2023 北京五中高三 10 月月考

数学（第二次段考）

班级______姓名_______学号______成绩________

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2+2x<0\}$，$B=\{x|x>-1\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-2,0)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(-1,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

2. 设 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同的平面（　）

A. 若 $m\perp n$，$n\,/\!/\,\alpha$，则 $m\perp\alpha$

B. 若 $m\,/\!/\,\beta$，$\beta\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\beta$，$n\perp\beta$，$n\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

D. 若 $m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$，则 $m\perp\alpha$

3. 下列函数中，在区间 $(0,1)$ 内不单调的是（　）

A. $y=\ln(x+1)$　　B. $y=2^{1-x}$

C. $y=\tan 2x$　　D. $y=x^2+\sqrt{x}$

4. 在△ ABC 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overline{EB}=$

A. $\frac{3}{4}\overline{AB}-\frac{1}{4}\overline{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overline{AB}-\frac{3}{4}\overline{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{AC}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin C=2\sin(B+C)\cos B$，那么 $\triangle ABC$ 一定是（　）

A. 等腰直角三角形　　B. 等腰三角形　　C. 等腰或直角三角形　　D. 等边三角形

6. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $0<x<y<1$，则（　）

A. $x^2>y^2$　　B. $\tan x>\tan y$　　C. $4^x>2^y$　　D. $x+\frac{1}{x}>y(2-y)$

7. 已知不共线的两个非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，则“$\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 所成角为锐角”是“$|\vec{a}|>|\vec{b}|$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 某景区为提升游客观赏体验，搭建一批圆锥形屋顶的小屋（如图 1）. 现测量其中一个屋顶，得到圆锥 SO 的底面直径 AB 长为 12m，母线 SA 长为 18m（如图 2）. 若 C 是母线 SA 的一个三等分点（靠近点 S），从点 A 到点 C 绕屋顶侧面一周安装灯光带，则灯光带的最小长度为（　）

图1

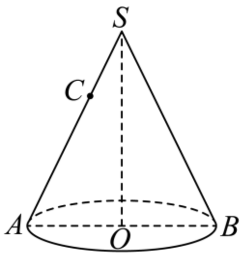
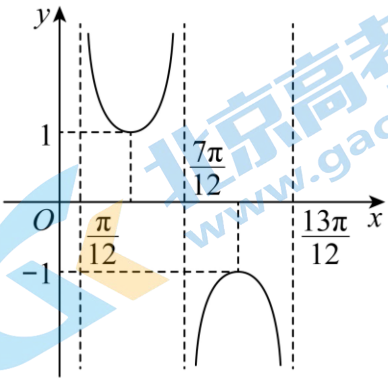


图2

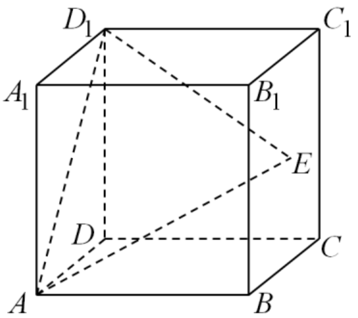
A. $6\sqrt{7}$m　　B. 16m　　C. $6\sqrt{13}$m　　D. 12m

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $g(x)\cdot f(x)=1$，且函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示，则 φ 等于（　）



A. $-\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

10. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是侧面 BB_1C_1C 内的一个动点（不包含端点），则下列说法中正确的是（　）



A. 三角形 AED_1 的面积无最大值、无最小值

B. 存在点 E，满足 $D_1E\perp B_1E$

C. 存在有限个点 E，使得三角形 AED_1 是等腰三角形

D. 三棱锥 $B-AED_1$ 的体积有最大值、无最小值

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{x}$ 的定义域为____________.

12. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|,\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\cos\langle\vec{a},2\vec{a}-\vec{b}\rangle=$________.

13. 已知圆锥的顶点为S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\frac{3}{5}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°，若△SAB 的面积为 $\frac{16}{5}$，则该圆锥的侧面积为________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x>a\\|x-a-1|,x\le a\end{cases}$，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的值域为______；若 $f(x)$ 的最小值为 1，则 a 的取值范围是______.

15. 关于函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

② $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称.

③当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

④当 $\exists a>0$，使 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有两个极大值点.

其中所有真命题的序号是________.

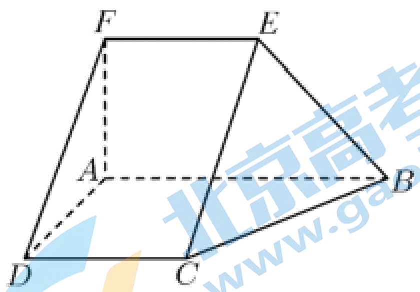
三、解答题：共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f(x)=\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m(\omega>0,m\in\mathrm{R})$ 的最小正周期为 π，且 $f(x)$ 的图像经过点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

（1）求 ω 和 m 的值；

（2）若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 内有且仅有 1 个零点，求 a 的取值范围.

