2024 年普通高等学校招生全国统一考试仿真试题

数学(一)

本试卷共 4 页,19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 某篮球兴趣小组 7 名学生参加投篮比赛,每人投 10 个,投中的个数分别为 8,5,7,5,8,6,8,则这组数据的众数和中位数分别为

A. 5,7　　B. 6,7　　C. 8,5　　D. 8,7

2. 二次函数 $y=ax^2(a\neq 0)$的图象为抛物线,其准线方程为

A. $x=-\dfrac{1}{4a}$　　B. $x=-\dfrac{a}{4}$　　C. $y=-\dfrac{1}{4a}$　　D. $y=-\dfrac{a}{4}$

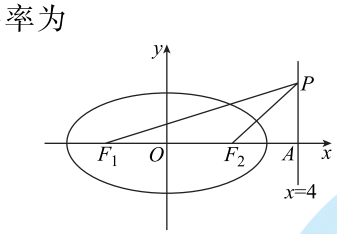
3. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n,若 $S_3=9$,$S_6=36$,则 $a_7+a_8+a_9=$

A. 18　　B. 27　　C. 45　　D. 63

4. 某单位计划从 5 人中选 4 人值班,每人值班一天,其中第一、二天各安排一人,第三天安排两人,则安排方法数为

A. 30　　B. 60　　C. 120　　D. 180

5. 古希腊数学家阿基米德利用"逼近法"得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 如图,F_1,F_2 为椭圆 E:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,中心为原点,椭圆 E 的面积为$\sqrt{5}\pi$,直线 $x=4$ 上一点 P 满足$\triangle F_1PF_2$ 是等腰三角形,且$\angle F_1F_2P=120°$,则 E 的离心率为



A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

6. 在等边$\triangle ABC$ 中,已知点 D,E 满足$\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$,$BD$ 与 CE 交于点 O,则$\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AC}$上的投影向量为

A. $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AC}$　　C. $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

7. 函数 $f(x)=2x-\dfrac{2}{x}+\ln x$,若 $f(m)+f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=0$,则 $3m+\dfrac{1}{n^2}$的最小值为

A. $2\sqrt{6}$　　B. 4　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 1

8. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=2$,$AA_1=\sqrt{3}$,O 为 BC 的中点,M 为棱 B_1C_1 上的动点,N 为棱 AM 上的动点,且$\dfrac{MN}{MO}=\dfrac{MO}{MA}$,则线段 MN 长度的取值范围为

A. $\left[\dfrac{3\sqrt{6}}{4},\sqrt{7}\right]$　　B. $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\right]$　　C. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\right]$　　D. $[\sqrt{3},\sqrt{6}]$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得 3 分,有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z_0 满足 $i^3z_0=\dfrac{-2+i}{1-2i}$,则

A. z_0 的实部为$\dfrac{3}{5}$

B. z_0 的虚部为$\dfrac{4}{5}$

C. 满足:$|z|\leqslant|z_0|$的复数 z 对应的点所在区域的面积为 π

D. z_0 对应的向量与 x 轴正方向所在向量夹角的正切值为$\dfrac{3}{4}$

10. 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,其中 $b=3$,且 $b(\sqrt{3}\sin A-\cos C)=(c-a)\cos B$,若 AC 边上的中点为 M,则

A. $B=\dfrac{2\pi}{3}$　　B. $S_{\triangle ABC}$的最大值为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

C. $a+b+c$ 的最小值为 $3+2\sqrt{3}$　　D. BM 的最小值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中,圆 C:$x^2+y^2=1$,点 P 为直线 l:$x-y-2=0$ 上的动点,则

A. 圆 C 上有且仅有两个点到直线 l 的距离为$\dfrac{1}{2}$

B. 已知点 $M(3,2)$,圆 C 上的动点 N,则$|PM|+|PN|$的最小值为$\sqrt{17}-1$

C. 过点 P 作圆 C 的一条切线,切点为 Q,$\angle OPQ$ 可以为 60°

D. 过点 P 作圆 C 的两条切线,切点为 M,N,则直线 MN 恒过定点$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$,$B=\{x|x^2<1\}$,则 $A\cap B=$________.

13. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{5}\right)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right)$内没有零点,则正数 ω 的取值范围是________.

14. 若函数 $f(x)=(x^2-2x)(x^2+ax+b)$的图象关于 $x=-2$ 对称,则 $a+b=$________,$f(x)$的最小值为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 及 $x=1$ 处取得极值.

（1）求 a,b 的值；

（2）若方程 $f(x)=0$ 有三个不同的实根，求 c 的取值范围.

16.（本小题满分 15 分）

某学校组织一项竞赛，在初赛中有两轮答题：第一轮从 A 类的三个问题中随机选两题作答，每答对一题得 20 分，答错得 0 分；第二轮从 B 类的分值分别为 20，30，40 的 3 个问题中随机选两题作答，每答对一题得满分，答错得 0 分. 若两轮总积分不低于 90 分，则晋级复赛. 甲、乙同时参赛，在 A 类的三个问题中，甲每个问题答对的概率均为 $\frac{1}{2}$，乙只能答对两个问题；在 B 类的 3 个分值分别为 20，30，40 的问题中，甲答对的概率分别为 $1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}$，乙答对的概率分别为 $\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. 甲、乙回答任一问题正确与否互不影响. 设甲、乙在第一轮的得分分别为 X,Y.

（1）分别求 X,Y 的概率分布列；

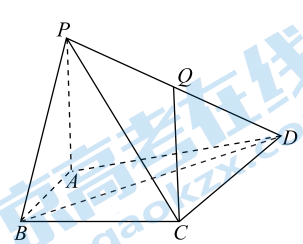
（2）分别计算甲、乙晋级复赛的概率，并请说明谁更容易晋级复赛？

17.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，点 Q 为 PD 的中点，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，$AB=BC=2$，$PA=4$，$BD=2\sqrt{5}$.

（1）证明：$AB\perp BC$；

（2）若 $AC=AD$，求直线 CQ 与平面 PBC 所成角的正弦值.



18.（本小题满分 17 分）

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在 C 的右支上. O 为原点，且 $PO\perp PF_2$，$|PO|=\sqrt{6}$.

（1）若点 E 为 PF_2 的中点，求 OE 的长度；

（2）过 F_2 作直线 l 与 C 的右支交于 A,B 两点，当△ABO 的面积为 $6\sqrt{6}$ 时，求直线 l 的方程.

19.（本小题满分 17 分）

数列 A_n：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\geqslant 4)$ 满足：$a_1=1$，$a_n=m$，$a_{k+1}-a_k=0$ 或 1 $(k=1,2,\cdots,n-1)$. 对任意 i,j，都存在 s,t，使得 $a_i+a_j=a_s+a_t$，其中 $i,j,s,t\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且两两不相等.

（1）若 $m=2$ 时，写出下列三个数列中所有符合题目条件的数列序号；①1，1，1，2，2，2；②1，1，1，1，2，2，2，2；③1，1，1，1，1，2，2，2，2，2；

（2）记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，若 $m=3$，求 S 的最小值；

（3）若 $m=1\,000$，求 n 的最小值.