2023 届高三 12 月测试 数学试题

第一部分(选择题　共 40 分）

一、选择题 共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知 i 是虚数单位，若 $z=\dfrac{i+a}{1+i}$ 为纯虚数，则实数 $a=$(　　)

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

2. 如果方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a+6}=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$

C. $(-6,-2)\cup(3,+\infty)$　　D. $(3,+\infty)$

3. 若过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点，则直线 l 的斜率的取值范围为(　　)

A. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$　　C. $[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

4. 设 $m=\log_4 5$， $n=\log_3\dfrac{1}{5}$，则(　　)

A. $m+n<0<mn$　　B. $mn<0<m+n$

C. $m+n<mn<0$　　D. $mn<m+n<0$

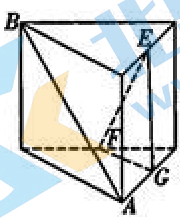
5. 函数 $y=\cos 2x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 的最小值为(　　)

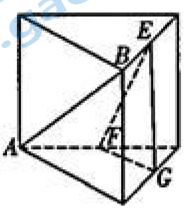
A. -2　　B. $-\dfrac{9}{8}$　　C. $-\dfrac{5}{8}$　　D. 0

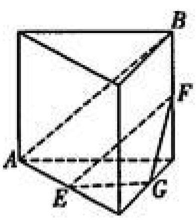
6. 已知非零实数 a，b 满足 $a|a|>b|b|$，则下列不等式一定成立的是(　　)

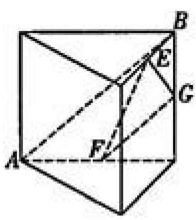
A. $a^3>b^3$　　B. $a^2>b^2$　　C. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　D. $\log_{\frac{1}{2}}|a|<\log_{\frac{1}{2}}|b|$

7. 在下面四个三棱柱中，A，B 为三棱柱的两个顶点，E，F，G 为所在棱的中点，则在这四个三棱柱中，直线 AB 与平面 EFG 不平行的是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 若将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象，则“$\omega=\frac{1}{2}$”是“$g(x)$ 为偶函数”的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\left(n\in N^*\right)$，若 $a_1+a_2++\ldots+a_n=255$，则展开式中二项式系数最大的项是(　　)

A. $240x^4$　　B. $160x^3$　　C. $70x^4$　　D. $20x^3$

10. 在 ΔABC 中，$AB=AC=1$，点 D 在 ΔABC 所在平面内，对任意 $t\in R$，都有 $|\overrightarrow{DC}-t\cdot\overrightarrow{DB}|\geqslant|\overrightarrow{BC}|$ 恒成立，且 $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$，则 $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ 的最大值为(　　)

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $3+2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{4-\sqrt{3}}$　　D. $4-\sqrt{3}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

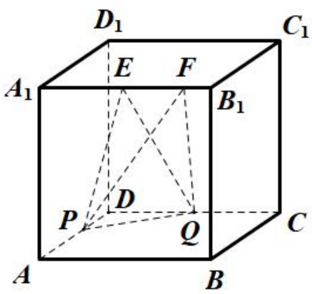
二、填空题 共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知角 α 的终边经过点 $(-4,3)$，则 $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$ 的值是__________.

12. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=-n^2+11n\left(n\in N^*\right)$，则此数列最大项的值是__________.

13. 已知在边长为 4 的等边 ΔABC 中，$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$__________.

14. 如图所示正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，动点 E,F 在棱 A_1B_1 上，点 Q 为 CD 的中点，动点 P 在棱 AD 上，若 $EF=1$，$DP=x$，$A_1E=y(x>0,y>0)$，则当 x,y 变化时，三棱锥 $P-EFQ$ 的体积最大值为__________.



15. 关于曲线 $C:x^2-xy+y^2=4$，给出下列四个说法：

①曲线 C 关于原点对称，但不关于 x 轴、y 轴对称；

②曲线 C 恰好经过 4 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

③曲线 C 上任意一点都不在圆 $x^2+y^2=3$ 的内部；

④曲线 C 上任意一点到原点的距离都不大于 $2\sqrt{2}$.

其中所有正确说法的序号是__________.

三、解答题 共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. （本小题 13 分）

在① $2c = a\sin C + \sqrt{3}c\cos A$；

② $\sqrt{3}\sin(A+C)\cos A = 3\sin A\sin B$；

③ $2\cos A(c\cos B + b\cos C) = \sqrt{3}a$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答.

问题：已知 ΔABC 中，D 为 AB 边上的一点，且 $BD = 2AD$，___________.

