第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\,|\,|x|<2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-3x-4\geqslant 0\}$，则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=$

   A. $(-2,-1)$　　B. $(-2,4)$

   C. $(-1,2)$　　D. $(2,4)$

2. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，若 $a+\mathrm{i}$ 与 $3-b\mathrm{i}$ 互为共轭复数，则 $(a-b\mathrm{i})^2=$

   A. $8+6\mathrm{i}$　　B. $8-6\mathrm{i}$　　C. $-8-6\mathrm{i}$　　D. $-8+6\mathrm{i}$

3. 已知 $\alpha\in(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$，且 $\sin 2\alpha-1=2\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=$

   A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

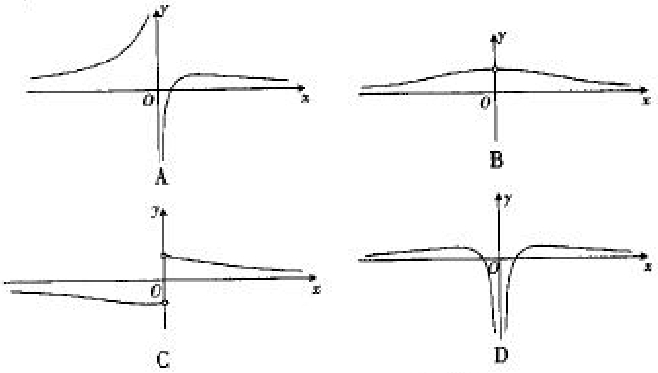
4. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 2,\\ x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为

   A. -5　　B. -3　　C. 1　　D. 2

5. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\cos B+b\cos A=4c\cos C$，$a=1$，$b=4$，则 $c=$

   A. 1　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{15}$

6. 函数 $f(x)=\frac{2(\mathrm{e}^x-1)}{x(\mathrm{e}^x+1)}$ 的部分图象大致为



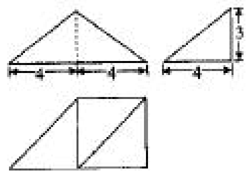
7. 将函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=g(x)$ 的图象，则 $y=g(x)$ 的图象的一条对称轴可能是

A. $x=\frac{\pi}{6}$　　B. $x=\frac{\pi}{4}$　　C. $x=\frac{\pi}{3}$　　D. $x=\frac{2\pi}{3}$

8. 采用系统抽样的方法从 400 人中抽取 20 人做问卷调查，为此将他们随机编号为 1，2，3，…，400. 适当分组后在第一组采用随机抽样的方法抽到的号码为 5，则抽到的 20 人中，编号落入区间 [201，319] 内的人员编号之和为

A. 600　　B. 1225　　C. 1530　　D. 1855

9. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为



A. $56+2\sqrt{34}$

B. $32+2\sqrt{34}$

C. $56+8\sqrt{3}$

D. $32+8\sqrt{2}$

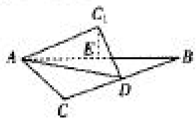
10. 古希腊数学家阿波罗尼斯在其巨著《圆锥曲线论》中提出“在同一平面上给出三点，若其中一点到另外两点的距离之比是一个大于零且不等于 1 的常数，则该点轨迹是一个圆”. 现在，某电信公司要在甲、乙、丙三地搭建三座 5G 信号塔来构建一个三角形信号覆盖区域，以实现 5G 商用，已知甲、乙两地相距 4 公里，丙、甲两地距离是丙、乙两地距离的 $\sqrt{3}$ 倍，则这个三角形信号覆盖区域的最大面积（单位：平方公里）是

A. $2\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $3\sqrt{6}$　　D. $4\sqrt{6}$

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, 0\leqslant x\leqslant 2,\\ \ln x, 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 若存在实数 x_1，x_2 满足 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 4$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_2-x_1 的最大值为

A. $e-2$　　B. 1　　C. $2+\ln 2$　　D. $2-\ln 2$

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=2$，$AC\perp BC$，D 为 BC 边上的一点，将 $\triangle ACD$ 折叠至 $\triangle AC_1D$ 的位置，使点 C_1 在平面 ABD 外，且点 C_1 在平面 ABD 上的射影 E 在线段 AB 上，设 $AE=x$，则 x 的取值范围是



A. $(\sqrt{2},2)$　　B. $(1,\sqrt{2})$

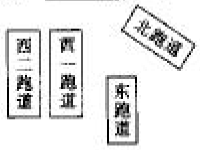
C. $(2,2\sqrt{2})$　　D. $(1,2)$

第 II 卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,-7)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，$\boldsymbol{c}=(1,1)$，若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$，则实数 $\lambda=$____▲____.

