华大新高考联盟 2020 届高三 1 月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

扫码关注 查询成绩

一、选择题

1.【答案】B

【命题意图】本题考查复数的运算、复数的概念,考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意,$z=(2+5i)(3-i)=6-2i+15i+5=11+13i$,故$|z|=\sqrt{121+169}=\sqrt{290}$,故选 B.

2.【答案】C

【命题意图】本题考查集合的表示、集合的运算,考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意,$U=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$,则 $M=\{-1,0,2,5,6\}$,故 $M\cap N=\{-1,2,5\}$,则 $M\cap N$ 的元素个数为 3,故选 C.

3.【答案】B

【命题意图】本题考查指对数的大小比较,考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意,$a=\sqrt[4]{6}=6^{\frac{1}{4}}>6^0=1$,$b=\log_{\frac{5}{4}}\frac{4}{21}<\log_{\frac{5}{4}}1=0$,$0<c=\left(\frac{1}{3}\right)^{2.9}<\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$,故 $a>c>b$,故选 B.

4.【答案】B

【命题意图】本题考查推理与证明,考查推理论证能力以及分类讨论思想.

【解析】依题意,三个人制作的所有情况如下所示:

	1	2	3	4	5	6
鸿福齐天	小明	小明	小红	小红	小金	小金
国富民强	小红	小金	小金	小明	小红	小明
兴国之路	小金	小红	小明	小金	小明	小红

若小明的说法正确,则均不满足;若小红的说法正确,则 4 满足;若小金的说法正确,则 3 满足. 故"鸿福齐天"的制作者是小红,故选 B.

5.【答案】A

【命题意图】本题考查函数的图像与性质,考查推理论证能力以及数形结合思想.

【解析】依题意,$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}+\frac{(-x)^2\cos(-x)}{20}=\frac{\sin x}{x}+\frac{x^2\cos x}{20}=f(x)$,故函数 $f(x)$ 为偶函数,图像关于 y 轴对称,排除 C;而 $f(\pi)=-\frac{\pi^2}{20}<0$,排除 B;$f(2\pi)=\frac{\pi^2}{5}>0$,排除 D. 故选 A.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查系统抽样,考查数学建模能力以及必然与或然思想.

【解析】依题意,将这 800 人分为 100 组,每组 8 人,即分段间隔为 8;因为$\frac{105-25}{8}=10$,故①正确;若 32 号员工被抽到,则 1 到 100 号的员工中被抽取的号码为 8,16,24,32,40,48,56,64,72,80,88,96,共计 12 人,故②错误;若 88 号员工未被抽到,则 10 号员工可能被抽到,故③错误. 故选 B.

7.【答案】B

【命题意图】本题考查向量的坐标运算、向量的数量积应用,考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】依题意,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(m+2,-3)$,而$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$,即$-m-2-6=0$,解得 $m=-8$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{10}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{65}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,故选 B.

8.【答案】B

【命题意图】本题考查诱导公式、两角差的正切公式，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】$\tan\alpha=\tan[(\alpha+\beta)-\beta]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\beta}=\frac{1}{7}$，$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}=7$，故选 B.

9.【答案】A

【命题意图】本题考查算法与程序框图.考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】程序框图是为了计算 7 个数的方差，即输出的 $S=\frac{1}{7}[(x_1-20)^2+(x_2-20)^2+\cdots+(x_7-20)^2]$，观察可知，选 A.

10.【答案】B

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】不妨设 $m>0$，$|NF_2|$即为双曲线的焦点到渐近线的距离，故$|NF_2|=b$，因为$\triangle NOF_2$ 的面积是$\triangle MON$ 的 2 倍，故 $2S_{\triangle MOF_2}=3S_{\triangle NOF_2}$. 不妨设 $m>0$，则直线 MF_2：$y=-\frac{a}{b}(x-c)$，故 $m=\frac{ac}{b}$. 而 $2|MF_2|=3|NF_2|$，则 $2\sqrt{\frac{a^2c^2}{b^2}+c^2}=3b$，即 $3a^2=c^2$，故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$，故选 B.

11.【答案】B

【命题意图】本题考查解三角形，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】因为 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\sqrt{7}$，且$\sin^2C+\cos^2C=1$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{14}}{4}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 而 $c=2a$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\sin A=\frac{1}{2}\sin C=\frac{\sqrt{14}}{8}$，$\cos A=\frac{5\sqrt{2}}{8}$，故 $\sin B=\sin[\pi-(A+C)]=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$. 因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，$b=3\sqrt{2}$，故 $a=2$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$，故选 B.