（Ⅰ）求 A 的大小；

（Ⅱ）若 $B = \dfrac{\pi}{6}$，求 $\angle BCD$ 大小；

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17.（本小题 13 分）

如图 1，四边形 $ABCD$ 是梯形，$AB // CD$，$AD = DC = CB = \dfrac{1}{2}AB = 4$，$M$ 是 AB 的中点，将 ΔADM 沿 DM 折起至 $\Delta A'DM$，如图 2，点 N 在线段 $A'C$ 上.

（Ⅰ）若 N 是 $A'C$ 的中点，求证：平面 $DNM \perp$ 平面 $A'BC$;

（Ⅱ）若 $A'C = 2\sqrt{6}$，平面 DNM 与平面 CDM 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求 $\dfrac{A'N}{NC}$.

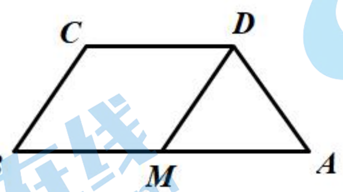


图1

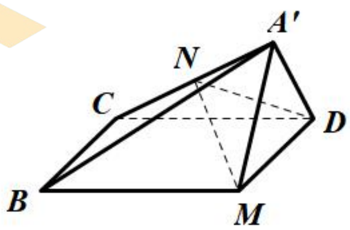
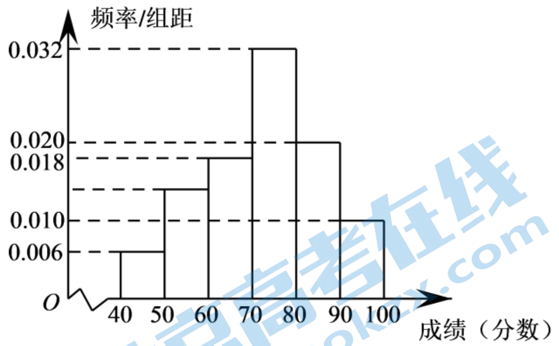


图2

18. （本小题 14 分）

某学校在寒假期间安排了“垃圾分类知识普及实践活动”.为了解学生的学习成果，该校从全校学生中随机抽取了 50 名学生作为样本进行测试，记录他们的成绩，测试卷满分 100 分，将数据分成 6 组：$[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]$，并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）若全校学生参加同样的测试，试估计全校学生的平均成绩（每组成绩用中间值代替）；

（Ⅱ）在样本中，从其成绩在 80 分及以上的学生中随机抽取 3 人，用 X 表示其成绩在 $[90,100]$ 中的人数，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅲ）在（Ⅱ）抽取的 3 人中，用 Y 表示其成绩在 $[80,90)$ 的人数，试判断方差 $D(X)$ 与 $D(Y)$ 的大小.（直接写结果）.

19.（本小题满分 15 分）

已知椭圆 C 中心在原点 O，焦点在坐标轴上，其离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，一个焦点为 $F(0,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与椭圆相交于 A,B 两点，直线 OA,OB 分别与直线 $y=2$ 相交于 M,N 两点，若 $\angle MON$ 为锐角，求直线 l 斜率 k 的取值范围.

20.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=x^{n+2}-x^{n}\cos x$（其中 $n\in Z$）.

（Ⅰ）若 $n=-1$，判断函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的单调性；

（Ⅱ）若 $n=1$，判断函数 $f(x)$ 零点个数，并说明理由；

（Ⅲ）若 $n=0$，求证：$f(x)+2-\dfrac{x}{e^{x-1}}>0$.

21.（本小题满分 15 分）

已知集合 $M\subseteq \mathbf{N}^{*}$，且 M 中的元素个数 n 大于等于 5．若集合 M 中存在四个不同的元素 a，b，c，d，使得 $a+b=c+d$，则称集合 M 是“关联的”，并称集合 $\{a,b,c,d\}$ 是集合 M 的“关联子集”；若集合 M 不存在“关联子集”，则称集合 M 是“独立的”.

（Ⅰ）分别判断集合 $\{2,4,6,8,10\}$ 与 $\{1,2,3,5,8\}$ 是“关联的”还是“独立的”？若是“关联的”，写出其所有的“关联子集”；

（Ⅱ）已知集合 $M=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 是“关联的”，且任取集合 $\{a_i,a_j\}\subseteq M$，总存在 M 的“关联子集” A，使得 $\{a_i,a_j\}\subseteq A$．若 $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，求证：a_1，a_2,a_3,a_4,a_5 是等差数列；

（Ⅲ）若集合 M 是“独立的”，求证：存在 $x\in M$，使得 $x>\dfrac{n^2-n+9}{4}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。