14. 北京大兴国际机场是一座跨地域、超大型的国际航空综合交通枢纽，目前建有“三纵一横”4 条跑道，分别叫西一跑道、西二跑道、东跑道、北跑道，如图所示. 若有 2 架飞往不同目的地的飞机要从以上不同跑道同时起飞，有____▲____种不同的安排方法；若西一跑道、西二跑道至少有一条跑道被选取，有____▲____种不同的安排方法.（用数字作答）



15. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且 $f(x-3)$ 为偶函数，$f(2)=8$，则 $f(12)+f(20)=$____▲____.

16. 已知抛物线 $C: y=2mx^2(m>0)$，焦点为 $F(0,1)$，定点 $P(0,-2)$. 若点 M,N 是抛物线 C 上的两相异动点，M,N 不关于 y 轴对称，且满足 $k_{PM}+k_{PN}=0$，则直线 MN 恒过的定点的坐标为___▲___.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是各项都为正数的等比数列，且 $2a_3+a_4=a_5$，$a_1+a_2=1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\log_2 3+\log_2 a_n$，求数列 $\left\{\frac{2}{b_{n+1}b_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（12 分）

"互联网＋"是"智慧城市"的重要内容，A 市在智慧城市的建设中，为方便市民使用互联网，在主城区覆盖了免费 WiFi. 为了解免费 WiFi 在 A 市的使用情况，调查机构借助网络进行了问卷调查，并从参与调查的网友中抽取了 200 人进行抽样分析，得到如下列联表（单位：人）：

	经常使用免费 WiFi	偶尔或不用免费 WiFi	合计
45 岁及以下	70	30	100
45 岁以上	60	40	100
合计	130	70	200

（1）根据以上数据，判断是否有 90% 的把握认为 A 市使用免费 WiFi 的情况与年龄有关；

（2）将频率视为概率，现从该市 45 岁以上的市民中用随机抽样的方法每次抽取 1 人，共抽取 3 次. 记被抽取的 3 人中"偶尔或不用免费 WiFi"的人数为 X，若每次抽取的结果是相互独立的，求 X 的分布列，数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

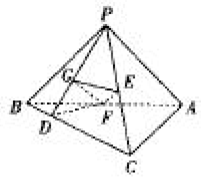
$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024

19.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=\sqrt{2}$，$AB=AC=2$，$AB\perp AC$，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，点 D 在线段 BC 上，且 $CD=3BD$，E,F 分别为线段 PC,AB 的中点，点 G 是 PD 上的动点.

（1）证明：$BC\perp FG$.

（2）当 $FG//$ 平面 PAC 时，求直线 PA 与平面 EFG 所成角的正弦值.



20.(12分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆心为坐标原点的单位圆 O 在 C 的内部，且与 C 有且仅有两个公共点，直线 $x+\sqrt{2}y=2$ 与 C 只有一个公共点.

(1)求 C 的标准方程；

(2)设不垂直于坐标轴的动直线 l 过椭圆 C 的左焦点 F，直线 l 与 C 交于 A,B 两点，且弦 AB 的中垂线交 x 轴于点 P，试求△ABP 的面积的最大值.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=x-ae^x+b$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a=1$ 时，若存在 $b\in[0,2]$，对于任意的实数 $x\in[0,1]$，恒有 $f(x)\geqslant(k-x)e^x-1$ 成立，求 k 的最大值.

(二)选考题：共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4－4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=6-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数)，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$($\varphi$ 为参数)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C_1,C_2 的极坐标方程；

(2)若射线 $l:\theta=\alpha(\rho\geqslant0)$ 分别交 C_1,C_2 于 A,B 两点，求 $\frac{|OB|}{|OA|}$ 的最大值.