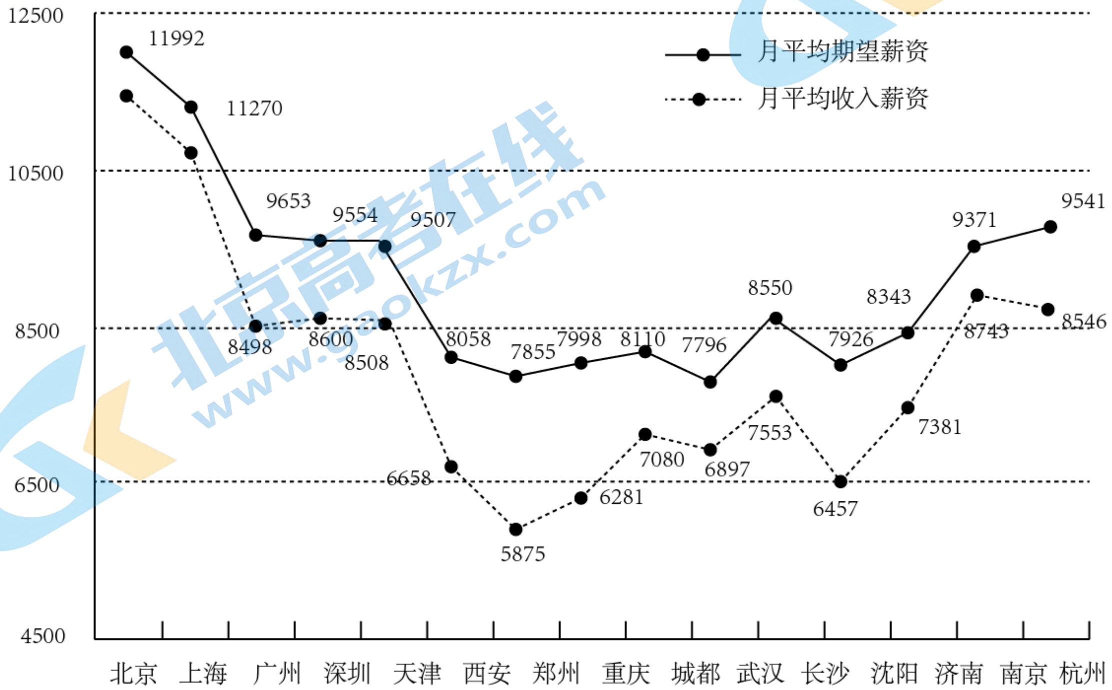
17. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle DAB=90°$，$AD=DC=\frac{1}{2}AB$.以直线 AB 为轴，将直角梯形 $ABCD$ 旋转得到直角梯形 $ABEF$，且 $AF\perp AD$.



（1）求证：$DF//$平面 BCE；

（2）在线段 DF 上是否存在点 P，使得直线 AF 和平面 BCP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$？若存在，求出 $\frac{DP}{DF}$ 的值；若不存在，说明理由.

18. 随着经济全球化、信息化的发展，企业之间的竞争从资源的争夺转向人才的竞争，吸引、留住培养和用好人才成为人力资源管理的战略目标和紧迫任务，在此背景下，某信息网站在 15 个城市中对刚毕业的大学生的月平均收入薪资和月平均期望薪资做了调查，数据如下图所示.



（1）若某大学毕业生从这 15 座城市中随机选择一座城市就业，求该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的概率；

（2）现有 2 名大学毕业生在这 15 座城市中各随机选择一座城市就业，且 2 人的选择相互独立，记 X 为选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的人数，求 X 的分布列和数学期望 E（X）；

（3）记图中月平均收入薪资对应数据的方差为 s_1^2，月平均期望薪资对应数据的方差为 s_2^2，判断 s_1^2 与 s_2^2 的大小（只需写出结论）

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，短轴一个端点到右焦点的距离为 $\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 C 的方程;

（2）设直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，坐标原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

20. 已知函数 $f(x)=e^{ax}-x$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）若存在 $x_1,x_2\in[-1,1]$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)\geq 9$，求 a 的取值范围.

21. 若数列$\{a_n\}$满足：$a_n \in \{0,1\}, n \in \mathrm{N}^*$，且$a_1 = 1$，则称$\{a_n\}$为一个$X$数列. 对于一个$X$数列$\{a_n\}$，若数列$\{b_n\}$满足：$b_1 = 1$，且$b_{n+1} = \left|a_n - \frac{a_{n+1}}{2}\right| b_n, n \in \mathrm{N}^*$，则称$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的伴随数列.

（1）若X数列$\{a_n\}$中，$a_2 = 1$，$a_3 = 0$，$a_4 = 1$，写出其伴随数列$\{b_n\}$中b_2, b_3, b_4的值；

（2）若$\{a_n\}$为一个X数列，$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的伴随数列.

①证明：“$\{a_n\}$为常数列”是“$\{b_n\}$为等比数列”的充要条件；

②求b_{2019}的最大值.

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

1. 【答案】B

【分析】根据解一元二次不等式的解法，结合集合并集的定义进行运算即可.

【详解】由 $A=\left\{x\left|x^{2}+2x<0\right.\right\}=(-2,0)$，而 $B=\left\{x\left|x>-1\right.\right\}$，

所以 $A\cup B=(-2,+\infty)$.

