

石景山区 2023 年高三统一练习

数学试卷答案及评分参考

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) A (2) C (3) B (4) D (5) A
(6) B (7) A (8) D (9) B (10) C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) $\frac{1}{2}$ (12) (0,1) 3 (13) 3（只要是 3 正整数倍即可）
(14) 2 $(-\infty, -\sqrt{2})$ (15) ①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16) (本小题满分 13 分)

解：(I) 因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，所以 $\cos \angle ADC = -\cos \angle ADB = -\frac{1}{3}$

在 $\triangle ADC$ 中，因为 $\angle ADC \in (0, \pi)$ ，

$$\text{所以 } \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得， $\frac{AD}{\sin C} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$ 。

$$\text{所以 } AD = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin \angle ADC} = \frac{4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\sqrt{2}} = 3.$$

(II) $\triangle ABD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$ ，得 $\frac{1}{2}DB \cdot DA \sin \angle ADB = 2\sqrt{2}$ ，

因为 $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，所以 $\sin \angle ADC = \sin \angle ADB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

又因为 $AD = 3$ ，所以 $BD = 2$ 。

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$$\begin{aligned} AB^2 &= DA^2 + DB^2 - 2DA \cdot DB \cdot \cos \angle ADB \\ &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 9. \text{ 所以 } AB = 3. \end{aligned}$$

(17) (本小题满分 13 分)

解: (I) 设事件 A 为“从第 1 组所有鸡冠花中各随机选取 1 株, 株高增量为 (7,10] 厘米”, 根据题中数据, 第 1 组所有鸡冠花中, 有 20 株鸡冠花增量为 (7,10] 厘米,

$$\text{所以 } P(A) \text{ 估计为 } \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

(II) 设事件 B 为“从第 2 组所有鸡冠花中各随机选取 1 株, 株高增量为 (7,10] 厘米”, 设事件 C 为“从第 3 组所有鸡冠花中各随机选取 1 株, 株高增量为 (7,10] 厘米”, 根

据题中数据, $P(B)$ 估计为 $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$, $P(C)$ 估计为 $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$

根据题意, 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且

$$P(X=0) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}),$$

$$P(X=1) = P(\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C})$$

$$= P(\bar{A})P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$$

$$P(X=3) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=3).$$

所以, $P(X=0)$ 估计为 $\frac{21}{100}$; $P(X=1)$ 估计为 $\frac{11}{25}$;

$P(X=3)$ 估计为 $\frac{3}{50}$; $P(X=2)$ 估计为 $\frac{29}{100}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{21}{100}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{3}{50}$

所以 EX 估计为 $0 \times \frac{21}{100} + 1 \times \frac{11}{25} + 2 \times \frac{29}{100} + 3 \times \frac{3}{50} = \frac{6}{5}$.

(III) $D\xi_1 < D\xi_3 < D\xi_2$.

(18) (本小题满分 14 分)

解: (I) 证明: 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $AD \parallel BC$,

$BC \subset$ 平面 PBC , $AD \not\subset$ 平面 PBC ,

所以 $AD \parallel$ 平面 PBC

又因为平面 ADF 与 PB 交于点 E .

$AD \subset$ 平面 $ADFE$, 平面 $PBC \cap$ 平面 $ADFE = EF$,

所以 $EF \parallel AD$.

(II) 选条件①②

侧面 PAD 为等腰直角三角形, 且 $\angle PAD = \frac{\pi}{2}$,

即 $PA = AD = 2$, $PA \perp AD$

平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $PA \subset$ 平面 PAD ,

则 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $ABCD$ 为正方形,

所以 $PA \perp AB, PA \perp AD, AB \perp AD$.

以点 A 为坐标原点, AB, AD, AP 方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向,

建立如图所示空间直角坐标系 $A-xyz$,

则 $A(0,0,0), P(0,0,2), C(2,2,0), B(2,0,0), D(0,2,0)$

因为 $AE = \sqrt{2}$, 所以点 E 为 PB 的中点, 则 $E(1,0,1)$

从而: $\vec{PC} = (2,2,-2), \vec{AD} = (0,2,0), \vec{AE} = (1,0,1)$,

设平面 $ADFE$ 的法向量为: $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

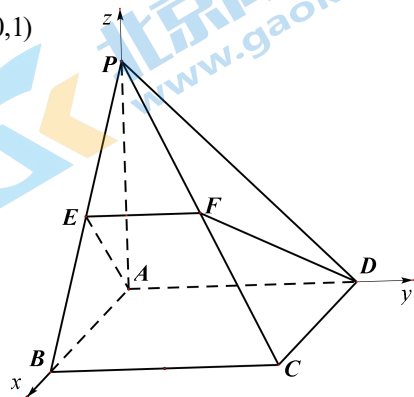
$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = x + z = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AD} = 2y = 0 \end{cases},$$

令 $x = 1$, 可得 $\mathbf{n} = (1, 0, -1)$

(方法 2: 因为 PAB 为等腰三角形, 则 $PB \perp AE, PB \perp AD, AE \cap AD = A$

$PB \perp$ 平面 $ADFE$, 则 $\vec{PB} = (2, 0, -2)$ 平面 $ADFE$ 的法向量)

设平面 PCD 的法向量为: $\mathbf{n} = (a, b, c)$, 则



$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PD} = 2y - 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{PC} = 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases},$$

令 $y=1$ ，可得 $\vec{n}=(0,1,1)$

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{PB}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{PB} \cdot \vec{n}|}{|\vec{PB}| |\vec{n}|} = \frac{1}{2}$$

则两平面所成的锐二面角为 $\frac{\pi}{3}$

选条件①③

侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD = \frac{\pi}{2}$ ，即 $PA = AD = 2, PA \perp AD$

$AD \perp AB, PA \cap AB = A$ ，可得 $AD \perp$ 平面 PAB ， $PB \subset$ 平面 PAB ，则 $AD \perp PB$ 。

又因为 $PB \perp FD, AD \cap FD = D$ ，

则 $PB \perp$ 平面 $ADFE$ ， $AE \subset$ 平面 $ADFE$ ，则 $PB \perp AE$

因为 $PA = AB$ ，所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 E 为 PB 的中点

又因为 $AE = \sqrt{2}$ ，所以 $\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，

下面同①②

选条件②③

侧面 PAD 为等腰直角三角形，且 $\angle PAD = \frac{\pi}{2}$ ，

即 $PA = AD = 2, PA \perp AD$

平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ， $PA \subset$ 平面 PAD ，

则 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $ABCD$ 为正方形，

所以 $PA \perp AB, PA \perp AD, AB \perp AD$ 。

又因为 $PB \perp FD, AD \cap FD = D$ ，则 $PB \perp$ 平面 $ADFE$ ， $AE \subset$ 平面 $ADFE$ ，

则 $PB \perp AE$

因为 $PA = AB$ ，所以 $\triangle PAB$ 为等腰三角形，所以点 E 为 PB 的中点。

下面同①②

(19) (本小题满分 15 分)

解: (I) 因为椭圆过点 $(0, \sqrt{3})$, 故 $b = \sqrt{3}$,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{则 } a = 2,$$

$$\text{故椭圆的标准方程为: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(II) 当直线 l_1 斜率不存在

$$l_1: x = -1, l_2: y = 1$$

$$\text{分别代入椭圆方程得: } M(-1, \frac{3}{2}), N(-1, -\frac{3}{2}), S(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1), T(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1)$$

$$\text{所以: } |PM| = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}, |PN| = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2},$$

$$|PS| = \frac{2\sqrt{6}}{3} - 1, |PT| = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 1,$$

$$\text{可得: } \frac{|PM| \cdot |PN|}{|PS| \cdot |PT|} = \frac{3}{4},$$

$$\text{当直线 } l_2 \text{ 斜率不存在时, 同理可得, } \frac{|PM| \cdot |PN|}{|PS| \cdot |PT|} = \frac{4}{3}$$

当 l_1, l_2 斜率均存在且不为 0 时, 设直线 l_1 斜率为 k , 则直线 l_2 斜率为 $-\frac{1}{k}$

$$\text{设直线 } l_1 \text{ 的方程为: } y - 1 = k(x + 1), \quad M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$$

$$\text{由 } \begin{cases} y - 1 = k(x + 1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases},$$

$$\text{得 } (3 + 4k^2)x^2 + (8k^2 + 8k)x + 4k^2 + 8k - 8 = 0$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{8k^2 + 8k}{3 + 4k^2}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 + 8k - 8}{3 + 4k^2} \end{cases}$$

$$|PM| = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + (y_1 - 1)^2} = \sqrt{1 + k^2} |x_1 + 1|,$$

$$|PN| = \sqrt{(x_2 + 1)^2 + (y_2 - 1)^2} = \sqrt{1 + k^2} |x_2 + 1|,$$

同理可知：

设直线 l_2 的方程为： $y-1=-\frac{1}{k}(x+1)$ ， $S(x_3, y_3), T(x_4, y_4)$

$$x_3 + x_4 = -\frac{8-8k}{3k^2+4} = \frac{8k-8}{3k^2+4},$$

$$x_3 \cdot x_4 = \frac{4-8k-8k^2}{3k^2+4},$$

$$|PS| = \sqrt{(x_3+1)^2 + (y_3-1)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |x_3+1|,$$

$$|PT| = \sqrt{(x_4+1)^2 + (y_4-1)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} |x_4+1|,$$

$$\text{则 } \frac{|PM| \cdot |PN|}{|PS| \cdot |PT|} = \frac{(1+k^2)|x_1+1||x_2+1|}{(1+\frac{1}{k^2})|x_3+1||x_4+1|} = k^2 \cdot \frac{|x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1|}{|x_3x_4 + x_3 + x_4 + 1|}$$

$$= k^2 \cdot \frac{\left| \frac{-5}{3+4k^2} \right|}{\left| \frac{-5k^2}{3k^2+4} \right|} = \frac{\left| \frac{3k^2+4}{4k^2+3} \right|}{\left| \frac{3(4k^2+3)+7}{4k^2+3} \right|} \in \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{3} \right)$$

