2023北京昌平一中高一（上）期中

数　　学

一、选择题（每题4分）

1. 已知集合 $A=\{-1,0,2,3\}$，$B=\{x|\ x=2k-1,k\in\mathbf{N}\}$，那么 $A\cap B=$（　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{-1,2\}$　　C. $\{0,3\}$　　D. $\{-1,3\}$

2. 若 $a<0,-1<b<0$，则下列不等关系正确的是（　）

A. $ab>ab^2>a$　　B. $ab^2>ab>a$　　C. $ab>a>ab^2$　　D. $a>ab>ab^2$

3. 下列在定义域内既是奇函数又是减函数的是（　）

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B. $f(x)=-2x$　　C. $f(x)=-x^2$　　D. $f(x)=-\sqrt{x}$

4. 下列各不等式，其中正确的是（　）

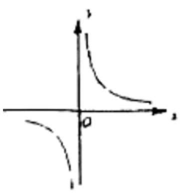
A. $a^2+1>2a(a\in\mathbf{R})$　　B. $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\ge 2(x\in\mathbf{R},x\ne 0)$

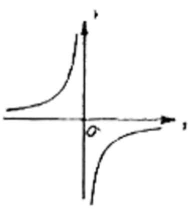
C. $\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\ge 2(ab\ne 0)$　　D. $x^2+\dfrac{1}{x^2+1}>1(x\in\mathbf{R})$

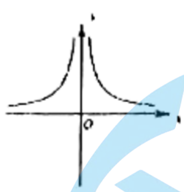
5. 函数 $f(x)=-x^2+(2a+2)x+2$ 在区间 $(-\infty,4)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　）

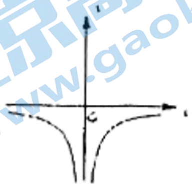
A. $a\ge 3$　　B. $a\le 3$　　C. $a\ge 1$　　D. $a\le 1$

6. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$ 表示的图象可能是下图中的（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解是一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 有解的（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

8. 已知 $f(x)$ 为一次函数，且 $f[f(x)]=4x-3$，则 $f(1)$ 的值为

A.0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx+8$，且 $f(-2)=10$，则 $f(2)$ 的值是（　）

A. -2　　B. -6　　C. 6　　D. 8

10. 若一系列函数的解析式相同，值域相同，但定义域不同，则称这些函数为“孪生函数”，那么函数解析式为 $y=2x^2-1$，值域为 $\{1,7\}$ 的“孪生函数”共有

A. 10 个　　B. 9 个　　C. 8 个　　D. 4 个

二、填空题（每题 5 分）

11. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ 的定义域为________.

12. 命题 p：$\forall x\in(1,+\infty), x+\dfrac{1}{x-1}\ge a$ 为真命题，则 $\neg p$ 可以表示为________________，实数 a 的取值范围是______.

13. 设函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，若 $f(2)=0$，则不等式 $\dfrac{f(x)}{x}<0$ 的解集是________

14. 正实数 a、b 满足 $a+b+3=ab$，则 ab 的最小值是______，$a+b$ 的最小值是_______

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\ge a,\\-x^2-2x, x<a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①存在实数 a，使函数 $f(x)$ 为奇函数；

②对任意实数 a，函数 $f(x)$ 既无最大值也无最小值；

③对任意实数 a 和 k，函数 $y=f(x)+k$ 总存在零点；

④对于任意给定的正实数 m，总存在实数 a，使函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,m)$ 上单调递减.其中所有正确结论的序号是______________.

三、解答题（16-18 每题 14 分，19-20 每题 15 分，21 题 13 分）

16. 集合 $A=\{x||x-2|\le 3\}$，$B=\{x|a+1\le x\le 2a-1\}$

（1）当 $a=4$ 时，求 $A\cup B$；

（2）若 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围

17. 函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+4}{x}$，且 $f(1)=5$

（1）求 a 的值；

（2）证明：$f(x)$ 为奇函数；

（3）判断函数 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上的单调性，并加以证明

18. 函数 $f(x)=x^2-2(a-1)x+4$，定义域为 $[0,3]$

（1）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的值域；

（2）若 $\forall x\in[0,3], f(x)\ge 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