12.【答案】C

【命题意图】本题考查椭圆的方程与性质，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】设 $PF_1=n$，$PF_2=m$，由 $x_1>0$，$y_1>0$ 知 $m<n$，由 $P(x_1,y_1)$，$Q(-x_1,-y_1)$在椭圆 C 上，$|PQ|=2|OF_2|$可知四边形 PF_1QF_2 为矩形，$QF_1=QF_2$；由$\frac{|QF_1|}{|PF_1|}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{m}{n}<1$，由椭圆的定义可得 $m+n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，平方相减可得 $mn=2(a^2-c^2)$，所以$\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$，而 $2<\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{3\sqrt{4}}{3}$，由 $2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}$可得 $a^2<2c^2$，$e=\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，由$\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{3\sqrt{4}}{3}$，可得 $\frac{c^2}{a^2}\leqslant\frac{2}{2+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$，所以 $e=\frac{c}{a}\leqslant\sqrt{3}-1$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<e\leqslant\sqrt{3}-1$，故选 C.

二、填空题

13.【答案】$y=2x$

【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$y'=\frac{(2x+2)e^x-e^x(x^2+2x)}{e^{2x}}=\frac{(2x+2)-(x^2+2x)}{e^x}$，故 $k=y'|_{x=0}=2$，故所求切线方程为 $y=2x$.

14.【答案】$\frac{2^{n+1}}{3}$

【命题意图】本题考查等比数列的通项公式、前 n 项和公式，考查运算求解能力以及化归与转化思想.

【解析】记数列$\{a_n\}$的公比为q，显然$q\neq1$，则$\frac{S_4}{S_2}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=5$，解得$q=\pm2$；而$a_n>0$，故$q=2$，故$S_2=a_1+a_2=3a_1=4$，解得$a_1=\frac{4}{3}$，故$a_n=\frac{4}{3}\cdot2^{n-1}=\frac{2^{n+1}}{3}$.

15.【答案】$[-\sqrt{6}+\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

【命题意图】本题考查三角函数的图像与性质，考查运算求解能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$f(x)=\sqrt{3}\sin2x-(\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sin^2x)+\sqrt{3}=\sqrt{3}\sin2x-\sqrt{3}\cos2x+\sqrt{3}=\sqrt{6}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}$，当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$，故$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，故$\sqrt{6}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\in[-\sqrt{6}+\sqrt{3},2\sqrt{3}]$.

16.【答案】$\frac{81}{4}$

【命题意图】本题考查组合体与球，考查空间想象能力以及数形结合思想.

【解析】依题意，$\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi\Rightarrow R=3$，将四棱锥$P$-$ABCD$补成长方体，可知外接球的直径为长方体的体对角线，设长方体的长、宽、高分别为a,b,c，且$c=3$，由于$a^2+b^2=27$，又$a^2+b^2\geqslant2ab$，当且仅当$a=b=\frac{3\sqrt{6}}{2}$时等号成立，此时$(ab)_{\max}=\frac{27}{2}$，要使得四棱锥M-$ABCD$的体积最大，只需点M为平面$ABCD$的中心O'与球心O所在的直线与球的交点，又$OO'=\sqrt{R^2-\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{27}{4}}=\frac{3}{2}$，故$M$-$ABCD$体积的最大值为$\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}\times\left(\frac{3}{2}+3\right)=\frac{81}{4}$.

三、解答题

17.【命题意图】本题考查频率分布直方图、样本的数字特征，考查运算求解能力以及必然与或然思想.

【解析】(1)依题意，$(0.00015+0.0002+a+0.00006)\times2000=1$，…… 2分

解得$a=0.00009$. …… 4分

(2)由图可知，A地区200家实体店该品牌洗衣机的月经济损失的众数为3000，…… 6分

第一块小矩形的面积$S_1=0.3$，第二块小矩形的面积$S_2=0.4$，

故所求中位数在$[2000,4000)$之间，故所求中位数为$2000+\frac{0.5-0.3}{0.0002}=3000$. …… 9分

(3)$\bar{x}<6000$. …… 12分

18.【命题意图】本题考查等差数列的通项公式、前n项和公式、等比数列的前n项和公式，考查运算求解能力以及函数与方程思想.

【解析】(1)记数列$\{a_n\}$的公差为d，$S_{15}=30\Rightarrow15a_8=30\Rightarrow a_8=2$，…… 1分

故$d=\frac{a_{10}-a_8}{10-8}=1$，…… 2分

故$a_n=a_{10}+(n-10)d=4+n-10=n-6$，…… 3分

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=-5n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2}{2}-\frac{11n}{2}$. …… 5分

(2)依题意，$2^{a_n+4}+a_n=n-6+2^{n-2}$，

$T_n=(-5-4+\cdots+n-6)+(2^{-1}+2^0+\cdots+2^{n-2})=\frac{n(n-11)}{2}+\frac{2^n-1}{2}$，…… 7分

当$n=1$时，$T_1=\frac{-1\times10+2^1-1}{2}<0$；

当 $n=2$ 时，$T_2=\frac{-2\times9+2^2-1}{2}<0$；

当 $n=3$ 时，$T_3=\frac{-3\times8+2^3-1}{2}<0$；

当 $n=4$ 时，$T_4=\frac{-4\times7+2^4-1}{2}<0$；………………………………………………………… 9 分

当 $n\geqslant5$ 时，$\frac{n(n-11)}{2}\geqslant-15$，$\frac{2^n-1}{2}\geqslant\frac{31}{2}$，所以 $T_n>0$. ……………………………………………… 11 分

故满足 $T_n>0$ 的最小正整数 n 的值为 5. ……………………………………………………………… 12 分

19.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、空间几何体的结构特征、空间想象能力以及数形结合思想.

