河南、河北两省重点高中2020届高三阶段性考试（三）

数　学（文科）

考生注意：

1．本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分．考试时间120分钟．

2．请将各题答案填写在答题卡上．

3．本试卷主要考试内容：复数，集合与常用逻辑用语，函数与导数，三角与向量，数列，不等式．

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid x+1<2\}$，$B=\{x\mid x^2<9\}$，则 $A\cap B=$

A．$(1,3)$　　B．$(-\infty,1)$　　C．$(-3,3)$　　D．$(-3,1)$

2．复数 $z=(5+2i)-(2-i)$，则 $|z|=$

A．5　　B．$3\sqrt{2}$　　C．18　　D．25

3．在公比为2的等比数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和为 S_n，且 $S_7-2S_6=1$，则 $a_1+a_5=$

A．5　　B．9　　C．17　　D．33

4．已知向量 $\mathbf{m}=(\lambda+1,1)$，$\mathbf{n}=(\lambda+2,2)$，若 $(2\mathbf{m}+\mathbf{n})\parallel(\mathbf{m}-2\mathbf{n})$，则 $\lambda=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

5．若 $4^m=3^n=k$，且 $2m+n=mn\neq0$，则 $k=$

A．18　　B．26　　C．36　　D．42

6．“$a<-1$”是“$\exists x_0\in R$，$a\sin x_0+1<0$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．函数 $f(x)=x^3+\lg x-18$ 的零点所在的区间为

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

8．已知函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $f(x)$ 的最小正周期和最大值分别为

A．π，$\frac{1}{4}$　　B．π，$\frac{1}{2}$　　C．2π，$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$　　D．2π，$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9．已知 1＜a＜2，实数 x，y 满足 $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ y\leqslant 1, \\ \dfrac{|x|}{a}+\dfrac{|y|}{a}\leqslant 1, \end{cases}$ 且 $z=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}$ 的最大值为 $\dfrac{5}{8}$，则 a＝

A．$\dfrac{7}{8}$　　B．$\dfrac{9}{8}$　　C．$\dfrac{5}{4}$　　D．$\dfrac{3}{2}$

10．已知函数 f（x）＝｜$\log_2 x$｜，当 0＜m＜n 时，f（m）＝f（n），若 f（x）在[m^2，n]上的最大值为 2，则 $\dfrac{n}{m}=$

A．2　　B．$\dfrac{5}{2}$　　C．3　　D．4

11．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$a_2=2$，且 $(-1)^n(a_n-a_{n+2})=2-2\cdot(-1)^n$，则 S_{2019} 的值为

A．2018×1011－1　　B．2019×1010

C．2019×1011－1　　D．2018×1010

12．已知函数 f（x）＝（x^2－a）lnx，曲线 y＝f（x）上存在两个不同点，使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\dfrac{1}{e^2}, 0)$　　B．（－1，0）　　C．$(-\dfrac{1}{e^2}, +\infty)$　　D．（－1，＋∞）

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13．函数 f（x）＝x＋sinx（1－cosx）的图像在点（π，π）处的切线方程是__________.

14．已知α 为第二象限角，则 $\cos\alpha\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sin^2\alpha\sqrt{1+\dfrac{1}{\tan^2\alpha}}=$__________.

15．在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 a，b，c 成等比数列，且 b＝acosC＋csinA，则 $\dfrac{b\sin B}{c}=$__________.

16．正数 a，b 满足 a＞b，ab＝1，则 $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$ 的最小值为__________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2+S_2=-5$，$S_5=-15$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$.