19. 关于 x 的方程 $3x^2+4kx+2k^2-2=0(k\in\mathrm{R})$

（1）当 $k=1$ 时，求方程的根；

（2）若方程有两个不相等的实数根 x_1,x_2，

①求实数 k 的取值范围；②用关于 k 的式子表示 $x_1^2+x_2^2$

20. 某农场要安装一个可使用10年的太阳能供电设备。使用这种供电设备后，该农场每年消耗的电费 C（单位：万元）与太阳能电池板面积 x（单位：平方米）之间的函数关系为 $C\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{m-4x}{5},\left(0\le x\le 10\right)\\ \dfrac{m}{x},\left(x>10\right)\end{cases}$（$m$ 为常数）。已知太阳能电池板面积为5平方米时，每年消耗的电费为12万元，安装这种供电设备的工本费为 $0.5x$（单位：万元），记 $F\left(x\right)$ 为该农场安装这种太阳能供电设备的工本费与该农场10年消耗的电费之和。

（1）求出 $C\left(x\right)$、$F\left(x\right)$ 的解析式；

（2）当 x 为多少平方米时，$F\left(x\right)$ 取得最小值？最小值是多少万元？

21. 已知 $f\left(x\right)$ 的定义域是 $\{x|x\ne 0\}$，对于定义域内任意的 x_1,x_2 都有 $f\left(x_1\cdot x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$，且当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)>0, f\left(2\right)=1$

（1）求证：$f\left(x\right)$ 是偶函数

（2）求证：$f\left(x\right)$ 在 $0,+\infty$ 上是增函数

（3）若 $f\left(a+1\right)>f\left(a\right)+1$，求实数 a 的取值范围

参考答案

一、选择题（每题 4 分）

1.【答案】D

【分析】

根据交集的定义可求 $A\cap B$.

【详解】因为 $B=\{x|\ x=2k-1,k\in\mathbf{N}\}$，故 B 中的元素为大于或等于 -1 的奇数，

故 $A\cap B=\{-1,3\}$，

故选：D.

2.【答案】A

【分析】利用作差法计算即可得出结论.

【详解】因为 $a<0,-1<b<0$，所以 $ab>0,0<b^2<1$，

因为 $ab-ab^2=ab(1-b)>0$，所以 $ab>ab^2$，

因为 $ab^2-a=a(b^2-1)>0$，所以 $ab^2>a$，

所以 $ab>ab^2>a$，故 A 正确，BCD 错误；

故选：A.

3.【答案】B

【分析】根据函数特征逐一判断即可.

【详解】对于 A，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 单调递减，不是定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的减函数，故 A 错误；

对于 B，$f(x)=-2x$ 定义域 R，又因为 $f(-x)=2x=-f(x)$，所以 $f(x)=-2x$ 在定义域内是奇函数，结合一次函数特征可知，$f(x)=-2x$ 为减函数，故 B 正确；

对于 C，$f(x)=-x^2$ 定义域 R，又因为 $f(-x)=-x^2=f(x)$，所以 $f(x)=-x^2$ 在定义域内是偶函数，故 C 错误；

对于 D，$f(x)=-\sqrt{x}$ 定义域 $[0,+\infty)$，为非奇非偶函数，故 D 错误.

故选：B

4.【答案】B

【分析】取特殊值可判断 ACD；利用基本不等式可判断 B.

【详解】对 A，当 $a=1$ 时，$a^2+1=2a$，故 A 错误；

对 B，$\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=|x|+\dfrac{1}{|x|}\geq 2\sqrt{|x|\cdot\dfrac{1}{|x|}}=2$，当且仅当 $|x|=\dfrac{1}{|x|}$，即 $x=\pm1$ 时等号成立，故 B 正确；

对 C，当 $a=b=-1$ 时，$\frac{a+b}{\sqrt{ab}}=-2$，故 C 错误；

对 D，当 $x=0$ 时，$x^2+\frac{1}{x^2+1}=1$，故 D 错误.

故选：B.