故选：B

2. 【答案】C

【分析】根据空间中点线面的位置关系，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于 A，若 $m\perp n$，$n/\!/\alpha$，则 $m\subset\alpha$ 或者 $m/\!/\alpha$ 或者 m,α 相交，故 A 错误，

对于 B，若 $m/\!/\beta$，$\beta\perp\alpha$，则 $m\subset\alpha$ 或者 $m/\!/\alpha$ 或者 m,α 相交，故 B 错误，

对于 C，若 $m\perp\beta$，$n\perp\beta$，则 $n/\!/m$，又 $n\perp\alpha$，所以 $m\perp\alpha$，故 C 正确，

对于 D，若 $m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$，则 $m\subset\alpha$ 或者 $m/\!/\alpha$ 或者 m,α 相交，故 D 错误，

故选：C

3. 【答案】C

【分析】AB 选项，求导得到函数的单调性，AB 错误；C 选项，由正切函数的单调性推出 $y=\tan 2x$ 在 $(0,1)$ 上不单调，C 正确；D 选项，由解析式直接判断出 $y=x^{2}+\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，D 错误.

【详解】A 选项，$y'=\dfrac{1}{x+1}>0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，故 $y=\ln(x+1)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，A 错误；

B 选项，$y'=-2^{1-x}\ln 2<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，故 $y=2^{1-x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，B 错误；

C 选项，当 $x\in(0,1)$ 时，$2x\in(0,2)$，

由于 $y=\tan z$ 在 $z\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $z\in(0,2)$ 上不单调，

故 $y=\tan 2x$ 在 $(0,1)$ 上不单调，C 正确；

D 选项，由于 $y=x^{2}$ 和 $y=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，故 $y=x^{2}+\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，D 错误.

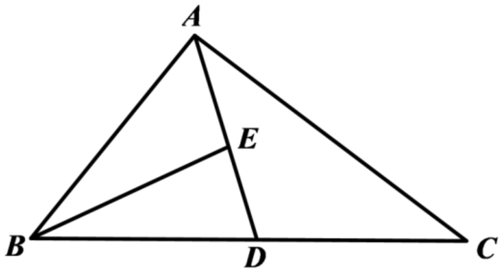
故选：C

4. 【答案】A

【分析】分析：首先将图画出来，接着应用三角形中线向量的特征，求得 $\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\overline{BA}+\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，之后应用向量的加法运算法则-------三角形法则，得到 $\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$，之后将其合并，得到 $\overline{BE}=\dfrac{3}{4}\overline{BA}+\dfrac{1}{4}\overline{AC}$，

下一步应用相反向量，求得 $\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，从而求得结果.

【详解】根据向量的运算法则，可得



$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{EB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故选 A.

【点睛】该题考查的是有关平面向量基本定理的有关问题，涉及到的知识点有三角形的中线向量、向量加法的三角形法则、共线向量的表示以及相反向量的问题，在解题的过程中，需要认真对待每一步运算.

5.【答案】B

【分析】由两角和的正弦公式结合正弦定理和余弦定理可求出 $a=b$，即可判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【详解】因为 $\sin C=2\sin\left(B+C\right)\cos B$， $\sin(B+C)=\sin A$，

所以 $\sin C=2\sin A\cos B$，

所以由正余弦定理得 $c=2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，化简得 $a^2=b^2$，

所以 $a=b$，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

故选：B.

6.【答案】D

【分析】(1) 利用幂函数单调性即可判断 A，利用正切函数单调性即可判断 B，

举例 $x=\frac{1}{3}$， $y=\frac{2}{3}$ 即可判断 C，利用对勾函数和二次函数性质即可判断 D.

【详解】根据幂函数 $f\left(x\right)=x^2$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上为单调增函数，

故 $0<x<y<1$ 时， $x^2<y^2$，故 A 错误，

根据三角函数 $h\left(x\right)=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为单调增函数，

故 $0<x<y<1$ 时，故 $\tan x<\tan y$，故 B 错误，

$4^x>2^y$，即 $2^{2x}>2^y$，$\because 0<x<y<1$，但 $2x$ 与 y 的大小关系不明，如 $x=\frac{1}{3}$， $y=\frac{2}{3}$，

显然此时 $2^{2x}=2^{y}$，故 C 错误，

根据对勾函数的图像与性质当 $0<x<1$时，

可知 $x+\dfrac{1}{x}\in(2,+\infty)$，而 $y(2-y)=-(y-1)^2+1$，根据二次函数 $\varphi(y)=y(2-y)$ 图像与性质可知其值域，

当 $y=0$ 时，$-(y-1)^2+1=0$，当 $y=1$时，$-(y-1)^2+1=1$，

故当 $0<y<1$时，则 $y(2-y)\in(0,1)$，故 $x+\dfrac{1}{x}>y(2-y)$，故 D 正确.

故选：D.

7.【答案】C

【分析】根据向量的运算结合充分、必要条件分析判断.

