2020 年石景山区高三统一测试

数 学

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 设集合 $P=\{1,2,3,4\}$，$Q=\{x\,|\,|x|\le 3,x\in R\}$，则 $P\cap Q$ 等于

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

2. 在复平面内，复数 5+6i， 3-2i 对应的点分别为 A, B. 若 C 为线段 AB 的中点，则点 C 对应的复数是

A. 8+4i　　B. 2+8i　　C. 4+2i　　D. 1+4i

3. 下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

A. $y=-x^2+2$　　B. $y=2^{-x}$　　C. $y=\ln x$　　D. $y=\dfrac{1}{x}$

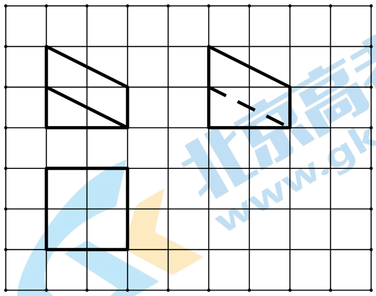
4. 圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则 $a=$

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. 将 4 位志愿者分配到博物馆的 3 个不同场馆服务，每个场馆至少 1 人，不同的分配方案有（　　）种

A. 36　　B. 64　　C. 72　　D. 81

6. 如图，网格纸的小正方形的边长是 1，粗线表示一正方体被某平面截得的几何体的三视图，则该几何体的体积为



A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 8

7. 函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$）的最小正周期为 π，则 $f\left(x\right)$ 满足

A. 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增

B. 图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称

C. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D. 当 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 时有最小值 -1

8. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n. 则“$S_1+S_3>2S_2$”是“$\{a_n\}$ 为递增数列”的

A.充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若存在两个不等实数 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 P，那么下列函数：

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$；② $f(x)=x^2$；③ $f(x)=|x^2-1|$；

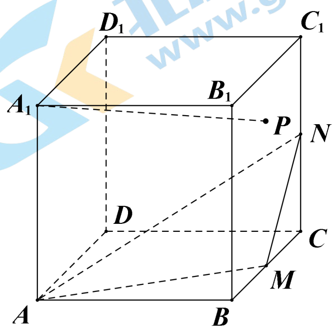
具有性质 P 的函数的个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 点 M，N 分别是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱 BC,CC_1 的中点，动点 P 在正方形 BCC_1B_1（包括边界）内运动.若 $PA_1//$ 面 AMN，则 PA_1 的长度范围是

A. $\left[2,\sqrt{5}\right]$　　B. $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},\sqrt{5}\right]$

C. $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2},3\right]$　　D. $\left[2,3\right]$



第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知向量 $\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，则 $\angle ABC=$__________.

12. 已知各项为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，其前 n 项和为 $S_n\left(n\in N^*\right)$，且 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$，则 $S_4=$__________.

13. 能够说明“设 a,b 是任意非零实数，若“$a>b$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”是假命题的一组整数 a,b 的值依次为____________.

14. 已知 F 是抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N．若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$__________.

15. 石景山区为了支援边远山区的教育事业，组织了一支由 13 名一线中小学教师组成的支教团队，记者采访其中某队员时询问这个团队的人员构成情况，此队员回答：①有中学高级教师；②中学教师不多于小学教师；③小学高级教师少于中学中级教师；④小学中级教师少于小学高级教师；⑤支教队伍的职称只有小学中级、小学高级、中学中级、中学高级；⑥无论是否把我计算在内，以上条件都成立.由此队员的叙述可以推测出他的学段及职称分别是_______、_______.

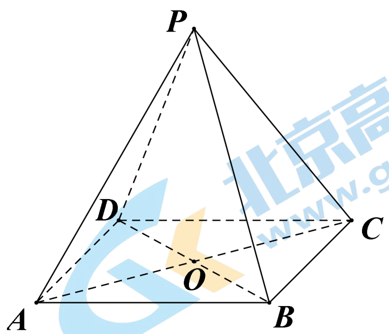
三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题 14 分）

如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=PB=2\sqrt{2}$，$AC\cap BD=O$.

（Ⅰ）求证：$BO\perp$ 面 PAC；

（Ⅱ）求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



17.（本小题 14 分）

2020 年，北京将实行新的高考方案. 新方案规定：语文、数学和英语是考生的必考科目，考生还需从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选取三个科目作为选考科目. 若一个学生从六个科目中选出了三个科目作为选考科目，则称该学生的选考方案确定；否则，称该学生选考方案待确定. 例如，学生甲选择“物理、化学和生物”三个选考科目，则学生甲的选考方案确定，“物理、化学和生物”为其选考方案.