5.【答案】A

【分析】根据二次函数特征直接计算即可.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=-x^2+\left(2a+2\right)x+2$ 在区间 $\left(-\infty,4\right)$ 上单调递增，

所以 $f\left(x\right)$ 对称轴 $x=-\frac{2a+2}{2\times\left(-1\right)}=a+1\geq 4$，所以 $a\geq 3$.

故选：A

6.【答案】C

【分析】根据 x 的正负去绝对值，再利用反比例函数的图象判断即可.

【详解】由题意可知当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=\frac{1}{x}$，排除 BD，

当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=-\frac{1}{x}$，排除 A，

故选：C

7.【答案】D

【分析】根据充要条件、必要条件的定义判断即可；

【详解】解：对于方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac=0\\ a<0\end{cases}$，方程有解，此时 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为空集，故充分性不成立；

若对于 $ax^2+bx+c>0$ 当 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac<0\\ a>0\end{cases}$ 时不等式的解集为 R，此时方程 $ax^2+bx+c=0$ 无解，故必要性也不成立，

故一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有解是一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 有解的既非充分又非必要条件

故选：D

【点睛】本题考查充分条件、必要条件的判断，属于基础题.

8.【答案】B

【分析】设 $f(x)=kx+b$，代入 $f[f(x)]=4x-3$，得到 $f(x)=2x-1$ 或 $f(x)=-2x+3$，计算得到答案.

【详解】设 $f(x)=kx+b$

则 $f[f(x)]=f(kx+b)=k(kx+b)+b=k^2x+kb+b=4x-3$

$k^2=4, kb+b=-3$

$k=2,b=-1, f(x)=2x-1, f(1)=1$

或 $k=-2,b=3, f(x)=-2x+3, f(1)=1$

综上： $f(1)=1$

故答案选 B

【点睛】本题考查了一次函数的计算，待定系数法是常规方法，需要灵活掌握和应用.

9.【答案】C

【分析】令 $g(x)=f(x)-8$，得函数 $g(x)$ 为奇函数，可得 $f(-x)+f(x)=16$，令 $x=2$ 得答案.

【详解】 $f(x)=x^5+ax^3+bx+8$，令 $g(x)=x^5+ax^3+bx=f(x)-8$，

其中 $g(-x)=-x^5-ax^3-bx=-g(x)$，且定义域关于原点对称，所以函数 $g(x)$ 为奇函数，

即 $g(-x)+g(x)=f(-x)-8+f(x)-8=0$，

可得 $f(-x)+f(x)=16$，令 $x=2$，得 $f(-2)+f(2)=10+f(2)=16$，

解得 $f(2)=6$，

故选：C

10.【答案】B

【分析】由值域可求得所有 x 可能的取值；则定义域中元素分别为 2 个，3 个和 4 个，列举出所有可能的结果即可求得个数.

【详解】由 $2x^2-1=1$ 得：$x=\pm1$；由 $2x^2-1=7$ 得：$x=\pm2$

$\therefore$ 所求“孪生函数”的定义域分别为：$\{1,2\}$，$\{1,-2\}$，$\{-1,2\}$，$\{-1,-2\}$，$\{-1,1,2\}$，$\{-1,1,-2\}$，

$\{1,2,-2\}$，$\{-1,2,-2\}$，$\{1,-1,2,-2\}$

$\therefore$ 共有 9 个“孪生函数”

故选 B

【点睛】本题考查新定义的问题，涉及到函数定义域的求解；易错点是将值域误认为是无限集，造成求解错误.

二、填空题（每题 5 分）

11.【答案】$[-1,0)\cup(0,1]$

【分析】由二次根式的被开方数非负和分式的分母不为零，列不等式组可求得结果.

【详解】由题意得 $\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$，解得 $-1\leq x\leq 1$ 且 $x\neq 0$，

所以函数的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$，

故答案为：$[-1,0)\cup(0,1]$.

12.【答案】 ①. $\exists x_0\in(1,+\infty), x_0+\dfrac{1}{x_0-1}<a$ ②. $(-\infty,3]$

【分析】利用含有一个量词的命题的否定规律“改量词，否结论”分析即可得解；利用均值不等式和恒成立问题即可求出实数 a 的取值范围.