【详解】因为 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，可知 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 不共线，

则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 所成角为锐角等价于 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})>0$，即 $\vec{a}^2>\vec{b}^2$，即 $|\vec{a}|>|\vec{b}|$，

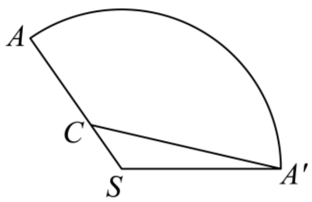
所以“$\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 所成角为锐角”是“$|\vec{a}|>|\vec{b}|$”的充分必要条件.

故选：C.

8.【答案】C

【分析】将圆锥侧面沿着母线 SA 展开，计算出展开图扇形的圆心角，结合余弦定理可求得灯光带的最小长度.

【详解】将圆锥侧面沿母线 SA 展开，其侧面展开图为如图所示的扇形 SAA'，则 $A'C$ 的长度即为灯光带的最小长度，



$\because AA'=2\pi r=12\pi$，$\therefore \angle ASA'=\dfrac{12\pi}{18}=\dfrac{2\pi}{3}$，

在 $\triangle A'SC$ 中，$SC=\dfrac{1}{3}SA=6$，$SA'=18$，

$\therefore A'C^2=A'S^2+SC^2-2A'S\cdot SC\cos\angle ASA'=18^2+6^2-2\times18\times6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=468$，

解得：$A'C=6\sqrt{13}$，即灯光带的最小长度为 $6\sqrt{13}\text{m}$.

故选：C.

9.【答案】B

【分析】结合图象即可得到$\begin{cases} g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \\ g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-1 \end{cases}$，进而求得$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \\ f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-1 \end{cases}$，结合正弦型函数的性质可求得周期和$\omega$，从而求得答案.

【详解】由图可知，函数$g(x)$过点$\left(\dfrac{\pi}{3},1\right)$和点$\left(\dfrac{5\pi}{6},-1\right)$，即$\begin{cases} g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \\ g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-1 \end{cases}$，

又因为$g(x)\cdot f(x)=1$，所以$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1 \\ f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-1 \end{cases}$，

结合正弦型函数的性质可知，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}$，解得$T=\pi$，

所以$\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，解得$\omega=\pm 2$，因为$\omega>0$，所以$\omega=2$

所以$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，所以$\sin(2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=1$，

即$\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$

解得$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$

因为$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$

故选：B.

10.【答案】B

【分析】结合点E到AD_1的距离有关，可判定 A 不正确；由点E在以B_1D_1中点为球心，$\sqrt{2}$为半径的球面与侧面BB_1C_1C交线，可判定 B 正确；由$AE=D_1E$时，点E在AD_1的中垂面上，得到点E的轨迹是线段B_1C，可判定 C 不正确；由$V_{B-AED_1}=V_{E-ABD_1}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABD_1}\cdot h$，可判定 D 不正确.

【详解】选项A中，边AD_1的长度为定值，三角形AED_1面积与点E到AD_1的距离有关，

当点E在线段BC_1上时，距离最小，此时面积取得最小值，在端点B_1,C处的距离最大，

此时面积取得最大值（舍去，端点不可取），所以 A 不正确；

选项B中，若$D_1E\perp B_1E$，可得点E在以B_1D_1中点为球心，$\sqrt{2}$为半径的球面上，

因为以B_1D_1为直径的球面与侧面BB_1C_1C有交，所以存在点E，满足$D_1E\perp B_1E$，

所以 B 正确；

选项 C 中，三角形 AED_1 是等腰三角形，当 $AE=D_1E$ 时，点 E 在 AD_1 的中垂面上，且 E 在侧面 BB_1C_1C 上，所以点 E 的轨迹是线段 B_1C（不含端点），有无穷多，所以 C 不正确；

选项 D 中，由 $V_{B-AED_1}=V_{E-ABD_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD_1}\cdot h$，高 h 不存在最大值（不包含端点）和最小值，所以 D 不正确.

故选：B.

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$[-1,0)\cup(0,+\infty)$

【分析】由被开方数非负和分母不等式 0 得到不等式，求出定义域.

【详解】由题意得 $\begin{cases}x+1\geq 0\\ x\neq 0\end{cases}$，解得 $x\geq -1$ 且 $x\neq 0$，

故 $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,+\infty)$.

故答案为：$[-1,0)\cup(0,+\infty)$

12.【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

【分析】先求 $|2\vec{a}-\vec{b}|$，$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$，利用向量夹角公式可得答案.

【详解】由题意 $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{5}|\vec{a}|$，

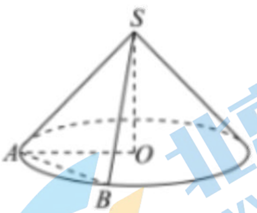
$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=2\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=2\vec{a}^2$，所以 $\cos\langle\vec{a},2\vec{a}-\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}||2\vec{a}-\vec{b}|}=\frac{2\vec{a}^2}{\sqrt{5}\vec{a}^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

13.【答案】$4\sqrt{2}\pi$

【分析】根据条件算出母线长和底面半径即可求出侧面积.

【详解】如图：其中 O 是底面圆心，设半径为 r，则 $AO=r$，



$\cos\angle ASB=\frac{3}{5}$，$\because\angle ASB\in(0,\pi)$，$\therefore\sin\angle ASB=\sqrt{1-\cos^2\angle ASB}=\frac{4}{5}$，

由于 SA，SB 都是母线，所以 $SA=SB$，

$\triangle SAB$ 的面积 $S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}SA\cdot SB\cdot\sin\angle ASB=\frac{1}{2}SA^2\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5},SA=2\sqrt{2}$ ，

因为 SA 与圆锥底面所成角为 45°，所以 $\angle SAO=45°$，

所以在等腰直角三角形 SAO 中， $AO=r=\frac{\sqrt{2}}{2}SA=2$ ，

所以侧面积= $\frac{1}{2}SA\cdot 2\pi r=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 2=4\sqrt{2}\pi$ ；

故答案为： $4\sqrt{2}\pi$.

14.【答案】 ①. $(-1,+\infty)$； ②. $\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

【分析】当 $a=0$ 时，根据单调性分段求值域，再取并集即可求值域；讨论可得 $a=0$ 与 $a<0$ 不符合题意；当 $a>0$ 时， $a+1>1$,画出图象，设 $y=x^2-1$ 与 $y=|x-a-1|$ 在 $(1,+\infty)$ 上的交点横坐标为 x_0，讨论可得 $a\geq x_0$ 时， $f(x)$ 的最小值为 1，求出 x_0，解不等式即可求 a 的取值范围.

【详解】若 $a=0$，则 $f(x)=\begin{cases}x^2-1,x>0\\|x-1|,x\leq 0\end{cases}$，

当 $x>0$, $f(x)=x^2-1$ 单调递增，所以 $f(x)>f(0)=-1$；

当 $x\leq 0$, $f(x)=|x-1|=1-x$ 单调递减，所以 $f(x)\geqslant f(0)=1$.

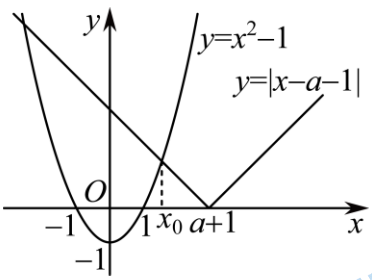
故 $f(x)$ 的值域为 $(-1,+\infty)$.

当 $a=0$ 时， $f(x)$ 的值域为 $(-1,+\infty)$，不符合题意；

当 $a<0$ 时， $f(x)=x^2-1$ 在 $(a,+\infty)$ 上的最小值为 -1，不符合题意；

当 $a>0$ 时， $a+1>1$,

画出 $y=x^2-1,y=|x-1|$ 的图象，如图所示：



设 $y=x^2-1$ 与 $y=|x-a-1|$ 在 $(1,+\infty)$ 上的交点横坐标为 x_0，

又 $f(a)=|a-a-1|=1$,

当 $0<a<x_0$ 时，由图象可得 $f(x)$ 无最小值；

当 $a\geq x_0$ 时，由图象可得 $f(x)$ 有最小值 $f(a)=1$，

由 $x^2-1=-(x-a-1)$，可得 $x^2+x-a-2=0$，

故可得 $x_0=\dfrac{-1+\sqrt{1+4(a+2)}}{2}$，

所以 $a\ge\dfrac{-1+\sqrt{1+4(a+2)}}{2}$，即 $(2a+1)^2\ge1+4(a+2)$，

化简得 $a^2\ge2$，解得 $a\ge\sqrt{2}$.

故答案为: $(-1,+\infty)$; $[\sqrt{2},+\infty)$.

【点睛】方法点睛：(1)分段函数问题中参数值影响变形时，往往要分类讨论，需有明确的标准、全面的考虑；

(2)求解过程中，求出的参数的值或范围并不一定符合题意，因此要检验结果是否符合要求.

15.【答案】②③

【分析】对①，根据 $f(-x)=-f(x)$ 即可判断①错误，对②，根据 $f(\pi-x)=f(x)$ 即可判断②正确，对③，根据复合函数的单调性即可判断③正确，对④，对 a 进行分类讨论，利用导数求解其极值即可判断④错误.

【详解】对①，$f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$，定义域为 $\{x\,|\,x\ne k\pi,k\in Z\}$，

$$f(-x)=a\sin(-x)+\frac{1}{\sin(-x)}=-a\sin x-\frac{1}{\sin x}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数，关于原点对称，故①错误.

对②，$f(\pi-x)=a\sin(\pi-x)+\dfrac{1}{\sin(\pi-x)}=a\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故②正确.

对③令 $t=\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$0<t<1$，$t=\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 为增函数，

$y=at+\dfrac{1}{t}(0<t<1)$，$a<0$，$y'=a-\dfrac{1}{t^2}<0$，$y=at+\dfrac{1}{t}$ 在 $(0,1)$ 为减函数，

所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故③正确.

对④，$f'(x)=a\cos x-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=\cos x\left(a-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$，

当 $0<a<1$ 时，$x\in(0,\pi)$，$a-\dfrac{1}{\sin^2 x}<0$，

所以 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)<0$，$f\left(x\right)$ 为减函数，

$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$f'\ x\ >0$，$f\left(x\right)$ 为增函数，则 $f\left(x\right)$ 无极大值，不符合舍去.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\cos x\left(1-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$，$x\in(0,\pi)$，$a-\frac{1}{\sin^2 x}\le 0$，

所以 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)<0$，$f\left(x\right)$ 为减函数，

$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$f'\ x\ >0$，$f\left(x\right)$ 为增函数，则 $f\left(x\right)$ 无极大值，不符合舍去.

当 $a>1$ 时，$a-\frac{1}{\sin^2 x}=0$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个根 x_1,x_2，且 $x_1<\frac{\pi}{2}<x_2<\pi$，

所以 $x\in(0,x_1)$，$f'(x)<0$，$f\left(x\right)$ 为减函数，

$x\in\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'\ x\ >0$，$f\left(x\right)$ 为增函数，

$x\in\left(\frac{\pi}{2},x_2\right)$，$f'(x)<0$，$f\left(x\right)$ 为减函数，

$x\in(x_2,\pi)$，$f'\ x\ >0$，$f\left(x\right)$ 为增函数，

即函数 $f\left(x\right)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在一个极大值点 $\frac{\pi}{2}$，不符合题意，故④错误.

故选：②③

三、解答题：共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) 1；$-\frac{1}{2}$

(2) $\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$

【分析】(1) 根据三角函数恒等变换化简 $f\left(x\right)$ 的表达式，结合其周期以及函数图像过的点即可求得答案；

(2) 根据 $x\in(0,a)$，确定 $2x+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6})$，结合正弦函数的零点，列出相应不等式，即可求得答案.

【小问 1 详解】

由题意得 $f\left(x\right)=\cos^2\omega x+\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x+m=\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+m$

$=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}+m$，

由最小正周期为π，可得$2\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2, \therefore \omega=1$；

由$f\left(x\right)$的图像经过点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$，则$\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}+m=\frac{1}{2}, \therefore m=-\frac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

由（1）可得$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

当$x\in\left(0,a\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},2a+\frac{\pi}{6})$，

因为函数$f\left(x\right)$在区间$\left(0,a\right)$内有且仅有 1 个零点，故令$\pi<2a+\frac{\pi}{6}\le 2\pi$，

解得$\frac{5\pi}{12}<a\le\frac{11\pi}{12}$，

即a的取值范围为$\left(\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$.

17.【答案】（1）证明过程见解析；

（2）存在，$\frac{DP}{DF}=\frac{1}{3}$，理由见解析.

【分析】（1）证明出四边形$CDFE$为平行四边形，得到$DF//CE$，从而得到线面平行；

（2）建立空间直角坐标系，设出$\frac{DP}{DF}=m\left(0\le m\le 1\right)$，利用线面角的正弦值列出方程，求出答案.

【小问 1 详解】

将直角梯形$ABCD$绕着AB旋转得到直角梯形$ABEF$，

故$CD=EF$且$CD//EF$，

故四边形$CDFE$为平行四边形，

所以$DF//CE$，

又$CE\subset$平面BCE，$DF\not\subset$平面BCE，所以$DF//$平面BCE；

【小问 2 详解】

因为$AF\perp AD$，$\angle DAB=90^\circ$，$\angle FAB=90^\circ$，

所以AD,AB,AF两两垂直，

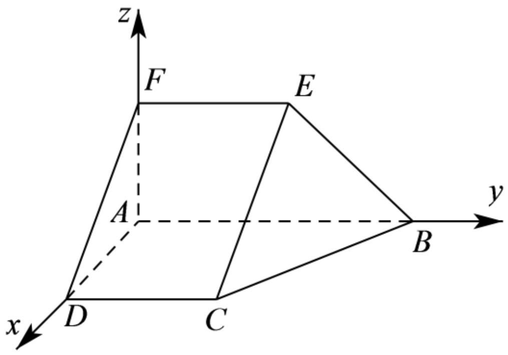
故以 A 为坐标原点，以AD,AB,AF所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系，

因为$AD=DC=\frac{1}{2}AB$，设$AD=1$，

则$A\left(0,0,0\right),D\left(1,0,0\right),F\left(0,0,1\right),B\left(0,2,0\right),C\left(1,1,0\right)$，

设$\frac{DP}{DF}=m\left(0\le m\le 1\right)$，则$\overrightarrow{DP}=m\overrightarrow{DF}$，设$P\left(a,0,b\right)$，

则 $(a-1,0,b)=m(-1,0,1)$，解得 $a=1-m,b=m$，故 $P(1-m,0,m)$，



当 $m=0$ 时，此时 P 与 D 重合，直线 AF 和平面 BCD 垂直，

不满足所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，舍去；

当 $m\neq 0$ 时，设平面 BCP 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=(1,-1,0)\cdot(x,y,z)=x-y=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=(m,1,-m)\cdot(x,y,z)=mx+y-mz=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=1,z=\frac{m+1}{m}$，故 $\vec{n}=\left(1,1,\frac{m+1}{m}\right)$，

设直线 AF 和平面 BCP 所成角的正弦值为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AF},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(0,0,1)\cdot\left(1,1,\frac{m+1}{m}\right)\right|}{\sqrt{1+1+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2}}=\frac{\frac{m+1}{m}}{\sqrt{1+1+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

解得 $m=\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{5}$（舍去），

综上，在线段 DF 上是否存在点 P，使得直线 AF 和平面 BCP 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

此时 $\frac{DP}{DF}=\frac{1}{3}$.

