2024年新高考改革适应性练习（3）（九省联考题型）

数学参考答案

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	A	C	D	B	D

二、多项选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，若只有 2 个正确选项，每选对一个得 3 分；若只有 3 个正确选项，每选对一个得 2 分．具体得分如【附】评分表.）

题号	9	10	11
答案	AC	ACD	CD

【附】评分表

<table>
<tr><td colspan="2">9-11 题（每题满分 6 分）</td><td colspan="2">得分情况</td></tr>
<tr><td rowspan="5">正确选项个数</td><td rowspan="2">2 个
（如 AC）</td><td>选对 1 个（选 A 或 C）</td><td>3 分</td></tr>
<tr><td>选对 2 个（选 AC）</td><td>6 分</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3 个
（如 ACD）</td><td>选对 1 个（选 A 或 C 或 D）</td><td>2 分</td></tr>
<tr><td>选对 2 个（选 AC 或 CD 或 AD）</td><td>4 分</td></tr>
<tr><td>选对 3 个（选 ACD）</td><td>6 分</td></tr>
</table>

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

题号	12	13	14
答案	12	-2 或-1	$\left[\frac{24}{5},5\right]$

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15.（13 分）

以点 D_1 为坐标原点，$\overrightarrow{D_1A_1}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{D_1C_1}$ 为 y 轴方向，$\overrightarrow{D_1D}$ 为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $Oxyz$.

（1）连接 EF，由三角形的中位线得 $EF//B_1D_1$，且 $EF=\frac{1}{2}B_1D_1$，由 $B_1D_1//BD$，所以 $EF//BD$，$\triangle EFQ\sim\triangle DBQ$，$\frac{EQ}{DQ}=\frac{EF}{BD}=\frac{1}{2}$，

知 $E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$D(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$，$\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，所以 $Q\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，

三棱锥 $Q-ABC$ 的高（以平面 ABC 为底面）为点 Q 到平面 ABC 的距离，即 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，所以

$$V_{Q-ABC}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$$

故三棱锥 $Q-ABC$ 的体积是 $\frac{1}{9}$.

（2）由（1）$Q\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，又 $A(1,0,1)$，所以 $\overrightarrow{AQ}=\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

由 $C(0,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，得 $\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(0,-\frac{1}{2},-1\right)$，设平面 CEF 的一个法向量 $\boldsymbol{n_1}=(x,y,z)$，则 $\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{CF}=0$，即

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x-y=0\\-\frac{1}{2}y-z=0\end{cases}$$

令 $x=4$，则 $\begin{cases}y_1=2\\z_1=-1\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n_1}=(4,2,-1)$ 是平面 CEF 的一个法向量.

$$\cos<\boldsymbol{n_1},\overrightarrow{AQ}>=\frac{\boldsymbol{n_1}\cdot\overrightarrow{AQ}}{|\boldsymbol{n_1}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|}=\frac{-2}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$$

故直线 AQ 与平面 CEF 夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

16.（15 分）

（1）证明：由已知 $S_{n+1}=3S_n+2n+5(n\in N^*)$，

当 $n \geq 2$ 时，$S_n = 3S_{n-1} + 2n + 3$，

两式相减得 $S_{n+1} - S_n = 3(S_n - S_{n-1}) + 2$，即 $a_{n+1} = 3a_n + 2$，

则 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)\ (n \geq 2)$，

当 $n = 1$ 时，$S_2 = 3S_1 + 7$，所以 $a_2 + a_1 = 3a_1 + 7$，因为 $a_1 = 5$，所以 $a_2 = 17$，

从而 $a_2 + 1 = 3(a_1 + 1)$，所以 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$，

又因为 $a_1 = 5$，可得 $a_1 + 1 = 6$，所以 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 3$，

所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是以 6 为首项，3 为公比的等比数列.

（2）解：由（1）得 $a_n + 1 = 6 \times 3^{n-1}$，所以 $a_n = 2 \times 3^n - 1$，

因为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$，所以 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$，

则 $f'(1) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$，

记 $b_n = na_n = 2n \times 3^n - n$，可得 $f'(1) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$，

记 $T_n = 2 \times 3^1 + 4 \times 3^2 + \ldots + 2n \times 3^n$，

则 $3T_n = 2 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + \ldots + 2n \times 3^{n+1}$，

两式相减得：

$$\begin{aligned} -2T_n &= 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \times 3^n - 2n \times 3^{n+1} \\ &= \frac{6(1-3^n)}{1-3} - 2n \times 3^{n+1} \\ &= (1-2n) \times 3^{n+1} - 3 \end{aligned}$$

所以 $T_n = \frac{(2n-1)\times 3^{n+1}+3}{2}$，

又因为 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$，所以 $f'(1) = \frac{(2n-1)\times 3^{n+1}+3}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$.

17.（15 分）

（1）设赌博再继续进行 X 局甲赢得全部赌注，则最后一局必然甲赢，由题意知，最多再进行 4 局，甲、乙必然有人赢得全部赌注，

当 $X = 2$ 时，甲以 4:1 赢，所以 $P(X=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$，

当 $X = 3$ 时，甲以 4:2 赢，所以 $P(X=3) = C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$，

当 $X = 4$ 时，甲以 4:3 赢，所以 $P(X=4) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$，

于是得甲赢得全部赌注的概率为 $\frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{4}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$，

所以，甲应分得的赌注为 $243\times\frac{8}{9}=216$ 元.