23.[选修4－5：不等式选讲](10分)

已知 $f(x)=|\frac{1}{2}x-a|$.

(1)若不等式 $f(x)\leqslant1$ 的解集为 $\{x|2\leqslant x\leqslant6\}$，求 a 的值；

(2)在(1)的条件下，若 $f(2x)+2f(x)\geqslant m^2-4m-3$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 m 的取值范围.

高三数学考试参考答案(理科)

1. C 【解析】本题考查集合的交集、补集运算,考查运算求解能力.

因为 $A=\{x|-2<x<2\}$, $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|-1<x<4\}$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|-1<x<2\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算,考查运算求解能力.

因为 $a=3,b=1$,所以 $(3-\mathrm{i})^2=8-6\mathrm{i}$.

3. D 【解析】本题考查三角恒等变形的知识,考查运算求解能力.

由 $\alpha\in(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$,知 $\sin\alpha<\cos\alpha$,所以 $\sin 2\alpha-1=-(1-\sin 2\alpha)=-(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$. 又 $2\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha$,所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}$,即 $\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$,所以 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$.

4. C 【解析】本题考查线性规划问题,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

画出可行域(图略),由图可知,直线 $z=2x-y$ 过点 $A(1,1)$ 时,z 取得最大值 1.

5. D 【解析】本题考查正弦定理和余弦定理的运用,考查运算求解能力.

由 $a\cos B+b\cos A=4c\cos C$,得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=4\sin C\cos C$, $\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C=4\sin C\cos C$,所以 $\cos C=\frac{1}{4}$. 根据余弦定理得 $c^2=1+16-2\times1\times4\times\frac{1}{4}=15$,所以 $c=\sqrt{15}$.

6. B 【解析】本题考查函数的图象与性质,考查数形结合的数学思想以及推理论证能力.

因为 $f(x)=\frac{2(\mathrm{e}^x-1)}{x(\mathrm{e}^x+1)}$ 是偶函数,所以排除 A,C,当 $x>0$ 时,$f(x)>0$ 恒成立,所以排除 D,故选 B.

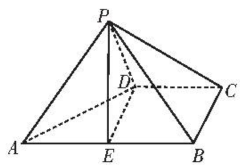
7. C 【解析】本题考查三角函数的图象变换和三角函数性质,考查运算求解能力.

函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象,再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,得到 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象. 由 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以选 C.

8. C 【解析】本题考查系统抽样的知识,考查数据处理能力和应用意识.

由系统抽样的定义可知,在区间[201,319]内抽取的编号数构成以 205 为首项,公差为 20 的等差数列,并且项数为 6,所以 $6\times205+\frac{6\times(6-1)}{2}\times20=1530$.

9. A 【解析】本题考查三视图以及几何体的表面积,考查空间想象能力和运算求解能力.



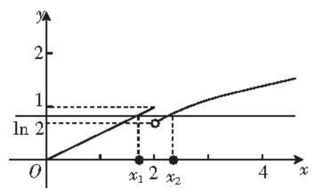
该几何体的直观图如图所示. 易知 $PB\perp BC,PD\perp DC,PD=PA=5,AD=4\sqrt{2},AB=8,PE=3$,所以 $S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}\times4\times5=10$, $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\sqrt{17}=2\sqrt{34}$, $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times8\times3=12$, $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times(4+8)\times4=24$,所以该几何体的表面积 $S=56+2\sqrt{34}$.

10. B 【解析】本题考查数学文化与圆的运用,考查化归与转化的数学思想.

由题意不妨设甲、乙两地坐标为$(-2,0)$,$(2,0)$,丙地坐标为(x,y),则 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{3}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,整理得 $(x-4)^2+y^2=12$,半径 $r=2\sqrt{3}$,所以最大面积为 $\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

11. A 【解析】本题考查导数的综合应用,考查学生数形结合、转化与化归的数学思想.

作出 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x,0\leqslant x\leqslant2,\\ \ln x,2<x\leqslant4\end{cases}$ 的图象如图所示.