【详解】解：由题意，命题 p：$\forall x\in(1,+\infty), x+\dfrac{1}{x-1}\ge a$，

则由含有一个量词的命题的否定规律可得：$\neg p$：$\exists x_0\in(1,+\infty), x_0+\dfrac{1}{x_0-1}<a$.

因为命题 p：$\forall x\in(1,+\infty), x+\dfrac{1}{x-1}\ge a$ 为真命题

所以 $a\le x+\dfrac{1}{x-1}$ 当 $x\in(1,+\infty)$ 时恒成立，则 $a\le\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)_{\min}$，

因为 $x\in(1,+\infty)$，所以 $x-1>0$，

所以 $x+\dfrac{1}{x-1}=(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+1\ge 2\sqrt{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x-1}}+1=3$，

当且仅当 $x-1=\dfrac{1}{x-1}$ 即 $x=2$ 时等号成立，

所以 $\left(x+\dfrac{1}{x-1}\right)_{\min}=3$，则 $a\le 3$，即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,3]$.

故答案为：$\exists x_0\in(1,+\infty), x_0+\dfrac{1}{x_0-1}<a$；$(-\infty,3]$.

13.【答案】$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

【分析】根据奇偶性、单调性和 $f(2)=0$ 判断函数正负情况再解不等式即可.

【详解】因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

因为 $f(2)=0$，

所以当 $0<x<2$ 时，$f(x)<0$，

当 $x>2$ 时，$f(x)>0$，

又因为函数 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，

所以当 $-2<x<0$ 时，$f(x)<0$，

当 $x<-2$ 时，$f(x)>0$，

则 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，即 $\begin{cases}x<0\\ f(x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\ f(x)<0\end{cases}$，

则 $x<-2$ 或 $0<x<2$，

即不等式 $\dfrac{f(x)}{x}<0$ 的解集是 $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.

故答案为：$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

14.【答案】 ①. 9 ②. 6

【分析】根据基本不等式结合一元二次不等式求法即可得到答案.

【详解】①正实数 a、b 满足 $a+b+3=ab$，则 $a+b+3=ab\geq 2\sqrt{ab}+3$，

令 $t=\sqrt{ab}\,(t>0)$，则 $t^2-2t-3\geq 0$，

解得 $t\leq -1$（舍去）或 $t\geq 3$，

即 $ab\geq 3^2=9$，当且仅当 $a=b=3$ 时等号成立，故 ab 的最小值是 9.

②正实数 a、b 满足 $a+b+3=ab$，则 $a+b+3=ab\leq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，

令 $m=a+b\,(m>0)$，则 $m^2-4m-12\geq 0$，

则 $m\leq -2$（舍去）或 $m\geq 6$，

即 $a+b\geq 6$，当且仅当 $a=b=3$ 时等号成立，故 $a+b$ 的最小值是 6.

故答案为：9；6

15.【答案】①②④

【分析】

分别作出 $a=0$，$a>0$ 和 $a<0$ 的函数 $f(x)$ 的图象，由图象即可判断①②③④的正确性，即可得正确答案.