18.【答案】(1) $\frac{2}{5}$；(2) 分布列见解析，$E(X)=\frac{4}{5}$；(3) $s_1^2>s_2^{\,2}$

【分析】(1) 根据图表得到高于 8500 元的城市有 6 座，得到答案.

(2) X 的可能取值为 $0,1,2$，计算概率得到分布列，再计算期望得到答案.

(3) 根据数据的波动性得到答案.

【详解】(1) 根据图表知：月平均收入薪资高于 8500 元的城市有 6 座，故 $p=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

（2）X 的可能取值为$0,1,2$，则

$p(\xi=0)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$； $p(\xi=1)=C_2^1\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$； $p(\xi=2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$

分布列为：

ξ	0	1	2
p	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$E(X)=\frac{9}{25}\times0+\frac{12}{25}\times1+\frac{4}{25}\times2=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

（3）根据图像知月平均收入薪资对应数据波动更大，故$s_1^2>s_2{}^2$

【点睛】本题考查了概率的计算，分布列，数学期望，方差，意在考查学生的综合应用能力.

19. 【答案】（1）$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【分析】（1）根据给定条件，求出a,b即可作答.

（2）在直线l斜率存在时，设出其方程，再与C的方程联立，求出弦长最大值，验证直线l斜率不存在的情况作答.

【小问1详解】

设椭圆的半焦距为c，依题意$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{3}$，而$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得$c=\sqrt{2},b=1$，

所以所求椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

【小问2详解】

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，当$AB\perp x$轴时，直线AB：$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\x^2+3y^2=3\end{cases}$得$|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$|AB|=\sqrt{3}$，

当AB与x轴不垂直时，设直线AB的方程为$y=kx+m$，依题意，$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得$m^2=\frac{3}{4}(k^2+1)$，

把$y=kx+m$代入椭圆方程，整理得$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

$x_1+x_2=\frac{-6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{3(m^2-1)}{3k^2+1}$，当$k\neq0$时，

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(1+k^2)[\frac{36k^2m^2}{(3k^2+1)^2}-\frac{12(m^2-1)}{3k^2+1}]}$$

$$=\sqrt{\frac{12(k^2+1)(3k^2+1-m^2)}{(3k^2+1)^2}}=\sqrt{\frac{3(k^2+1)(9k^2+1)}{(3k^2+1)^2}}$$

$$=\sqrt{3+\frac{12k^2}{9k^4+6k^2+1}}=\sqrt{3+\frac{12}{9k^2+\frac{1}{k^2}+6}}\le\sqrt{3+\frac{12}{2\sqrt{9k^2\cdot\frac{1}{k^2}}+6}}=2,$$

当且仅当$9k^2=\frac{1}{k^2}$，即$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立，当$k=0$时，直线AB：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\x^2+3y^2=3\end{cases}$得

$|x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$|AB|=\sqrt{3}$，

综上得$|AB|_{\max}=2$，$\triangle AOB$面积$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\times\frac{\sqrt{3}}{2}\le\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\triangle AOB$面积的最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.【答案】（1）$y=1$

（2）当$a\le0$时，$f(x)$的减区间为$(-\infty,+\infty)$，无增区间；当 $a>0$时，$f(x)$的减区间为$\left(-\infty,-\frac{\ln a}{a}\right)$，

增区间为$\left(-\frac{\ln a}{a},+\infty\right)$

（3）$(-\infty,-\ln2]\cup[\ln4,+\infty)$

【分析】（1）当$a=1$时，求出函数$f(x)$的导数，求出曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处切线的斜率，然后求解切线的方程即可；

（2）先求出函数$f(x)$的导数，分$a\le0$和$a>0$两种情况讨论即可得到单调区间；

（3）将题中条件转化为若$\exists x\in[-1,1]$，使得$|f(x)|\ge3$成立，再结合函数放缩得到若$\exists x\in[-1,1]$，使得$f(x)_{\max}\ge3$成立，再根据（2）中的单调情况可知$f(x)_{\max}$为$f(-1)$与$f(1)$中的较大者，从而得到当$f(-1)\ge3$或$f(1)\ge3$即可满足题意，进而求解即可.

【小问1详解】

当$a=1$时，$f(x)=e^x-x$，则$f'(x)=e^x-1$，

得$f(0)=1$，$f'(0)=0$，

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=1$.