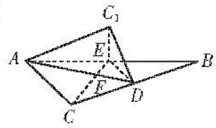


因为$\frac{1}{2}x_1=\ln x_2$，所以$x_1=2\ln x_2$，易知$x_2\in(2,\mathrm{e}]$，则$x_2-x_1=x_2-2\ln x_2$.

令$g(x)=x-2\ln x, x_2\in(2,\mathrm{e}]$，则$g'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，

易知函数$g(x)=x-2\ln x$在$(2,\mathrm{e}]$上单调递增，所以$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\mathrm{e}-2$.

12. A 【解析】本题考查折叠问题以及点、线、面的位置关系，考查空间想象能力和运算求解能力.



如图，连接CE交AD于F，设$CD=t$.

因为$AC=BC=2$，则$BD=2-t, C_1D=t, BE=2\sqrt{2}-x, AC_1=2, C_1E=\sqrt{4-x^2}$.

在△BDE中，$DE^2=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cdot\cos B=(2-t)^2+(2\sqrt{2}-x)^2-2(2-t)(2\sqrt{2}-x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$.

在△C_1DE中，$C_1E^2+DE^2=C_1D^2$，所以$4-x^2+(2-t)^2+(2\sqrt{2}-x)^2-\sqrt{2}(2-t)(2\sqrt{2}-x)=t^2$，整理得$x=\frac{4\sqrt{2}}{t+2}$，因为$0<t<2$，所以$\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$. ①

由折叠过程知$CE\perp AD$，$CF=C_1F=\frac{AC\cdot CD}{AD}=\frac{2t}{\sqrt{t^2+4}}$，$EF=\sqrt{C_1F^2-C_1E^2}=\sqrt{\frac{4t^2}{t^2+4}-4+x^2}$，显然，$C_1F>EF$，所以$\frac{4t^2}{t^2+4}>\frac{4t^2}{t^2+4}-4+x^2$，解得$0<x<2$. ②

由①②知$\sqrt{2}<x<2$.

13. 3 【解析】本题考查平面向量坐标运算和平面向量共线的知识，考查运算求解能力.

由已知得$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(2-\lambda,-7+2\lambda)$，又$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$，所以$(2-\lambda)-(-7+2\lambda)=0$，解得$\lambda=3$.

14. 12;10 【解析】本题考查排列组合知识的应用，考查数据处理能力和应用意识.

若有2架飞往不同目的地的飞机要从以上不同跑道同时起飞，有$A_4^2=12$种不同的安排方法；若西一跑道、西二跑道至少有一道被选取，有$A_4^2-A_2^2=10$种不同的安排方法.

15. -8 【解析】本题考查函数的奇偶性，考查运算求解能力.

由函数$f(x-3)$为偶函数，可得$f(x-3)=f(-x-3)$，所以$f(x-6)=f(-x)$. 又$f(x)$为奇函数，$f(-x)=-f(x)$，得$f(x-6)=-f(x)$，从而$f(x-12)=f(x)$，故该函数是周期为12的周期函数. 又函数$f(x)$为奇函数，则$f(0)=0$，$f(12)=f(0)=0$，$f(20)=f(8)=-f(2)=-8$.

16. $(0,2)$ 【解析】本题考查抛物线的知识，考查化归与转化的数学思想与运算求解能力.

抛物线C的标准方程为$x^2=\frac{y}{2m}$，焦点为$(0,\frac{1}{8m})$，所以$\frac{1}{8m}=1$，$m=\frac{1}{8}$，所以$x^2=4y$. 设$M(x_1,\frac{x_1^2}{4})$，$N(x_2,\frac{x_2^2}{4})$，则$k_{PM}+k_{PN}=\frac{\frac{x_1^2}{4}+2}{x_1}+\frac{\frac{x_2^2}{4}+2}{x_2}=0$，整理得$(x_1+x_2)(x_1x_2+8)=0$，所以恒有$x_1x_2=-8$，直线$MN$的方程为$y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1+x_2}{4}(x-x_1)=\frac{x_1+x_2}{4}x-\frac{x_1^2}{4}+2$，所以过定点$(0,2)$.

17. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，则$2a_3+a_4=a_5$，可变形为$2a_1q^2+a_1q^3=a_1q^4$，

化简为$q^2-q-2=0$，…… 2分

解得$q=2$或$q=-1$(舍去). …… 3分

因为$a_1+a_2=1$，所以$a_1+2a_1=1$，解得$a_1=\frac{1}{3}$. …… 5分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{3}\times2^{n-1}=\frac{2^{n-1}}{3}$. …… 6分

(2)因为$b_n=\log_2 3+\log_2 a_n=\log_2(3a_n)=\log_2 2^{n-1}=n-1$， …… 8分

所以$\frac{2}{b_{n+1}b_{n+2}}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， …… 10分

所以$S_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$. …… 12分

18. 解：(1)由列联表可知

$K^2=\dfrac{200\times(70\times40-60\times30)^2}{130\times70\times100\times100}\approx2.198$. ………………………………………………………… 3 分

因为 $2.198<2.706$，所以没有 90% 的把握认为 A 市使用免费 WiFi 的情况与年龄有关. ……………… 4 分

(2)由题意可知，$X\sim B(3,\dfrac{2}{5})$，X 的所有可能取值为 0，1，2，3. ………………………………… 5 分

$P(X=0)=C_3^0(\dfrac{3}{5})^3=\dfrac{27}{125}$；$P(X=1)=C_3^1(\dfrac{2}{5})\times(\dfrac{3}{5})^2=\dfrac{54}{125}$； ………………………………… 7 分

$P(X=2)=C_3^2(\dfrac{2}{5})^2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{125}$；$P(X=3)=C_3^3(\dfrac{2}{5})^3=\dfrac{8}{125}$. ………………………………… 9 分

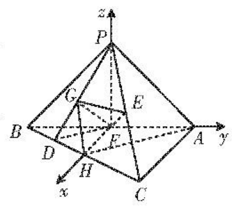
所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{27}{125}$	$\dfrac{54}{125}$	$\dfrac{36}{125}$	$\dfrac{8}{125}$

……… 10 分

$E(X)=3\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$，$D(X)=3\times\dfrac{2}{5}\times(1-\dfrac{2}{5})=\dfrac{18}{25}$. ……………………………………… 12 分

19. (1)证明：连接 PF，因为 $PA=PB$，F 为 AB 的中点，



所以 $PF\perp AB$. ………………………………………………………… 1 分

又平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，

所以 $PF\perp$ 平面 ABC，从而 $PF\perp BC$. ……………………………… 2 分

设 BC 的中点 H，因为 $BD=\dfrac{1}{4}BC$，DF 是 $\triangle ABH$ 的中位线，

所以 $DF\parallel AH$.

同理可知 $AH\perp BC$，所以 $DF\perp BC$， ………………………………………………………… 3 分

所以 $BC\perp$ 平面 PDF. ……………………………………………………………………… 4 分

因为 $FG\subset$ 平面 PDF，所以 $BC\perp FG$. …………………………………………………… 5 分

(2)解：连接 GH，因为 FH 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $FH\parallel AC$.

因为 $AC\subset$ 平面 PAC，$FH\not\subset$ 平面 PAC，所以 $FH\parallel$ 平面 PAC. ………………………… 6 分

又因为 $FG\parallel$ 平面 PAC，$FG\cap FH=F$，所以平面 $FGH\parallel$ 平面 PAC. …………………… 7 分

因为平面 PBC 分别与平面 FGH 与 PAC 相交于 GH，PC，

所以 $GH\parallel PC$，且 $\dfrac{GH}{PC}=\dfrac{DH}{DC}=\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………… 8 分

易知 FH，FA，FP 两两垂直，以 F 为坐标原点，以 FH，FA，FP 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系 $F-xyz$，如图所示，则 $F(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$C(2,1,0)$，$P(0,0,1)$，$H(1,0,0)$，$E(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HG}=(1,0,0)+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CP}=(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3})$，$\overrightarrow{FE}=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$. ……………………… 9 分

设平面 EFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{FG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{FE}\cdot\boldsymbol{n},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{3}=0,\\ a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}=0,\end{cases}$ 取 $a=2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,-1,-3)$. ……………………… 10 分