综上所述： $\frac{|PM| \cdot |PN|}{|PS| \cdot |PT|}$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3} \right]$

(20) (本小题满分 15 分)

解：(I) 当 $m=1$ 时， $f'(x) = e^x - \cos x$ ，

(i) $f'(0)=0$ ，又 $f(0)=0$ ，所以切线 l 方程为 $y=0$ 。

(ii) $f(x) = e^x - 1 - \sin x$

解法一： $f'(x) = e^x - \cos x$ ，因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $e^x > 1$ ， $-\cos x > -1$ ，

所以 $e^x - \cos x > 0$ ，所以 $f'(x) = e^x - \cos x > 0$

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增，所以 $f(x) > f(0) = 0$

解法二：令 $g(x) = e^x - 1 - x$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $g'(x) = e^x - 1 > 0$

所以，函数 $g(x) = e^x - 1 - x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增.

所以 $g(x) > g(0) = 0$ ，即 $e^x - 1 - x > 0$.

令 $h(x) = x - \sin x$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $h'(x) = 1 - \cos x > 0$.

所以，函数 $h(x) = x - \sin x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增.

所以 $h(x) > h(0) = 0$ ，即 $x - \sin x > 0$.

所以 $f(x) = e^x - 1 - \sin x > 0$.

(II) $f(x) = e^x - 1 - m \sin x$ ， $f'(x) = e^x - m \cos x$ ，

当 $m \leq 1$ 时，所以 $-m \cos x \geq -\cos x$ ，

$f'(x) = e^x - m \cos x \geq e^x - \cos x$ ，

由 (I) 知， $f'(x) > 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

所以当 $m \leq 1$ 时， $f(x) = e^x - 1 - m \sin x$ 没有极值点.

当 $m > 1$ 时， $f'(x) = e^x - m \cos x$ ，

因为 $y = e^x$ 与 $y = -m \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递增.

所以 $f'(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 单调递增.

所以 $f'(0) = 1 - m < 0$ ， $f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0$.

所以 $\exists x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $f'(x_0) = 0$.

所以当 $0 < x < x_0$ 时， $f'(x) < 0$ ，因此 $f(x)$ 在区间 $(0, x_0)$ 上单调递减.

当 $x_0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时， $f'(x) > 0$ ，因此 $f(x)$ 在区间 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

故函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恰有一个极小值点， m 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

(21) (本小题满分 15 分)

解: (I) 由条件①知, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = -a_{n-1}$ 或 $a_n = a_{n-1} + 4$.

因为 $a_2 < 0$, 由条件①知 $a_2 = -1$.

所以 τ 数列的前四项为: $1, -1, 1, -1$; $1, -1, 1, 5$; $1, -1, 3, -3$; $1, -1, 3, 7$.

(II) 若 $a_2 > 0$, τ 数列是等差数列.

由条件①知, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = -a_{n-1}$ 或 $a_n = a_{n-1} + 4$.

因为 $a_2 > 0$, 所以 $a_2 = 5$.

假设 τ 数列中存在最小的正整数 i ($i \geq 3$), 使得 $a_i = -a_{i-1}$.

由条件①知, a_1, a_2, \dots, a_{i-1} 单调递增, 即均为正数, 且 $a_{i-1} \geq a_2 = 5$.

所以 $a_i = -a_{i-1} \leq -5$. 由条件②知, 则存在 $k \in \{1, 2, \dots, i-1\}$, 使得 $a_k = a_i + 4 \leq -1$.

此时与 a_1, a_2, \dots, a_{i-1} 均为正数矛盾,

所以不存在整数 i ($i \geq 3$), 使得 $a_i = -a_{i-1}$, 即 $a_n = a_{n-1} + 4$.

所以 τ 数列为首项为 1 公差为 4 的等差数列.

(III) 由 $a_m = -2021$ 及条件②,

可得 $-1, -5, -9, \dots, -2017, -2021$ 必为数列 $\{a_n\}$ 中的项,

记该数列为 $\{b_n\}$, 有 $b_n = -4n + 3$ ($1 \leq n \leq 506$).

不妨令 $b_n = a_j$, 由条件①, $a_{j+1} = -a_j = 4n - 3$ 或 $a_{j+1} = a_j + 4 = -4n + 7$,

均不为 $b_{n+1} = -4n - 1$;

此时 $a_{j+2} = -4n + 3$ 或 $4n + 1$ 或 $4n - 7$ 或 $-4n + 11$, 均不为 $b_{n+1} = -4n - 1$.

上述情况中, 当 $a_{j+1} = 4n - 3$, $a_{j+2} = 4n + 1$ 时, $a_{j+3} = -a_{j+2} = -4n - 1 = b_{n+1}$,

结合 $a_1 = 1$, 则有 $a_{3n-1} = b_n$.

由 $b_{506} = -2021$, 得 $m = 3 \times 506 - 1 = 1517$ 即为所求.

(以上解答题, 若用其它方法, 请酌情给分)

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