【小问2详解】

由 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-x$，则 $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax}-1$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\dfrac{\ln a}{a}$，

此时 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化情况如下：

x	$\left(-\infty,-\dfrac{\ln a}{a}\right)$	$-\dfrac{\ln a}{a}$	$\left(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

由上表可知，$f(x)$ 的减区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{\ln a}{a}\right)$，增区间为 $\left(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty\right)$，

综上，当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 的减区间为 $(-\infty,+\infty)$，无增区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的减区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{\ln a}{a}\right)$，增区间为 $\left(-\dfrac{\ln a}{a},+\infty\right)$.

【小问 3 详解】

将 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值记为 $f(x)_{\max}$，最小值记为 $f(x)_{\min}$，

因为存在 $x_1,x_2\in[-1,1]$，使得 $f(x_1)\cdot f(x_2)\ge 9$，

所以 $\exists x\in[-1,1]$，使得 $|f(x)|\ge 3$ 成立，即 $f(x)_{\max}\ge 3$ 或 $f(x)_{\min}\le -3$，

当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{ax}-x>-x>-1$，

若 $\exists x\in[-1,1]$，使得 $|f(x)|\ge 3$ 成立，只需 $f(x)_{\max}\ge 3$，

由（2）可知 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调或先减后增，

故 $f(x)_{\max}$ 为 $f(-1)$ 与 $f(1)$ 中的较大者，

所以只需当 $f(-1)\ge 3$ 或 $f(1)\ge 3$ 即可满足题意，

即只需 $f(-1)=\mathrm{e}^{-a}+1\ge 3$ 或 $f(1)=\mathrm{e}^{a}-1\ge 3$，

解得 $a\le -\ln 2$ 或 $a\ge \ln 4$，

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,-\ln 2]\cup[\ln 4,+\infty)$.

【点睛】关键点点睛：函数不等式恒成立问题，要进行适当转化．解答小问（3）的关键在于转化为若

$\exists x\in[-1,1]$，使得$|f(x)|\geq 3$成立，再结合函数放缩得到若$\exists x\in[-1,1]$，使得$f(x)_{\max}\geq 3$成立，再根据（2）中的单调情况求解$f(x)_{\max}$即可得到a的取值范围.

21.【答案】(1) $b_2=\frac{1}{2}$，$b_3=\frac{1}{2}$，$b_4=\frac{1}{4}$；

（2）①证明见解析；②$\frac{1}{2^{1009}}$.

【分析】(1) 利用题中定义，利用代入法进行求解即可；

（2）①根据充要条件的定义，结合反证法进行证明即可；②根据$\{a_n\}$的性质分类讨论进行求解即可.

【小问1详解】

$b_2=\left|a_1-\frac{a_2}{2}\right|b_1=\frac{1}{2}$，$b_3=\left|a_2-\frac{a_3}{2}\right|b_2=\frac{1}{2}$，$b_4=\left|a_3-\frac{a_4}{2}\right|b_3=\frac{1}{4}$；

【小问2详解】

①充分性：若X数列$\{a_n\}$为常数列，$\because a_1=1$，$\therefore a_n=1,n\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore b_{n+1}=\left|a_n-\frac{a_{n+1}}{2}\right|b_n=\frac{1}{2}b_n,n\in\mathrm{N}^*$，又$b_1=1\neq 0$，

$\therefore$其伴随数列$\{b_n\}$是以1为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列；

必要性：假设数列$\{b_n\}$为等比数列，而数列$\{a_n\}$不为常数列，

$\therefore$数列$\{a_n\}$中存在等于0的项，设第一个等于0的项为a_k，其中$k>1,k\in\mathrm{N}^*$，

$\therefore b_k=\left|1-\frac{0}{2}\right|b_{k-1}=b_{k-1}$，得等比数列$\{b_n\}$的公比$q=\frac{b_k}{b_{k-1}}=1$.

又$b_{k+1}=\left|\frac{a_{k+1}}{2}\right|b_k$，得等比数列$\{b_n\}$的公比$q=\left|\frac{a_{k+1}}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$，与$q=1$矛盾. $\therefore$假设不成立.

$\therefore$当数列$\{b_n\}$为等比数列时，数列$\{a_n\}$为常数列.

综上“$\{a_n\}$为常数列”是“$\{b_n\}$为等比数列”的充要条件；

②当$a_n=1$，$a_{n+1}=1$时，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$，

当$a_n=1$，$a_{n+1}=0$时，$b_{n+1}=b_n$，

当$a_n=0$，$a_{n+1}=1$时，$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$，

当$a_n=0$，$a_{n+1}=0$时，$b_{n+1}=0$，

综上，结合$a_{n+2}=\{0,1\}$可得：$b_{n+2}=\{\frac{1}{4}b_n$，$\frac{1}{2}b_n$，$0\}$，

由题意知 $b_n \geq 0$，所以 $b_{n+2} \leq \frac{1}{2} b_n$，

于是有 $b_{2019} \leq \frac{1}{2} b_{2017} \leq \frac{1}{2^2} b_{2015} \leq \cdots \leq \frac{1}{2^{1009}} b_1 = \frac{1}{2^{1009}}$，

所以 b_{2019} 的最大值为 $\frac{1}{2^{1009}}$.

【点睛】关键点睛：利用分类讨论法，结合题中定义是解题的关键.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！