又 $\overrightarrow{PA}=(0,1,-1)$，设 PA 与平面 EFG 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PA}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ……………………………………………… 12 分

20. 解：(1)依题意，得 $b=1$. ………………………………………………………………………… 1 分

将 $x=2-\sqrt{2}y$ 代入椭圆的方程,得 $(a^2+2)y^2-4\sqrt{2}y+4-a^2=0$, ………………………………… 2 分

由 $\Delta=32-4(a^2+2)(4-a^2)=0$,解得 $a^2=2$,……………………………………………………… 3 分

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)可得左焦点 $F(-1,0)$. ……………………………………………………………………… 5 分

由题意设直线 l 的方程为 $x=my-1(m\neq0)$,

代入椭圆方程,得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$. ……………………………………………………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+2}$, ………………………………… 7 分

所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\frac{-4}{m^2+2}$,$AB$ 的中点为 $Q(\frac{-2}{m^2+2},\frac{m}{m^2+2})$. ……………………… 8 分

设点 $P(x_0,0)$,则 $k_{PQ}=\frac{-m}{2+(m^2+2)x_0}=-m$,解得 $x_0=\frac{-1}{m^2+2}$, ………………………… 9 分

故 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|PF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{|x_0+1|}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{\sqrt{2}(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{(m^2+2)^2}$. ……………… 10 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}(t>1)$,则 $m^2=t^2-1$,且 $S_{\triangle ABP}=\frac{\sqrt{2}t^3}{(t^2+1)^2}=\frac{\sqrt{2}}{t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}}$. ……………………………… 11 分

设 $f(t)=t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}(t>1)$,则 $f'(t)=1-\frac{2}{t^2}-\frac{3}{t^4}=\frac{(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})(t^2+1)}{t^4}$.

易知,$f(t)$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 上单调递减,在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(t)_{\min}=f(\sqrt{3})=\frac{16\sqrt{3}}{9}$,

所以 $S_{\triangle ABP}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\frac{16\sqrt{3}}{9}}=\frac{3\sqrt{6}}{16}$,即△$ABP$ 的面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{16}$. ……………………………………… 12 分

21. 解:法一:(1)因为 $f(x)=x-ae^x+b$,所以 $f'(x)=1-ae^x$. ………………………………………… 1 分

①当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)=1-ae^x>0$,此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数. ……………………………… 2 分

②当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x<-\ln a$;由 $f'(x)<0$,得 $x>-\ln a$,……………………………… 3 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递增,在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递减. ……………………… 4 分

(2)由条件可得 $f(x)\geqslant(k-x)e^x-1$,即 $k\leqslant e^{-x}[(x-1)e^x+x+b+1]$. ……………………… 5 分

记 $g(x)=e^{-x}[(x-1)e^x+x+b+1]=x-1+e^{-x}(x+b+1)$,

所以 $g'(x)=-e^{-x}(e^x-x-b)=-e^{-x}f(x)$,其中 $f(x)=-e^x+x+b$. ……………………………… 6 分

由(1)知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数,在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,$f(0)=b-1$.

①当 $0\leqslant b\leqslant1$ 时,$f(0)=b-1\leqslant0$,所以 $f(x)\leqslant0$,可得 $g'(x)\geqslant0$,从而 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数,只要 $k\leqslant g(0)=b$,此时存在 $b\in[0,1]$,$k\leqslant g(0)=b\leqslant1$. ……………………………………………………………… 7 分

②若 $f(1)\geqslant0$,即 $f(1)=-e+1+b\geqslant0$,$b\geqslant e-1$,可得 $g'(x)\leqslant0$,从而 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数,只要 $k\leqslant g(1)=\frac{1}{e}(2+b)$,此时存在 $b\in[e-1,2]$ 成立,所以 $k\leqslant\frac{4}{e}$. ………………………………………………… 8 分

③若 $1<b<e-1$,因为 $f(0)\cdot f(1)=(b-1)(b+1-e)<0$,又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数,所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的零点记为 t,从而 $g(x)$ 在 $[0,t]$ 上是减函数,在 $[t,1]$ 上是增函数,那么 $k\leqslant g(t)=t-1+e^{-t}(t+b+1)$,由于 $b=e^t-t$,$k\leqslant g(t)=t-1+e^{-t}(t+e^t-t+1)=t+e^{-t}$. ……………………………… 10 分

令 $h(t)=t+e^{-t}$,$t\in[0,1]$,$h'(t)=1-e^{-t}\geqslant0$,$k\leqslant1+\frac{1}{e}$. ……………………………… 11 分

综上,k 的最大值为 $\frac{4}{e}$. …………………………………………………………………………… 12 分

法二:(1)同法一第(1)问解答.

