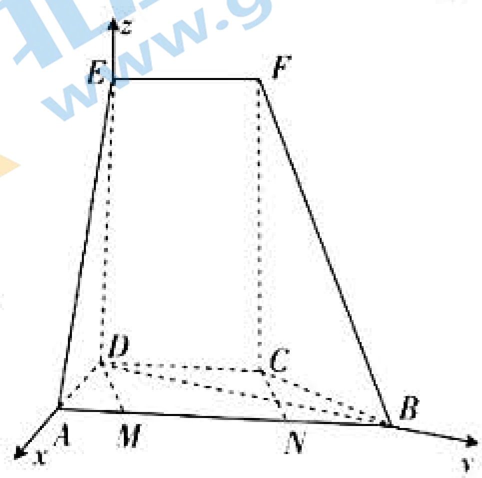
所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{42.1}{28}\approx1.5$, ………………………… 6 分

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}\approx5-1.5\times4=-1$, ………………………… 7 分

所以 y 关于 t 的回归方程为 $\hat{y}=1.5t-1$. ………………………………………… 8 分
将 $t=8$ 代入回归方程得 $\hat{y}=1.5\times 8-1=11$(千万元)$=1.1$ 亿元,
所以预测下一周的第一天的交易额为 1.1 亿元. ………………………………………… 10 分
评分细则:
【1】第 1 问正确算出相关系数得 3 分,说明理由累计得 5 分;
【2】第 2 问中正确写出 y 关于 t 的回归方程给 3 分.

18. 解:(1)由 $(a+b)(\sin A-\sin B)+(c-\sqrt{3}a)\sin C=0$,
得 $(a+b)(a-b)+(c-\sqrt{3}a)c=0$,即 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$. ………………………………………… 2 分
$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\because 0<B<\pi$,$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$. ………………………………………… 5 分
(2) $\because B=\dfrac{\pi}{6}$,且 BC 边上的高为 $b-c$,$\therefore b-c=c\sin\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore c=\dfrac{2}{3}b$. ………………………………………… 7 分
$\therefore \sin C=\dfrac{b-c}{b}=\dfrac{1}{3}$. $\because c<b$,$\therefore C$ 为锐角,$\therefore \cos C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, ………………………………………… 9 分
$\therefore \sin A=\sin[\pi-(C+\dfrac{\pi}{6})]=\sin(C+\dfrac{\pi}{6})=\sin C\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos C\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$. ………………………………………… 12 分
评分细则:
【1】第 1 问正确算出 $B=\dfrac{\pi}{6}$ 得 5 分;
【2】第 2 问共 7 分,算出 $c=\dfrac{2}{3}b$ 得 2 分,算出 $\sin C$,$\cos C$ 的值各得 1 分,正确算出 $\sin A$ 的值得 3 分;
【3】其他方法按步骤得分.

19. (1)证明:因为平面 $EDCF\perp$ 平面 $ABCD$,且平面 $EDCF\cap$ 平面 $ABCD=CD$,$ED\perp DC$,
所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………… 1 分
又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $ED\perp BD$. ………………………………………… 2 分
在四边形 $ABCD$ 中,作 $DM\perp AB$ 于 M,$CN\perp AB$ 于 N.
因为 $CD/\!/AB$,$AD=CD=CB=1$,$AB=2$,
所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,则 $AM=BN=\dfrac{1}{2}$,所以 $DM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$BD=\sqrt{DM^2+BM^2}=\sqrt{3}$,
所以 $AD^2+BD^2=AB^2$,所以 $AD\perp BD$. ………………………………………… 3 分
又 $ED\cap AD=D$,所以 $BD\perp$ 平面 EAD. ………………………………………… 4 分
又因为 $EA\subset$ 平面 EAD,所以 $BD\perp EA$. ………………………………………… 5 分
(2)解:如图,以点 D 为原点,建立空间直角坐标系,$BD=\sqrt{3}$,
则 $A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$E(0,0,\sqrt{3})$,$C(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$,
则 $\overrightarrow{AE}=(-1,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DE}=(0,0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{DC}=(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$. ……
…………………………………………………… 6 分



设平面 EAB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-\sqrt{3}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$. ………………………… 8 分
设平面 $EDCF$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-\dfrac{1}{2}x_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_2=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,0)$, ………………………………………… 10 分
则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{3+1}{\sqrt{5}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,所以平面 $EDCF$ 与平面 EAB 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 12 分
评分细则:

【1】第 1 问共 5 分，证出 $ED\perp BD$ 得 2 分，证出 $AD\perp BD$ 得 1 分，证出 $BD\perp$ 平面 EAD 得 1 分，证出 $BD\perp EA$ 得 1 分；
【2】第 2 问共 7 分，建立空间直角坐标系，并正确写出坐标得 1 分，写出平面 EAB 的法向量与平面 $EDCF$ 的法向量各得 2 分.
【3】其他方法按步骤给分.

20.（1）解：由题意得 $\frac{2a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}+1$，则 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$. ………… 2 分

所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列. ………… 3 分

又 $a_3-a_1=a_3a_1$，所以 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}=1$，即数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的公差为 1. ………… 4 分

所以 $\frac{1}{a_n}=1+n-1=n$，即 $a_n=\frac{1}{n}$. ………… 6 分

（2）证明：由已知得 $a_na_{n+1}a_{n+2}=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$， ………… 8 分

所以 $a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_5+\cdots+a_na_{n+1}a_{n+2}$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}<\frac{1}{4}$. ………… 12 分

评分细则：
【1】第 1 问说明 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为等差数列得 3 分，正确写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式累计得 6 分，猜想出 $\{a_n\}$ 的通项公式但未证明不得分；
【2】第 2 问共 6 分，正确算出 $a_na_{n+1}a_{n+2}$ 的前 n 项和得 4 分，证明 $a_1a_2a_3+a_2a_3a_4+a_3a_4a_5+\cdots+a_na_{n+1}a_{n+2}<\frac{1}{4}$ 得 2 分.

21.（1）解：双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，所以 $\frac{b}{a}=\sqrt{13}$.

又焦点 $(c,0)$ 到直线 $y=\sqrt{13}x$ 的距离 $d=\frac{|\sqrt{13}c|}{\sqrt{1+13}}=\sqrt{39}$，所以 $c=\sqrt{42}$. ………… 2 分

又 $c^2=a^2+b^2$，所以 $a^2=3,b^2=39$. ………… 4 分

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{39}=1$. ………… 5 分

（2）证明：联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{39}=1,\\ y=k(x+9),\end{cases}$ 消去 y，并整理得 $(13-k^2)x^2-18k^2x-3(27k^2+13)=0(13-k^2\neq0)$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{13-k^2}$，$x_1x_2=-\frac{3(27k^2+13)}{13-k^2}$. ………… 7 分

设 $A(-9,t),B(-9,-t)(t\neq0)$，则得直线 AM 的方程为 $y-t=\frac{y_1-t}{x_1+9}(x+9)$，

直线 BN 的方程为 $y+t=\frac{y_2+t}{x_2+9}(x+9)$， ………… 8 分

两个方程相减得 $2t=(\frac{y_2+t}{x_2+9}-\frac{y_1-t}{x_1+9})(x+9)$，① ………… 9 分

因为 $\frac{y_2+t}{x_2+9}-\frac{y_1-t}{x_1+9}=\frac{k(x_2+9)+t}{x_2+9}-\frac{k(x_1+9)-t}{x_1+9}=\frac{t(x_1+x_2+18)}{x_1x_2+9(x_1+x_2)+81}$，

把上式代入①得 $2=\frac{x_1+x_2+18}{x_1x_2+9(x_1+x_2)+81}(x+9)$， ………… 10 分

所以 $x=\frac{2x_1x_2+9(x_1+x_2)}{x_1+x_2+18}=\frac{2\times[-\frac{3(27k^2+13)}{13-k^2}]+9\cdot\frac{18k^2}{13-k^2}}{\frac{18k^2}{13-k^2}+18}=-\frac{1}{3}$.

因此直线 AM 与 BN 的交点在直线 $x=-\frac{1}{3}$ 上. ………………………………………………… 12 分

评分细则:

【1】第 1 问共 5 分,正确算出 c 的值得 2 分,正确算出 a 和 b 的值各得 1 分,正确写出 C 的方程得 1 分;

【2】第 2 问中共 7 分,正确联立方程得 1 分,根据韦达定理写出相应表达式得 1 分,写出直线 AM,BN 的方程得 1 分;

【3】其他方法按步骤给分.

22.(1)解:$f'(x)=\frac{2a}{x}+x-(2a+1)=\frac{x^2-(2a+1)x+2a}{x}=\frac{(x-1)(x-2a)}{x}$. ………………………… 1 分

①若 $a\leqslant 0$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………………………………… 2 分

②若 $0<a<\frac{1}{2}$,由 $f'(x)>0$,得 $0<x<2a$ 或 $x>1$;由 $f'(x)<0$,得 $2a<x<1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,2a)$,$(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(2a,1)$ 上单调递减. ………………………………… 3 分

③若 $a=\frac{1}{2}$,$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………… 4 分

④若 $a>\frac{1}{2}$,由 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$ 或 $x>2a$;由 $f'(x)<0$,得 $1<x<2a$.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$,$(2a,+\infty)$ 上单调递增,在 $(1,2a)$ 上单调递减. ………………………………… 5 分

(2)证明:$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+(2a-1)x+\frac{8}{x}=2a\ln x-2x+\frac{8}{x}$,

$g'(x)=\frac{2a}{x}-2-\frac{8}{x^2}=\frac{-2(x^2-ax+4)}{x^2}$. ……………………………………………………………… 6 分

①当 $a\leqslant 4$ 时,$g'(x)\leqslant 0$ 恒成立,$g(x)$ 不可能有两个极值点. …………………………………… 7 分

②当 $a>4$ 时,由 $g'(x)=0$ 得两个根 x_1,x_2,因为 $x_1+x_2=a>0$,且 $x_1x_2=4$,所以两根 x_1,x_2 均为正数,故 $g(x)$ 有两个极值点.

不妨设 $x_1<x_2$,由 $x_1x_2=4$ 知 $0<x_1<2$,$x_2>2$. ………………………………………………… 8 分

$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=2a\cdot\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}-2-\frac{8}{x_1x_2}=2a\cdot\frac{\ln 4-2\ln x_2}{\frac{4}{x_2}-x_2}-4$,

$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+4<2a$ 等价于 $2a\cdot\frac{\ln 4-2\ln x_2}{\frac{4}{x_2}-x_2}<2a$,即 $\frac{4}{x_2}-x_2+2\ln x_2<2\ln 2$. ……………… 10 分

令 $h(x)=\frac{4}{x}-x+2\ln x(x>2)$,$h'(x)=-\frac{4}{x^2}-1+\frac{2}{x}=\frac{-(x-1)^2-3}{x^2}<0$,所以 $h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,又 $h(2)=2\ln 2$,所以当 $x>2$ 时,$h(x)<2\ln 2$. 故 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}+4<2a$ 成立. …………………… 12 分

评分细则:

【1】第 1 问中,求导正确得 1 分,每种分类讨论各得 1 分;

【2】第 2 问中,未将 a 分为 $a\leqslant 4$ 和 $a>4$ 两种情况不扣分,但是未说明 $a>0$ 扣 2 分;

【3】其他方法按步骤给分.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。