【详解】

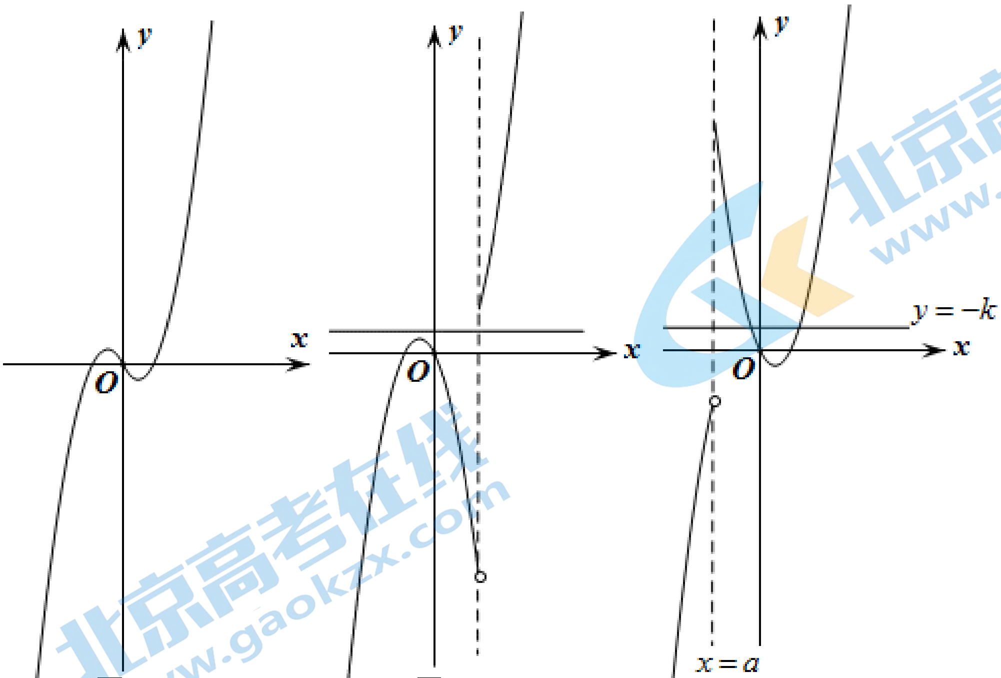


图1 图2 图3

如上图分别为 $a=0$，$a>0$ 和 $a<0$ 时函数 $f(x)$ 的图象，

对于①：当$a=0$时，$f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\ge 0\\ -x^2-2x, x<0\end{cases}$，

$f(x)$图象如图1关于原点对称，所以存在$a=0$使得函数$f(x)$为奇函数，故①正确；

对于②：由三个图知当$x\to-\infty$时，$y\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$y\to+\infty$，所以函数$f(x)$既无最大值也无最小值；故② 正确；

对于③：如图2和图3中存在实数k使得函数$y=f(x)$图象与$y=-k$没有交点，此时函数$y=f(x)+k$没有零点，所以对任意实数a和k，函数$y=f(x)+k$总存在零点不成立；故③ 不正确

对于④：如图2，对于任意给定的正实数m，取$a=m+1$即可使函数$f(x)$在区间$(-1,m)$上单调递减，故④正确；

故答案为：①②④

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键点是分段函数图象，涉及二次函数的图象，要讨论$a=0$，$a>0$和$a<0$即明确分段区间，作出函数图象，数形结合可研究分段函数的性质.

三、解答题（16-18 每题 14 分，19-20 每题 15 分，21 题 13 分）

16.【答案】（1）$\{x|-1\le x\le 7\}$；

（2）$a\le 3$.

【分析】（1）解绝对值不等式求集合A，再由并集运算求$A\cup B$；

（2）由题设有$B\subseteq A$，讨论$B=\varnothing$、$B\ne\varnothing$求参数范围即可.

【小问 1 详解】

由题设$A=\{x|-1\le x\le 5\}$，$B=\{x|5\le x\le 7\}$，

所以$A\cup B=\{x|-1\le x\le 7\}$.

【小问 2 详解】

由$A\cap B=B\Rightarrow B\subseteq A$，

当$B=\varnothing$时，$a+1>2a-1\Rightarrow a<2$；

当$B\ne\varnothing$时，$\begin{cases}a\ge 2\\ a+1\ge -1\\ 2a-1\le 5\end{cases}\Rightarrow 2\le a\le 3$；

综上，$a\le 3$.

17.【答案】（1）1

（2）证明见解析　（3）函数$f(x)$在$(0,2]$上单调递减，证明见解析

【分析】（1）根据$f(1)=5$直接带入求解；

（2）根据奇函数定义证明即可；

（3）根据函数单调性的定义判断和证明即可.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+4}{x}$，且 $f(1)=5$，

所以 $f(1)=a+4=5$，所以 $a=1$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$，定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 关于原点对称，

又因为 $f(x)+f(-x)=\dfrac{x^2+4}{x}-\dfrac{x^2+4}{x}=0$，即 $f(x)=-f(-x)$，

所以 $f(x)$ 为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数.