【解析】(1)连接 MG.

因为 $AB\perp AD$，$AD\perp DC$，故 $AB/\!/CD$. ……………………………………………………………… 1 分

设 $DC=1$，$AB=2$，得 $\frac{AG}{GC}=\frac{AB}{DC}=2$. ……………………………………………………………… 3 分

因为 $SC/\!/$平面 MBD，平面 $SAC\cap$平面 $MBD=MG$，$SC\subset$平面 SAC，

故 $SC/\!/MG$，故 $\frac{SM}{MA}=\frac{CG}{AG}=\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………… 5 分

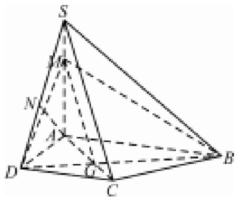
(2)在平面 SAD 内作 $AN\perp SD$ 于点 N，

因为 $SA\perp$平面 $ABCD$，所以 $DC\perp SA$，

又 $DC\perp AD$，$SA\cap AD=A$，得 $DC\perp$平面 SAD. ……………………………… 7 分

因为 $AN\subset$平面 SAD，所以 $CD\perp AN$.

又 $SD\cap CD=D$，所以 $AN\perp$平面 SCD. ……………………………………………… 9 分



因为直线 SC 与平面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

即 $\sin\angle ASC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

又 $AC=\sqrt{2}$，故 $SC=\frac{\sqrt{10}}{2}$，

则 $SA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，而 $AD=1$，$SA\perp AD$，得 $SD=\frac{\sqrt{6}}{2}$， ……………………………………………… 11 分

$AN=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即点 A 到平面 SCD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………… 12 分

20.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查推理论证能力以及函数与方程思想.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=\frac{-x\cos x+\sin x-\pi}{x^2}$，……………………………………………………… 1 分

令 $g(x)=-x\cos x+\sin x-\pi$，则 $g'(x)=x\sin x$，……………………………………………………… 2 分

故当 $x\in(0,\pi)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(\pi,2\pi)$时，$g'(x)<0$，……………………………………………… 3 分

故$[g(x)]_{\max}=g(\pi)=0$，故 $g(x)\leqslant0$ 在$(0,2\pi)$上恒成立，……………………………………………… 4 分

故 $f'(x)\leqslant0$，……………………………………………………………………………………… 5 分

即函数 $f(x)$在$(0,2\pi)$上单调递减. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)依题意，$f(x)>a\ln\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{\pi}{x}+a\ln x-\frac{\sin x}{x}>0$.

下面证明：①当 $x\in(0,\pi)$时，$0<\frac{\sin x}{x}<1$；②当 $0<a<\pi$ 时，$\frac{\pi}{x}+a\ln x>1$；

事实上，$h(x)=x-\sin x$，则 $h'(x)=1-\cos x>0$，所以 $h(x)=x-\sin x$ 在$(0,\pi)$上单调递增，

故 $h(x)>h(0)=0$，则 $x-\sin x>0$，

又 $x>0$，$\sin x>0$，则 $0<\frac{\sin x}{x}<1$， ………………………………………… 8 分

令 $s(x)=\frac{\pi}{x}+a\ln x$，则 $s'(x)=\frac{a}{x}-\frac{\pi}{x^2}=\frac{ax-\pi}{x^2}$，

由 $s'(x)=0$，得 $s(x)$ 的极小值点为 $x_0=\frac{\pi}{a}$，若 $x_0=\frac{\pi}{a}\in(0,\pi)$，则 $1<a<\pi$，

则 $s(x_0)=\frac{\pi}{x_0}+a\ln x_0=a+a\ln\frac{\pi}{a}>a>1$，故 $s(x)=\frac{\pi}{x}+a\ln x>1$， ………… 10 分

若 $x_0=\frac{\pi}{a}\geqslant\pi$，即 $0<a\leqslant 1$，则 $s(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，故 $s(x)>s(\pi)=1+a\ln\pi>1$． ………… 11 分

综上所述，当 $0<a<\pi$ 时，$\frac{\pi}{x}+a\ln x>1$，

则 $\frac{\pi}{x}+a\ln x-\frac{\sin x}{x}>0$，即 $f(x)>a\ln\frac{1}{x}$． ………………………………… 12 分

21.【命题意图】本题考查直线与椭圆的关系、基本不等式，考查运算求解能力以及化归与转化思想．

【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{5}+y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{5}+y_2^2=1$， ………………………… 1 分

两式相减，可得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{5}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$， ………………………… 2 分

即 $\frac{4(x_1-x_2)}{5}+\frac{2(y_1-y_2)}{3}=0$， ………………………………………… 3 分

解得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{6}{5}$，即直线 MN 的斜率为 $-\frac{6}{5}$． ………………………………… 5 分

(2)显然直线 NF_1 的斜率不为 0，设直线 NF_1：$x=my-2$，$N(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my-2,\\x^2+5y^2=5,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $(m^2+5)y^2-4my-1=0$， ………………………… 7 分

显然 $\Delta=20(m^2+1)>0$，故 $y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+5}$，$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+5}$， ………………………… 8 分

故△PMN 的面积 $S_{\triangle PMN}=2S_{\triangle OPN}=2\times\frac{1}{2}\times|OF_1|\times|y_1-y_2|=\frac{4\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}$， ………… 9 分

令 $\sqrt{m^2+1}=t$，其中 $t\geqslant 1$，$S_{\triangle PMN}=\frac{4\sqrt{5}t}{t^2+4}=\frac{4\sqrt{5}}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}}=\sqrt{5}$， ………………… 11 分

当且仅当 $t=2$，即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时等号成立，即△PMN 面积的最大值为 $\sqrt{5}$． ………………… 12 分

22.【命题意图】本题考查极坐标方程与直角坐标方程、参数方程与普通方程的转化、极坐标的几何意义，考查推理论证能力以及数形结合思想．

【解析】(1)依题意，曲线 C_1：$(x-2)^2+y^2=4$，即 $x^2+y^2-4x=0$， ………………………… 1 分

故 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，即 $\rho=4\cos\theta$． ………………………………………………… 3 分

因为 $\rho^2=\frac{4}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，故 $\rho^2\cos^2\alpha+4\rho^2\sin^2\alpha=4$，

即 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$． ………………………………………………… 5 分

(2)将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho^2=\frac{4}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$，得 $\rho_Q^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta_0}$，

将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho=4\cos\theta$，得 $\rho_P=4\cos\theta_0$， ………………………………………… 6 分

由$|OP|=2|OQ|$,得$\rho_P=2\rho_Q$,即$(4\cos\theta_0)^2=\dfrac{16}{1+3\sin^2\theta_0}$, ………………………………………… 7分

解得$\sin^2\theta_0=\dfrac{2}{3}$,则$\cos^2\theta_0=\dfrac{1}{3}$.

又$0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$,故$\rho_Q=\sqrt{\dfrac{4}{1+3\sin^2\theta_0}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,$\rho_P=4\cos\theta_0=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, ……………………………………… 9分

故$\triangle MPQ$的面积$S_{\triangle MPQ}=S_{\triangle OMP}-S_{\triangle OMQ}=\dfrac{1}{2}\cdot|OM|\cdot(\rho_P-\rho_Q)\cdot\sin\theta_0=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. …………………… 10分

23.【命题意图】本题考查证明不等式的方法、基本不等式,考查推理论证能力以及化归与转化思想.

【解析】(1)要证$a^4-a^2b^2+b^4\geqslant\dfrac{ab(a^4+b^4)}{a^2+b^2}$,

即证$(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)\geqslant ab(a^4+b^4)$, ………………………………………………………… 1分

即证$a^6+b^6\geqslant a^5b+ab^5$, ………………………………………………………………………………………… 2分

即证$a^6+b^6-a^5b-ab^5\geqslant 0$,

即证$a^5(a-b)-(a-b)b^5\geqslant 0$,

即证$(a^5-b^5)(a-b)\geqslant 0$, ……………………………………………………………………………………… 4分

该式显然成立,当且仅当$a=b$时等号成立,

故$a^4-a^2b^2+b^4\geqslant\dfrac{ab(a^4+b^4)}{a^2+b^2}$. ……………………………………………………………………… 5分

(2)由基本不等式得$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$, ………………………………………………………………… 6分

$a^3+b^3+1\geqslant 3ab$,$b^3+c^3+1\geqslant 3bc$,$a^3+c^3+1\geqslant 3ac$,

当且仅当$a=b=c=1$时等号成立. ……………………………………………………………………………… 7分

将上面四式相加,可得$3a^3+3b^3+3c^3+3\geqslant 3abc+3ab+3bc+3ac$, …………………………………… 9分

即$a^3+b^3+c^3\geqslant ab+bc+ac$. ……………………………………………………………………………… 10分