（2）设赌博继续进行 Y 局乙赢得全部赌注，则最后一局必然乙赢，

当 $Y=3$ 时，乙以 4:2 赢，$P(Y=3)=(1-p)^3$，

当 $Y=4$ 时，乙以 4:3 赢，$P(Y=4)=C_3^1p(1-p)^3=3p(1-p)^3$，

从而得乙赢得全部赌注的概率为 $P(A)=(1-p)^3+3p(1-p)^3=(1+3p)(1-p)^3$，

于是甲赢得全部赌注的概率 $f(p)=1-P(A)=1-(1+3p)(1-p)^3$，

$f^{'}(p)=-3(1-p)^3-(1+3p)\cdot3(1-p)^2(-1)=12p(1-p)^2$，

因 $\frac{4}{5}\le p<1$，即 $f^{'}(p)>0$，从而有 $f(p)$ 在 $\left[\frac{4}{5},1\right)$ 上单调递增，

于是得 $f(p)_{\min}=f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{608}{625}$，乙赢的概率 $P(A)$ 最大值为 $1-\frac{608}{625}=\frac{17}{625}=0.0272$，

所以事件 A 发生的概率的最大值为 0.0272.

18.（17 分）P308

（1）易知 ω 的焦点为 $(1,0)$，所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，又由题意，$a=2$，所以 $b=\sqrt{3}$，

故椭圆 Ω 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设 $P(t^2,2t)$，显然切线 l 的斜率存在，设切线 l 的方程为 $y-2t=k(x-t^2)$，联立

$$\begin{cases}y-2t=k(x-t^2)\\ y^2=4x\end{cases}$$

得关于 y 的方程 $ky^2-4y-4kt^2+8t=0$，则 $\Delta=16-16k(-4kt^2+8t)=0$，得 $k=\frac{1}{t}$，从而切线方程 $l:x=ty-t^2$，联立

$$\begin{cases}x=ty-t^2\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$$

得关于 y 的方程 $(3t^2+4)y^2-6t^3y+3t^4-12=0$，由韦达定理

$$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{6t^3}{3t^2+4}\\ y_1y_2=\frac{3t^4-12}{3t^2+4}\end{cases}$$

所以

$$|MN|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$$=\sqrt{1+t^2}\sqrt{\left(\frac{6t^3}{3t^2+4}\right)^2-4\frac{3t^4-12}{3t^2+4}}=4\sqrt{3}\sqrt{1+t^2}\sqrt{\frac{-t^4+3t^2+4}{(3t^2+4)^2}}$$

因为原点到切线 l 的距离

$$d=\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

所以

$$S_{\triangle OMN}=2\sqrt{3}\sqrt{\frac{t^4(-t^4+3t^2+4)}{(3t^2+4)^2}}$$

令 $3t^2+4=u$，因为 $0<t^2<4$，所以 $4<u<16$，则

$$S_{\triangle OMN}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{-\left(u+\frac{16}{u}\right)^2+25\left(u+\frac{16}{u}\right)-136}$$

令 $y=u+\frac{16}{u}$，因为 $4<u<16$，所以 $8<y<17$，

$$S_{\triangle OMN}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{-y^2+25y-136}$$

当 $y=\frac{25}{2}$ 时，$S_{\max}=\sqrt{3}$．由 $y=u+\frac{16}{u}$ 得 $u=\frac{25+3\sqrt{41}}{4}$，则有 $t=\frac{\sqrt{3+\sqrt{41}}}{2}$．

故当 $P\left(\frac{3+\sqrt{41}}{4},\sqrt{3+\sqrt{41}}\right)$ 时，$S_{\triangle OMN}$ 取最大值 $\sqrt{3}$．

19.（17 分）

（1）猜想：伯努利不等式等号成立的充要条件是 $n=0,1$，或 $x=0$．

（2）当 $n\geq1$ 时，我们需证 $(1+x)^n\geq1+nx$

设 $f(x)=(1+x)^n-nx-1\ (x<-1,a\geq1)$，注意到 $f(0)=0$，

$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n\left[(1+x)^{n-1}-1\right]$，令 $(1+x)^{n-1}-1=0$ 得 $x=0$，即 $f'(0)=0$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极值点．

再对 $f'(x)$ 求导：

$$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}>0$$

所以 $f'(x)$ 单调递增．

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<f(0)=0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>f(0)=0$，$f(x)$ 单调递增．所以在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得极小值 $f(0)=0$，

即 $f(x)\geq0$ 恒成立，$(1+x)^n\geq nx+1$．

伯努利不等式对 $n \geq 1$ 得证.

（3）当 $n=1$ 时，原不等式即 $1+a_1 \geq 1+a_1$，显然成立.

当 $n \geq 2$ 时，构造数列 $\{x_n\}$：$x_n=(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)-(1+a_1+a_2+\dots+a_n)$，则 $x_{n+1}-x_n=a_{n+1}[(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)-1]$.

若 $a_i>0\ (i=1,2,\dots,n+1)$，由上式易得 $x_{n+1}-x_n>0$，即 $x_{n+1}>x_n$；

若 $-1<a_i \leq 0\ (i=1,2,\dots,n+1)$，则 $0<1+a_i<1$，所以 $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)-1<0$，故

$$x_{n+1}-x_n=a_{n+1}[(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)-1]>0$$

即此时 $x_{n+1}>x_n$ 也成立.

所以 $\{x_n\}$ 是一个单调递增的数列（$n \geq 2$），由于 $x_2=(1+a_1)(1+a_2)-(1+a_1+a_2)=a_1a_2>0$，所以 $x_n>x_2>0\ (\forall n>2)$，

故原不等式成立.