【小问 3 详解】

函数 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递减，证明如下：

任取 $x_1,x_2\in(0,2]$，且 $x_1<x_2$，

因为 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x}$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1+\dfrac{4}{x_1}-x_2-\dfrac{4}{x_2}=(x_1-x_2)+\left(\dfrac{4}{x_1}-\dfrac{4}{x_2}\right)=(x_1-x_2)-\dfrac{4(x_1-x_2)}{x_1x_2}$

$=(x_1-x_2)\dfrac{x_1x_2-4}{x_1x_2}$，

因为 $x_1,x_2\in(0,2]$，且 $x_1<x_2$，

所以 $x_1-x_2<0,x_1x_2>0,x_1x_2-4<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递减

18.【答案】（1）$[3,7]$

（2）$(-\infty,3]$

【分析】（1）根据二次函数特征直接求解即可；

（2）根据 $x\in[0,3]$ 进行分类讨论，通过参变分离的方法转化为最值问题求解即可.

【小问 1 详解】

当 $a=2$ 时，函数 $f(x)=x^2-2x+4$，开口向上，对称轴为 $x=\dfrac{-2}{-2}=1$，

又因为函数定义域为 $[0,3]$，所以 $f(1)\le f(x)\le f(3)$，即 $3\le f(x)\le 7$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $[3,7]$

【小问 2 详解】

因为 $\forall x\in[0,3]$，$f(x)\geq 0$ 恒成立，

所以当 $x=0$ 时，$4\geq 0$ 成立，$a\in\mathbf{R}$，

当 $0<x\leq 3$ 时，$f(x)=x^2-2(a-1)x+4\geq 0$，

即 $2ax\leq x^2+2x+4$，即 $2a\leq x+\dfrac{4}{x}+2$，

因为 $x+\dfrac{4}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}+2=6$，当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$，即 $x=2$ 时等号成立，

所以 $2a\leq\left(x+\dfrac{4}{x}+2\right)_{\min}=6$，所以 $a\leq 3$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,3]$

19.【答案】(1) $x=0$ 或 $x=-\dfrac{4}{3}$.

(2) ① $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$；② $\dfrac{4(k^2+3)}{9}$.

【分析】(1) 由题设有 $3x^2+4x=x(3x+4)=0$，即可求根；

(2) ①由 $\Delta>0$ 求实数 k 的取值范围；②应用根与系数关系及 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ 求表达式.

【小问 1 详解】

由题设 $3x^2+4x=x(3x+4)=0$，可得 $x=0$ 或 $x=-\dfrac{4}{3}$.

【小问 2 详解】

①由方程有两个不相等的实数根 x_1,x_2，则 $\Delta=16k^2-12\times(2k^2-2)>0$，

所以 $k^2<3\Rightarrow-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$，

②由根与系数关系知：$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{4k}{3}\\ x_1x_2=\dfrac{2(k^2-1)}{3}\end{cases}$，

所以 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{16}{9}k^2-\dfrac{4(k^2-1)}{3}=\dfrac{4(k^2+3)}{9}$.

20.【答案】(1) $C(x)=\begin{cases}\dfrac{80-4x}{5},(0\leq x\leq 10)\\ \dfrac{80}{x},(x>10)\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}160-7.5x,(0\leq x\leq 10)\\ \dfrac{800}{x}+0.5x,(x>10)\end{cases}$

(2) 当 x 为 40 平方米时，$F(x)$ 取得最小值，最小值是 40 万元

【分析】(1) 根据题意可知 $x=5$ 时 $C(x)=12$，代入即可求得的 m 值可得 $C(x)$ 解析式；根据题意可知

$F(x)=10C(x)+0.5x$，由此化简可得 $F(x)$ 的解析式；

（2）分段讨论 $F(x)$ 的最小值，从而得到 $F(x)$ 的最小值及 x 的值.