(2)当 $a=1$ 时,$f(x)=x-e^x+b$,若存在 $b\in[0,2]$,使得 $x-e^x+b\geqslant(k-x)e^x-1$ 成立,则有 $x-e^x+2\geqslant$

$(k-x)e^x-1$ 成立，…………………………………………………………………… 6 分

整理得 $k\leqslant x-1+\dfrac{x+3}{e^x}$，即对于任意的实数 $x\in[0,1]$，$k\leqslant x-1+\dfrac{x+3}{e^x}$ 恒成立. ……………… 7 分

令 $F(x)=x-1+\dfrac{x+3}{e^x}(0\leqslant x\leqslant 1)$，则 $F'(x)=\dfrac{e^x-(x+2)}{e^x}$，…………………………………… 8 分

取 $p(x)=e^x-(x+2)$，则 $p'(x)=e^x-1\geqslant 0$，…………………………………………………… 9 分

所以 $p(x)=e^x-(x+2)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$p(x)\leqslant p(1)=e-3<0$，……………………………… 10 分

所以 $F'(x)=\dfrac{e^x-(x+2)}{e^x}<0$，$F(x)=x-1+\dfrac{x+3}{e^x}$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，$F(x)_{\min}=F(1)=\dfrac{4}{e}$，所以 $k\leqslant\dfrac{4}{e}$，

即 k 的最大值为 $\dfrac{4}{e}$. ……………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=6-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}t,\end{cases}$ 消去参数，得 $x+\sqrt{3}y-9=0$，

转化为极坐标方程为 $\rho=\dfrac{9}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$. ……………………………………………………… 2 分

曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi,\end{cases}$ 消去参数，得 $(x-2)^2+y^2=4$，

转化为极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)因为射线 $l:\theta=\alpha(\rho\geqslant 0)$ 分别交 C_1，C_2 于 A，B 两点，

所以 $|OA|=\rho_A=\dfrac{9}{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}$，$|OB|=\rho_B=4\cos\alpha$，………………………………………… 6 分

所以 $\dfrac{|OB|}{|OA|}=4\cos\alpha\cdot\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}{9}=\dfrac{2}{9}[1+2\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})]$，……………………………… 8 分

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$\dfrac{|OB|}{|OA|}$ 的最大值为 $\dfrac{2}{3}$. ……………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)因为 $|\dfrac{1}{2}x-a|\leqslant 1$，所以 $-1\leqslant\dfrac{1}{2}x-a\leqslant 1$，…………………………………………… 1 分

所以 $2a-2\leqslant x\leqslant 2a+2$，即 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $\{x|2a-2\leqslant x\leqslant 2a+2\}$. ……………………… 3 分

又不等式 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $\{x|2\leqslant x\leqslant 6\}$，

所以 $\begin{cases}2a-2=2,\\ 2a+2=6,\end{cases}$ 解得 $a=2$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(2x)+2f(x)=|x-2|+|x-4|=\begin{cases}6-2x, x<2,\\ 2, 2\leqslant x<4,\\ 2x-6, x\geqslant 4,\end{cases}$ ………………………………… 7 分

易知 $f(2x)+2f(x)$ 的最小值是 2. ……………………………………………………… 8 分

因为 $f(2x)+2f(x)\geqslant m^2-4m-3$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

所以 $m^2-4m-3\leqslant 2$，即 $m^2-4m-5\leqslant 0$，…………………………………………………… 9 分

解得 $-1\leqslant m\leqslant 5$，即 m 的取值范围为 $[-1,5]$. ……………………………………………… 10 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 20 万+。

北京高考在线_2020 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao