2024 年 1 月“七省联考”考前猜想卷

数　学

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	A	A	B	C	C	D

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9	10	11	12
AC	ACD	ACD	AB

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$f\left(x\right)=x$（答案不唯一）　　14．3

15．$\dfrac{5}{32}$　　16．3π

四、解答题：本题共6小题，共70分．第17题10分，其他每题12分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．【解析】（1）点$(\dfrac{1}{a_{n+1}},\dfrac{1}{a_n})$在直线$y=x+2$上

得$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=2$，　---------------------2 分

所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以首项为$\dfrac{1}{a_1}=1$，公差为 2 的等差数列．　---------------------3 分

故$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_1}+2\left(n-1\right)=2n-1$，即$a_n=\dfrac{1}{2n-1}$．　---------------------5 分

（2）$a_{n+1}a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$　---------------------6 分

所以$T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{1}{2}$，　---------------------8 分

要使$T_n<3m-12$对$n\in N^*$恒成立，

$3m-12\geq\frac{1}{2}$,即 $m\geq\frac{25}{3}$ --------------------9 分

又 $m\in Z$，所以 m 的最小值为 9. --------------------10 分

18.

【解析】(1) 因为 $c-2b\cos A=b$，

由正弦定理得 $\sin C-2\sin B\cos A=\sin B$ --------------------2 分

又 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin(A-B)=\sin B$ ---------3 分

因为□ABC 为锐角三角形，所以 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $A-B\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

又 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $A-B=B$，即 $A=2B$； --------------------5 分

(2) 由 (1) 可知，$A=2B$，所以在 $\triangle ABD$ 中，$\angle ABC=\angle BAD$，

由正弦定理得：$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin(\pi-2B)}=\frac{2}{\sin 2B}$，所以 $AD=BD=\frac{1}{\cos B}$， --------------------7 分

所以 $S_{\square ABD}=\frac{1}{2}\times AB\times AD\times\sin B=\frac{\sin B}{\cos B}=\tan B$. --------------------9 分

又因为□ABC 为锐角三角形，

所以 $0<B<\frac{\pi}{2}$， $0<2B<\frac{\pi}{2}$， $0<\pi-3B<\frac{\pi}{2}$，解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$， --------------------11 分

所以 $\tan B\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，即 $\triangle ABD$ 面积的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$. --------------------12 分

19. 【解析】(1) $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{1320}{\sqrt{10}\times\sqrt{176400}}=\frac{1320}{2\times\sqrt{441000}}\approx 0.99$ ---------------2 分

(2) 因为 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$， $\bar{y}=590$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$， $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=1320$， ------------------4 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{1320}{10}=132$， $\hat{a}=590-132\times3=194$， ------------------6 分

所以变量 x， y 之间的线性回归方程为 $\hat{y}=132x+194$，

当 $x=7$ 时， $\hat{y}=132\times7+194=1118$ (万元).

所以预测 2023 年 7 月份该公司的直播带货金额为 1118 万元. --------------------8 分

（3）补全完整的列联表如下.

	参加过直播带货	未参加过直播带货	总计
女性	25	5	30
男性	15	10	25
总计	40	15	55

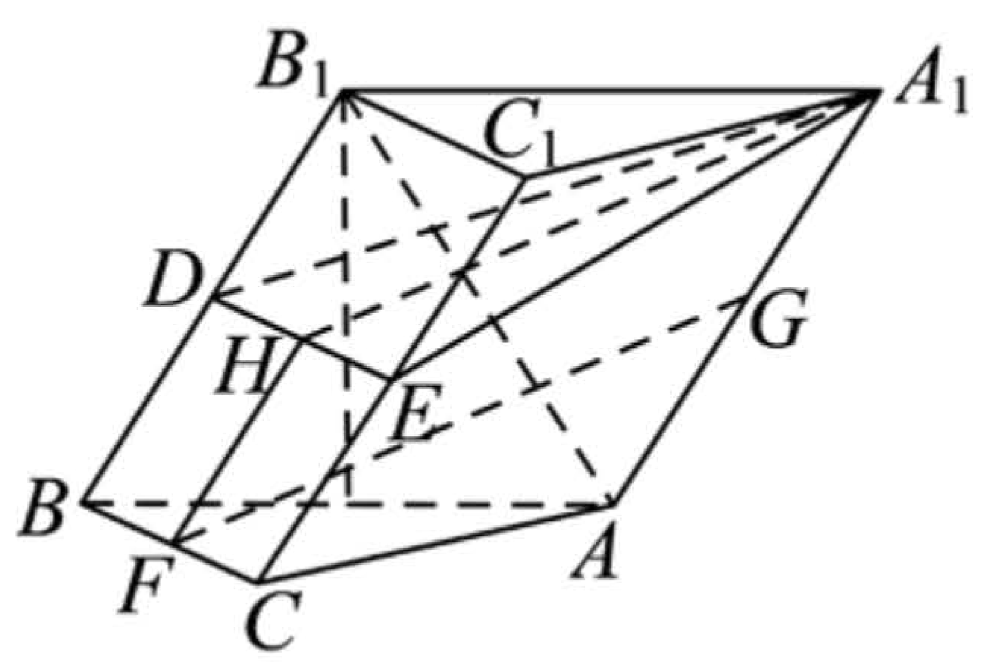
---------------------9 分

零假设 H_0：参加直播带货与性别无关，

根据以上数据，经计算得到 $K^2=\dfrac{55\times(25\times10-5\times15)^2}{30\times25\times40\times15}\approx3.743>2.706=x_{0.1}$， ---------------------11 分