【小问 1 详解】

根据 $x=5$ 时，$C(x)=12$，

而当 $0\le x\le 10$，$C(x)=\dfrac{m-4x}{5}$，

所以 $\dfrac{m-4\times 5}{5}=12$，解得 $m=80$，

所以 $C(x)=\begin{cases}\dfrac{80-4x}{5},(0\le x\le 10)\\ \dfrac{80}{x},(x>10)\end{cases}$，

$F(x)=10C(x)+0.5x$，

所以 $F(x)=\begin{cases}160-7.5x,(0\le x\le 10)\\ \dfrac{800}{x}+0.5x,(x>10)\end{cases}$；

【小问 2 详解】

当 $0\le x\le 10$，$F(x)=-7.5x+160$，此时 $F(x)$ 在 $x\in[0,10]$ 上单调递减，

所以 $F(x)_{\min}=F(10)=-7.5\times 10+160=85$，

当 $x>10$，$F(x)=0.5x+\dfrac{800}{x}\ge 2\sqrt{400}=40$，

当且仅当 $0.5x=\dfrac{800}{x}$ 即 $x=40$ 时等号成立，故 $F(x)_{\min}=40$，

综上所述，$F(x)_{\min}=40$，此时 $x=40$，

故当 x 为 40 平方米时，$F(x)$ 取得最小值，最小值是 40 万元.

21.【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析；（3）$a\in\{a\,|\,-\dfrac{1}{3}<a<0$ 或 $0<a<1\}$.

【分析】

（1）对自变量 x_1,x_2 赋值，分别求出 $f(1)=0$，$f(-1)=0$，然后令 $x_1=-1,x_2=x$，可得 $f(-x)=f(-1\cdot x)=f(-1)+f(x)=f(x)$，从而可证得结论；

（2）利用单调性的定义证明，设 $x_2>x_1>0$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1\cdot\dfrac{x_2}{x_1})-f(x_1)=f(x_1)+f(\dfrac{x_2}{x_1})-f(x_1)=f(\dfrac{x_2}{x_1})$，再结合已知条件可判断其差大于零，从而可证得结论；

（3）由于 $f(2)=1$，所以 $f(a+1)>f(a)+1=f(a)+f(2)=f(2a)$，再利用偶函数的性质和函数的单调性可得 $|a+1|>|2a|$，解不等式可得答案

【详解】（1）由题意知，对定义域内的任意 x_1,x_2 都有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

令 $x_1=x_2=1$，代入上式解得 $f(1)=f(1)+f(1)$

所以 $f(1)=0$

令 $x_1=x_2=-1$，代入上式解得 $f(1)=f(-1)+f(-1)$

所以 $f(-1)=0$

令 $x_1=-1,x_2=x$，代入上式，$f(-x)=f(-1\cdot x)=f(-1)+f(x)=f(x)$

所以 $f(x)$ 是偶函数．

（2）设 $x_2>x_1>0$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_1\cdot\frac{x_2}{x_1})-f(x_1)=f(x_1)+f(\frac{x_2}{x_1})-f(x_1)=f(\frac{x_2}{x_1})$

因为 $x_2>x_1>0$，得 $\frac{x_2}{x_1}>1$

所以 $f(\frac{x_2}{x_1})>0$

即 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．

（3）因为 $f(2)=1$

所以 $f(a+1)>f(a)+1=f(a)+f(2)=f(2a)$

因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(|x|)=f(-x)=f(x)$

则 $f(a+1)>f(2a)\Leftrightarrow f(|a+1|)>f(|2a|)$

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

所以 $|a+1|>|2a|$

两边平方得 $a^2+2a+1>4a^2$

即 $3a^2-2a-1<0$

解得 $-\frac{1}{3}<a<1$

又因为 $\begin{cases}a+1\neq 0\\2a\neq 0\end{cases}$

所以$a \in \left\{ a \middle| -\frac{1}{3} < a < 0或0 < a < 1 \right\}$

【点睛】方法点睛：此题考查抽象函数奇偶性的判断，单调性的判断，考查了解抽象不等式，与抽象函数有关的方法有：

（1）通常利用赋值法求出 $f(0), f(1), f(-1)$ 等值，再结合奇偶性的定义判断即可；

（2）判断抽象函数的单调性时，一般利用单调性的定义结合已知条件判断；

（3）在求解与抽象函数有关的不等式时，往往利用函数的单调性将“f”符号脱掉，使其转化为具体的不等式求解即可，此时要注意函数的定义域

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！