某校为了解高一年级 840 名学生选考科目的意向，随机选取 60 名学生进行了一次调查，统计选考科目人数如下表：

性别	选考方案确定情况	物理	化学	生物	历史	地理	政治
男生	选考方案确定的有 16 人	16	16	8	4	2	2
	选考方案待确定的有 12 人	8	6	0	2	0	0
女生	选考方案确定的有 20 人	6	10	20	16	2	6
	选考方案待确定的有 12 人	2	8	10	0	0	2

(Ⅰ)估计该学校高一年级选考方案确定的学生中选考生物的学生有多少人？

(Ⅱ)从选考方案确定的 16 名男生中随机选出 2 名，求恰好有一人选“物理、化学、生物”的概率；

(Ⅲ) 从选考方案确定的 16 名男生中随机选出 2 名，

设随机变量 $\xi=\begin{cases}0 & \text{两名男生选考方案不同}\\ 1 & \text{两名男生选考方案相同}\end{cases}$，求 ξ 的分布列和期望.

18.（本小题 14 分）

已知锐角 $\triangle ABC$，同时满足下列四个条件中的三个：

① $A=\dfrac{\pi}{3}$　② $a=13$　③ $c=15$　④ $\sin C=\dfrac{1}{3}$

(Ⅰ)请指出这三个条件，并说明理由；

(Ⅱ)求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$．直线 l 过点 F 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A,B，线段 AB 的中点为 M．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值；

（Ⅲ）延长线段 OM 与椭圆 C 交于点 P，若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，求此时直线 l 的斜率．

20. （本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2\,(x>0), g(x)=a\ln x\,(a>0)$．

（Ⅰ）若 $f(x)>g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，过 $f(x)$ 上一点 $(1,1)$ 作 $g(x)$ 的切线，判断：可以作出多少条切线，并说明理由．

21.（本小题 14 分）

有限个元素组成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$n\in \mathrm{N}^*$，记集合 A 中的元素个数为 $card(A)$，即 $card(A)=n$．定义 $A+A=\{x+y\,|\,x\in A,y\in A\}$，集合 $A+A$ 中的元素个数记为 $card(A+A)$，当 $card(A+A)=\frac{n(n+1)}{2}$ 时，称集合 A 具有性质 P．

（Ⅰ）$A=\{1,4,7\}$，$B=\{2,4,8\}$，判断集合 A,B 是否具有性质 P，并说明理由；

（Ⅱ）设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,2020\}$，$a_1<a_2<a_3<2020$ 且 $a_i\in N^*(i=1,2,3)$，若集合 A 具有性质 P，求 $a_1+a_2+a_3$ 的最大值；

（Ⅲ）设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，其中数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 且公比为有理数，判断集合集合 A 是否具有性质 P 并说明理由．

2020 年石景山区高三统一测试

数学试卷答案及评分参考

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	A	A	B	D	C	C	B

二、填空题：本大题共 5 个小题，每小题 5 分，共 25 分．

11．$\dfrac{\pi}{6}$；　　12．15；　　13．　2，-1；答案不唯一

14．3；　　15．小学中级　．

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 85 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

16．（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：联结 PO．

在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，

$PO\perp$ 底面 $ABCD$．

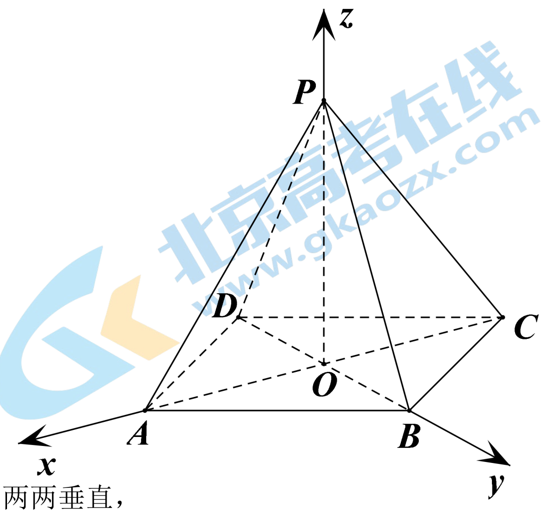
因为 $BO\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp BO$．　　…………3 分

在正方形 $ABCD$ 中，$BO\perp AC$，

又因为 $PO\cap AC=O$，

所以 $BO\perp$ 面 PAC．　　…………6 分



（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知，PO，AO，BO 两两垂直，

以 O 为坐标原点建立如图所示空间直角坐标系．　　…………7 分

在正方形 $ABCD$ 中，因为 $AB=2\sqrt{2}$，

所以 $AO=2$．

又因为 $PB=2\sqrt{2}$，

所以 $PO=2$．

所以点 P 的坐标为 $P(0,0,2)$，点 C 的坐标为 $C(-2,0,0)$，

点 B 的坐标为 $B(0,2,0)$． …………8 分

则 $\overrightarrow{PC}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{CB}=(2,2,0)$． …………9 分