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验我们推断 H_0 不成立，即参加直播带货与性别有关，该判断犯错误的概率不超过 10%. ---------------------12 分

20. 【解析】（1）如图所示：



当点 G 为 AA_1 的中点时，$FG//$ 平面 A_1DE， ---------------------1 分

证明如下：设 H 为 DE 中点，连接 FH,A_1H.

因为在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1//CC_1//AA_1$， ---------------------2 分

D,E,F,G 分别为 BB_1,CC_1,BC,AA_1 的中点，

所以 $FH//EC//A_1G$，且 $FH=EC=A_1G$，

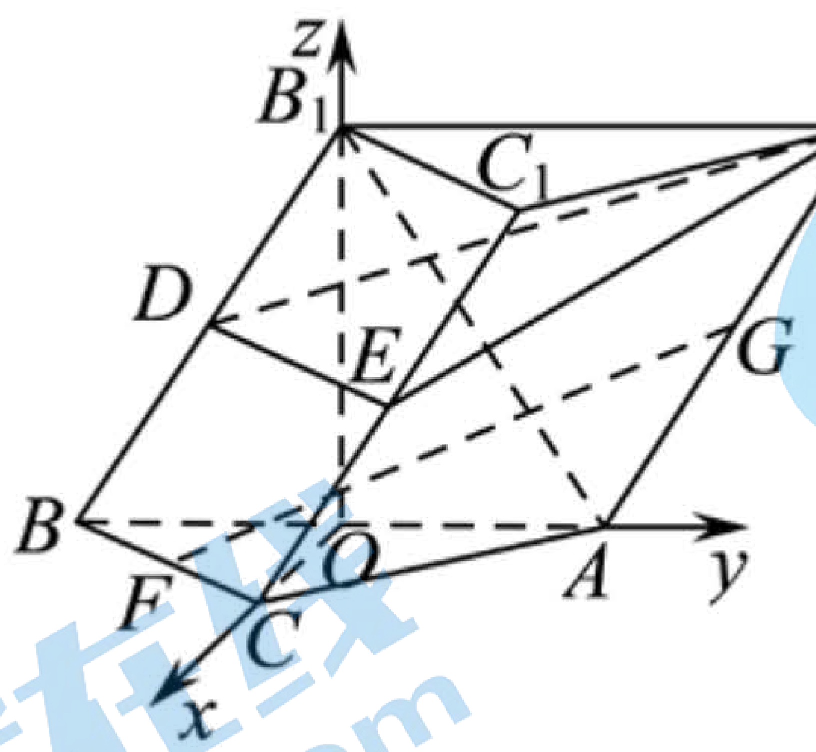
所以四边形 A_1GFH 为平行四边形.

所以 $FG//A_1H$， ---------------------4 分

又因为 $A_1H\subset$ 平面 A_1DE，$FG\not\subset$ 平面 A_1DE，

所以 $FG//$ 平面 A_1DE .　　　　　　　　　　　　　　　　---------------------5 分

（2）如图所示：



取 AB 中点 O，连接 OB_1, AB_1, OC .

因为 $AB = AA_1 = BB_1$， $\angle ABB_1 = 60^\circ$，

所以□ABB_1 为正三角形，所以 $B_1O \perp AB$.　　　　　　　　　　---------------------6 分

又因为平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1B_1B \cap$ 平面 $ABC = AB$， $B_1O \subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $B_1O \perp$ 平面 ABC，

又 $CO, AO \subset$ 平面 ABC，

所以 $B_1O \perp CO, B_1O \perp AO$，

因为□ABC 为等边三角形，所以 $OC \perp AB$.　　　　　　　　　　---------------------7 分

以 O 为原点，分别以 $OCOA, OB_1$ 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系，

依题意得 $A(0,3,0), B(0,-3,0), C(3\sqrt{3},0,0), A_1(0,6,3\sqrt{3}), B_1(0,0,3\sqrt{3}), D\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$， --------------8 分

所以 $\overrightarrow{DA_1} = \left(0,\frac{15}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC} = (3\sqrt{3},3,0)$.

设平面 A_1DE 的法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则由 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{DA_1} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE} = 0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} \frac{15}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ 3\sqrt{3}x + 3y = 0 \end{cases}$，令 $x = 1$，得 $\vec{n} = \left(1,-\sqrt{3},5\right)$.　　　　--------------------9 分

取平面 ABC 的法向量 $\vec{m} = (0,0,1)$，

设平面 A_1DE 与平面 ABC 所成二面角的大小为 θ，

则$\left|\cos\theta\right|=\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{5}{1\times\sqrt{29}}=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$. ---------------------11 分

所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$，

所以平面 A_1DE 与平面 ABC 所成二面角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$. ---------------------12 分

21. 【解析】（1）联立$\begin{cases}x+y+1=0\\x^2=2py\end{cases}$，消 y 得 $x^2+2px+2p=0$，

因为直线$x+y+1=0$与抛物线$C:x^2=2py\left(p>0\right)$相切，

所以$\Delta=4p^2-8p=0$，解得 $p=2$ 或 $p=0$（舍去）， --------------------2 分

当 $p=2$ 时，$x^2+4x+4=0$，解得 $x=-2$，所以 $y=1$， --------------------4 分

所以抛物线 C 的方程为$x^2=4y$，点 A 的坐标为$\left(-2,1\right)$； ---------------------5 分

（2）显然直线l的斜率存在，

可设为$y=kx+b,M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，

由$\begin{cases}y=kx+b\\x^2=4y\end{cases}$，消 y 得 $x^2-4kx-4b=0$，

则$\Delta=16k^2+16b>0$，

$x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4b$， ---------------------7 分

$\overrightarrow{AM}=\left(x_1+2,y_1-1\right),\overrightarrow{AN}=\left(x_2+2,y_2-1\right)$，

因为以 MN 为直径的圆过点 A，

所以$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，

即$\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)+\left(y_1-1\right)\left(y_2-1\right)=0$， ---------------------8 分

整理可得$\left(k^2+1\right)x_1x_2+\left[k\left(b-1\right)+2\right]\left(x_1+x_2\right)+\left(b-1\right)^2+4=0$，

所以$-4b\left(k^2+1\right)+4k^2\left(b-1\right)+8k+\left(b-1\right)^2+4=0$，

化简得$b^2-6b+9=4k^2-8k+4$，

所以$\left(b-3\right)^2=\left(2k-2\right)^2$，

所以$b-3=2k-2$或$b-3=2-2k$，

即$b=2k+1$或$b=-2k+5$， ---------------------9 分

当$b=2k+1$时，直线$l:y=kx+2k+1$，

即$y-1=k(x+2)$，所以直线l过定点$(-2,1)$（舍去），--------------------10 分

当$b-3=2-2k$时，直线$l:y=kx-2k+5$，满足$\Delta>0$，

即$y-5=k(x-2)$，所以直线l过定点$Q(2,5)$，--------------------11 分

当直线l与AQ垂直时，点A到直线l的距离最大，

又$k_{AQ}=\dfrac{5-1}{2-(-2)}=1$，所以$k_l=-1$，

所以直线l的方程为$x+y-7=0$.------------------12 分

22. 【解析】（1）解：$f(x)$的定义域为$(2,+\infty)$，

当$a=1$时，$f(x)=(x-1)\ln(x-2)-x+3$，

$f'(x)=\ln(x-2)+\dfrac{x-1}{x-2}-1=\ln(x-2)+\dfrac{1}{x-2}$，--------------------2 分

设$g(x)=\ln(x-2)+\dfrac{1}{x-2}$，

则$g'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{x-3}{(x-2)^2}$，

令$g'(x)=0$，解得$x=3$，-------------------4 分

当$x\in(2,3)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in(3,+\infty)$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

所以，$g(x)_{\min}=g(3)=1>0$，则$g(x)=f'(x)>0$对任意的$x>2$恒成立，

所以，函数$f(x)$的单调递增区间为$(2,+\infty)$，无递减区间.--------------------6 分

（2）解：当$x>3$时，$f(x)>0$恒成立等价于$\ln(x-2)-\dfrac{a(x-3)}{x-1}>0$在$(3,+\infty)$上恒成立，

设$h(x)=\ln(x-2)-\dfrac{a(x-3)}{x-1}(x>3)$，--------------------8 分

则$h'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2a}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2(a+1)x+4a+1}{(x-2)(x-1)^2}$，

设$\varphi(x)=x^2-2(a+1)x+2a+1(x>3)$，--------------------9 分

则$\varphi(x)$图象为开口向上，对称轴为$x=a+1$的抛物线的一部分，

当 $a\le 2$ 时，$a+1\le 3$，$\varphi(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 单调递增，且 $\varphi(3)=4-2a\ge 0$，---------------------10 分

所以，$\varphi(x)\ge 0$，即 $h'(x)\ge 0$，则函数 $h(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $h(3)=0$，所以 $h(x)>0$ 在 $(3,+\infty)$ 恒成立，满足题意；

当 $a>2$ 时，$a+1>3$，$\varphi(3)=4-2a<0$，

所以方程 $\varphi(x)=0$ 有两相异实根，设为 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，则 $x_1<3<x_2$，

当 $x\in(3,x_2)$ 时，$\varphi(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(3,x_2)$ 上单调递减，

又因为 $h(3)=0$，故当 $x\in(3,x_2)$ 时，$h(x)<h(3)=0$，---------------------11 分

所以，$h(x)>0$ 在 $(3,+\infty)$ 上不恒成立，不满足题意.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,2]$.---------------------12 分