由（Ⅰ）知，$BO\perp$ 平面 PAC．

所以平面 PAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$． …………10 分

设平面 PBC 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$．

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x-2z=0,\\ 2x+2y=0.\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=-1$，$z=1$．

故平面 PBC 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=(-1,1,1)$． …………13 分

$$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． …………14 分

17.（本小题 14 分）

解：(Ⅰ) 由数据知，60 人中选考方案确定的学生中选考生物的学生有 8+20=28 人 …1 分

所以该学校高一年级选考方案确定的学生中选考生物的学生有

$840\times\dfrac{28}{60}=392$ 人 ………4 分

(Ⅱ) 选考方案确定且为“物理，化学，生物”的男生共有 8 人。 ……5 分

设“恰好有一人选物理、化学、生物”为事件 A ……6 分

$p(A)=\dfrac{C_8^1C_8^1}{C_{16}^2}=\dfrac{8}{15}$ ……8 分

（III）由数据可知，选考方案确定的男生中有 8 人选择物理、化学和生物；有 4 人选择物理、化学和历史；有 2 人选择物理、化学和地理；有 2 人选择物理、化学和政治． ……9 分

ξ 的可能取值为 0,1．

$$P(\xi=0)=\frac{C_8^1C_8^1+C_4^1C_4^1+C_2^1C_2^1}{C_{16}^2}=\frac{7}{10}$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_8^2+C_4^2+C_2^2+C_2^2}{C_{16}^2}=\frac{3}{10}$$ ……12 分

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

$$E\xi=0\times\frac{7}{10}+1\times\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$$ ……14 分

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）$\triangle ABC$ 同时满足①，②，③． ………… 3 分

理由如下：

若 $\triangle ABC$ 同时满足①，④，则在锐角 $\triangle ABC$ 中，

$\sin C=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，所以 $0<C<\frac{\pi}{6}$

又因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{3}<A+C<\frac{\pi}{2}$

所以 $B>\frac{\pi}{2}$，这与 $\triangle ABC$ 是锐角三角形矛盾，

所以 $\triangle ABC$ 不能同时满足①，④， ………… 6 分

所以$\triangle ABC$同时满足②，③ . ············ 7 分

因为$c>a$ 所以$C>A$ 若满足④

则$A<C<\dfrac{\pi}{6}$ ，则$B>\dfrac{\pi}{2}$,这与$\triangle ABC$是锐角三角形矛盾

故$\triangle ABC$不满足④. ············ 9 分

故$\triangle ABC$满足①，②，③.

（Ⅱ）因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$， ············10 分

所以 $13^2=b^2+15^2-2\times b\times 15\times\dfrac{1}{2}$.

解得 $b=8$或$b=7$. ············ 12 分

当$b=7$时， $\cos C=\dfrac{7^2+13^2-15^2}{2\times 7\times 13}<0$

所以C为钝角，与题意不符合，所以$b=8$. ············ 13 分

所以$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=30\sqrt{3}$. ············14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）由已知$c=1$， $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ············2 分

又$a^2=b^2+c^2$，解得$a=\sqrt{2},b=1$ ············4 分

所以椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ············5 分

（Ⅱ）设直线l的方程为$y=k(x-1)(k\neq 0)$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=k(x-1)(k\neq 0)\end{cases}$ 消去y得

$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，不妨设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ ······7 分

则$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，因为$M$为线段$AB$的中点

所以 $x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{2k^2+1}$， $y_M=k(x_M-1)=\dfrac{-k}{2k^2+1}$ ………8 分

所以 $k_{OM}=\dfrac{y_M}{x_M}=\dfrac{-1}{2k}$ …………9 分

所以 $k_{OM}\times k_l=\dfrac{-1}{2k}\times k=-\dfrac{1}{2}$ 为定值. …………10 分

（III）若四边形 $OAPB$ 为平行四边形,则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$ …………12 分

所以 $x_P=x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$

$y_P=y_1+y_2=k(x_1-1)+k(x_2-1)=k(x_1+x_2-2)=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$ …………13 分

因为点 P 在椭圆上，所以 $(\dfrac{4k^2}{2k^2+1})^2+2\times(\dfrac{-2k}{2k^2+1})^2=2$ ……14 分

解得 $k^2=\dfrac{1}{2}$ 即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

所以当四边形 $OAPB$ 为平行四边形时，直线 l 的斜率为 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ………15 分

20.（本小题 14 分）

.解：（Ⅰ）令 $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-a\ln x\ (x>0)$ …………1 分

所以 $h'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a^2}{x}$

令 $h'(x)=\dfrac{2x^2-a^2}{x}=0$，解得 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$. …………3 分

当x变化时，$h'(x),h(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,\sqrt{\frac{a}{2}})$	$\sqrt{\frac{a}{2}}$	$(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty)$
$h'(x)$	–	0	+
$h(x)$	减	极小值	增

…………5 分

所以在$(0,+\infty)$的最小值为$h(\sqrt{\frac{a}{2}})=\frac{a}{2}-a\ln\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}$ ……6 分

令 $h(\sqrt{\frac{a}{2}})>0$ 解得$0<a<2e$.

所以当$0<a<2e$时，$h(x)>0$恒成立，即$f(x)>g(x)$恒成立. ………7 分

（Ⅱ）可作出 2 条切线. …………8 分

理由如下：当$a=1$时，$g(x)=\ln x$.

设过点(1,1)的直线l与$g(x)=\ln x$相切于点$P(x_0,y_0)$， …………9 分

则$g'(x_0)=\frac{y_0-1}{x_0-1}$ 即$\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0-1}{x_0-1}$

整理得$x_0\ln x_0-2x_0+1=0$ …………10 分

令$m(x)=x\ln x-2x+1$，则$m(x)$在$(0,+\infty)$上的零点个数与切点P的个数一一对应.

$m'(x)=\ln x-1$，令$m'(x)=\ln x-1=0$解得$x=e$. …………11 分

当x变化时，$m'(x),m(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$m'(x)$	–	0	+
$m(x)$	减	极小值	增

所以 $m(x)$在$(0,e)$上单调递减，在$(e,+\infty)$上单调递增.

且 $m(\frac{1}{e^2})=\frac{1}{e^2}\times\ln\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e^2}+1=-\frac{4}{e^2}+1>0$

$m(e)=e\times\ln e-2e+1=-e+1<0$

$m(e^2)=e^2\times\ln e^2-2e^2+1=1>0$ …………13 分

所以 $m(x)$ 在 $(\frac{1}{e^2},e)$ 和 (e,e^2) 上各有一个零点，即 $x\ln x-2x+1=0$ 有两个不同的解.

所以 过点 $(1,1)$ 可作出 $y=\ln x$ 的 2 条切线. …………14 分

21.（本小题 14 分）

解：(Ⅰ)集合 A 不具有性质 P，集合 B 具有性质 P.

$A+A=\{2,5,8,11,14\}$, $card(A+A)=5\neq\frac{3(3+1)}{2}$ 不具有性质 P；

$B+B=\{4,6,8,10,12,16\}$, $card(B+B)=6=\frac{3(3+1)}{2}$,具有性质 P. …………3 分

（Ⅱ）若三个数 a,b,c 成等差数列，则 $A=\{a,b,c\}$ 不具有性质 P，理由是 $a+c=2b$.

因为 $a_1<a_2<a_3<2020$ 且 $a_i\in N^*(i=1,2,3)$ 所以 $a_3\leq 2019$，

要使 $a_1+a_2+a_3$ 取最大，则 $a_3=2019$；

$a_2\leq 2018$，易知 $\{2018,2019,2020\}$ 不具有性质 P，要使 $a_1+a_2+a_3$ 取最大，

则 $a_2=2017$；

$a_1\leq 2016$，要使 $a_1+a_2+a_3$ 取最大，检验可得 $a_1=2014$；

$(a_1+a_2+a_3)_{\max}=6050$ …………8 分

（Ⅲ）集合 A 具有性质 P.

设等比数列的公比为为 q，所以 $a_n=a_1q^{n-1}(a_1>0)$ 且 q 为有理数，

假设当 $i<k\leq l<j$ 时有 $a_i+a_j=a_k+a_l$ 成立，则有

$q^{j-i}=q^{k-i}+q^{l-i}-1$ …………10 分

因为q为有理数，设$q=\dfrac{m}{n}(m,n\in N^*)$且（$m,n$互质），因此有

$(\dfrac{m}{n})^{j-i}=(\dfrac{m}{n})^{k-i}+(\dfrac{m}{n})^{l-i}-1$即$m^{j-i}=m^{k-i}n^{j-k}+m^{l-i}n^{j-l}-n^{j-i}$（1），

（1）式左边是m的倍数，右边是n的倍数，又m,n互质，

显然$a_i+a_j=a_k+a_l$不成立. ……12 分

所以$card(A+A)=C_n^1+C_n^2=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以集合$A$具有性质$P$. ……14 分

【若有不同解法，请酌情给分】