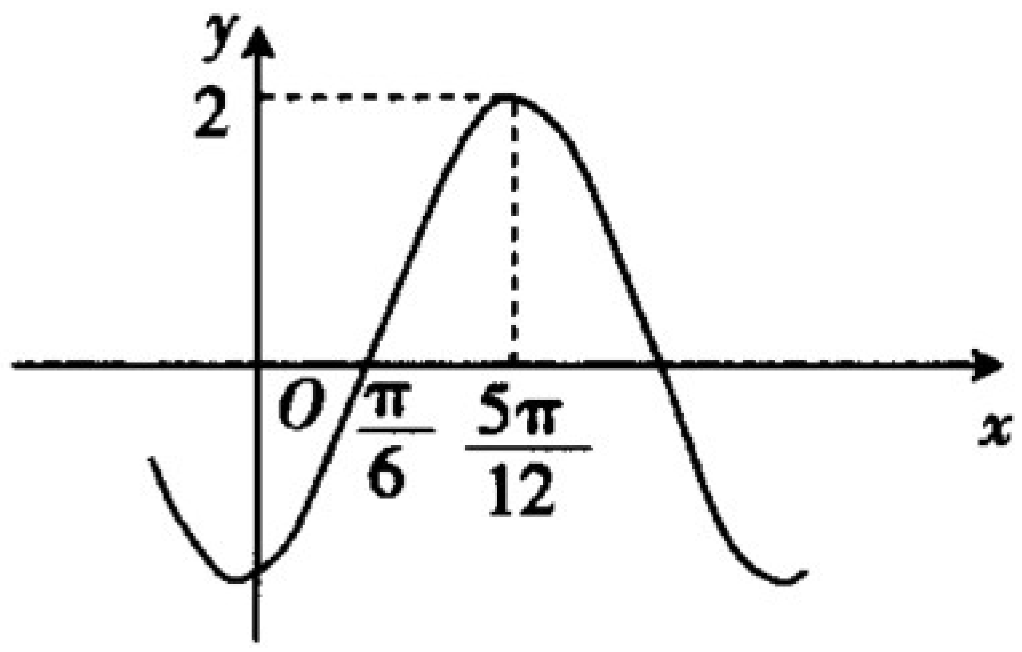
18.（12 分）

已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（A>0，$\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的部分图像如图所示.

（1）求 f（0）的值；

（2）求 f（x）在$[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值；

（3）不画图，说明函数 y=f（x）的图像可由 y=sinx 的图像经过怎样变化得到.



19.（12 分）

已知函数$f(x)=\begin{cases}4^x-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1-4^{-x}, & x<0.\end{cases}$

（1）判断 f（x）在（－∞，＋∞）上的奇偶性，并证明之；

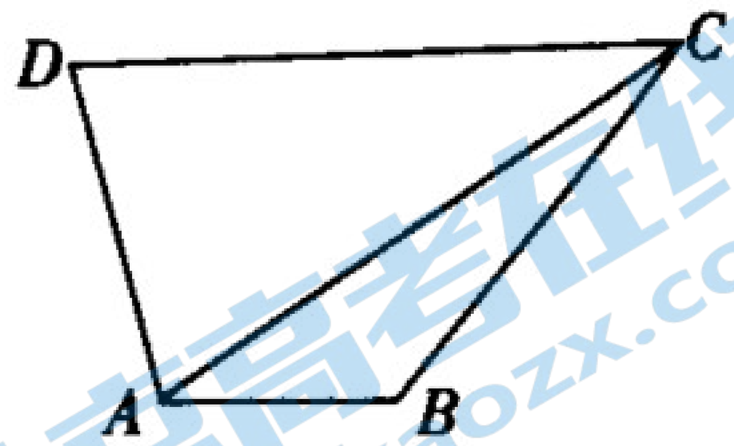
（2）求不等式－1<f（$\log_4x$）≤3 的解集.

20.（12 分）

如图，在平面四边形 ABCD 中，AB＝$\sqrt{3}-1$，BC＝$\sqrt{3}+1$，CA＝3，且角 D 与角 B 互补，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}$.

（1）求△ACD 的面积；

（2）求△ACD 的周长.



21.（12 分）

设 a∈**R**，命题 p：函数 $y=\log_a(x^3-ax)$（a>0，a≠1）在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内单调递增；

q：函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{4a}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+1$ 仅在 x=0 处有极值.

（1）若命题 q 是真命题，求 a 的取值范围；

（2）若命题 $p\vee(\neg q)$ 是真命题，求 a 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$（a∈**R**）.

（1）讨论 f（x）的单调性；

（2）若 f（x）<0 在区间[－1，＋∞）上有解，求 a 的取值范围.

2019～2020 年度河南省高三阶段性考试(三)
数学参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查集合的交集运算,考查运算求解能力.
因为 $A=\{x|x+1<2\}=\{x|x<1\}$,$B=\{x|x^2<9\}=\{x|-3<x<3\}$,所以 $A\cap B=\{x|-3<x<1\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的运算和模,考查运算求解能力.
$z=3+3i$,$|z|=3\sqrt{2}$.

3. C 【解析】本题考查等比数列的通项公式,考查运算求解能力.
由 $S_{n+1}=a_1+qS_n$,得 $S_7-2S_6=a_1=1$,所以 $a_5=2^4=16$,所以 $a_1+a_5=17$.

4. B 【解析】本题考查平面向量的坐标运算,考查运算求解能力.
因为 $2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(3\lambda+4,4)$,$\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}=(-\lambda-3,-3)$,且 $(2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})/\!/(\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n})$,
所以 $(-3)\cdot(3\lambda+4)-4\cdot(-\lambda-3)=0$,$\lambda=0$.

5. C 【解析】本题考查对数的运算,考查运算求解能力.
由题意得 $m=\log_4 k$,$n=\log_3 k$. 又由 $2m+n=mn$,得 $\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=1$,
所以 $\log_k 4+2\log_k 3=1$,即 $\log_k 36=1$,解得 $k=36$.

6. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件和三角函数,考查数形结合和运算求解能力.
必要性:设 $f(x)=a\sin x+1$,当 $a>0$ 时,$f(x)\in[1-a,1+a]$,所以 $1-a<0$,即 $a>1$;
当 $a<0$ 时,$f(x)\in[1+a,1-a]$,所以 $1+a<0$,即 $a<-1$. 故 $a>1$ 或 $a<-1$.
充分性:取 $x_0=\frac{\pi}{2}$,当 $a<-1$ 时,$a\sin x_0+1<0$ 成立.

7. C 【解析】本题考查函数的零点存在性定理,考查推理论证能力.
因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(2)=2^3+\lg 2-18=\lg 2-10<0$,$f(3)=3^3+\lg 3-18=9+\lg 3>0$,所以函数 $f(x)$ 的零点所在的区间为 $(2,3)$.

8. B 【解析】本题考查三角函数的图象及恒等变换,考查运算求解能力.
$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$,最小正周期为 π,最大值为 $\frac{1}{2}$.

9. D 【解析】本题考查线性规划问题,考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.
由可行域可知,z 在点 $(1,a-1)$ 处取得最大值,所以 $\frac{1}{2}+\frac{a-1}{4}=\frac{5}{8}$,解得 $a=\frac{3}{2}$.

10. D 【解析】本题考查函数的图象与最值,考查推理论证能力.
因为 $f(x)=|\log_2 x|$,且当 $0<m<n$ 时,$f(m)=f(n)$,所以 $mn=1$,且 $n>1$,$0<m<1$,所以 $m^2<m$,则 $f(x)$ 在 $[m^2,n]$ 上的最大值为 $f(m^2)=|\log_2 m^2|=-\log_2 m^2=2$,解得 $m=\frac{1}{2}$,所以 $n=2$,故 $\frac{n}{m}=4$.

11. C 【解析】本题考查等差数列的定义以及前 n 项和,考查运算求解能力,分类讨论的数学思想.
当 n 为奇数时,$a_{n+2}-a_n=4$,数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1,公差为 4 的等差数列;
当 n 为偶数时,$a_{n+2}-a_n=0$,数列 $\{a_{2n}\}$ 是首项为 2,公差为 0 的等差数列.
所以 $S_{2019}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2019})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2018})=1010+\frac{1}{2}\times1010\times1009\times4+1009\times2=2019\times1011-1$.

12. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查化归与转化、函数与方程和数形结合的数学思想以及运算求解能力.
因为曲线 $y=f(x)$ 上存在两个不同点,使得曲线在这两点处的切线都与 y 轴垂直,所以 $f'(x)=2x\ln x+\frac{x^2-a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的解,即 $a=2x^2\ln x+x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的解. 设 $g(x)=$

$2x^2\ln x+x^2$，$g'(x)=4x\ln x+2x^2\cdot\frac{1}{x}+2x=4x(\ln x+1)$，所以当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，且当 $x\in(0,\frac{1}{\sqrt{e}})$ 时，$g(x)<0$，又 $g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e^2}$，所以当 $a\in(-\frac{1}{e^2},0)$ 时，$a=2x^2\ln x+x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的解.

13. $x+y-2\pi=0$ **【解析】本题考查导数的几何意义，考查数形结合的数学思想.**

$f'(x)=1-\cos 2x+\cos x$，所以 $f'(\pi)=-1$，切线方程为 $y-\pi=-(x-\pi)$，即 $x+y-2\pi=0$.

14. -1 **【解析】本题考查三角恒等变换的知识，考查运算求解能力.**

因为 α 为第二象限角，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，

所以 $\cos\alpha\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}=\cos\alpha\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha\cdot\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}=-1-\sin\alpha$，

$\sin^2\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}=\sin^2\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=\sin\alpha$，所以 $\cos\alpha\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sin^2\alpha\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}=-1$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换，考查运算求解能力.**

由正弦定理可知，$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，易得 $c\cos A=c\sin A$，$A=\frac{\pi}{4}$. 又 a,b,c 成等比数列，所以 $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$，$\frac{b\sin B}{c}=\frac{a\sin B}{b}=\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. 2 **【解析】本题考查基本不等式的应用，考查推理论证能力和运算求解能力.**

$\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2-ab}{a-b}=\frac{(a-b)^2+1}{a-b}=a-b+\frac{1}{a-b}$，令 $t=a-b>0$，则 $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}=t+\frac{1}{t}\geqslant 2$，当且仅当 $t=1$ 时取等号.

17. 解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_2+S_2=3a_1+2d=-5$，…… 2 分

$S_5=5a_1+10d=-15$，即 $a_1+2d=-3$，…… 3 分

解得 $a_1=-1$，$d=-1$，…… 4 分

所以 $a_n=-1-(n-1)=-n$. …… 5 分

(2) 由 $a_n=-n$，所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，…… 6 分

所以 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，…… 8 分

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. …… 10 分

18. 解：(1) 根据图象可以得到 $A=2$，$T=4(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6})=\pi$，

所以 $\omega=2$，$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$. …… 1 分

又 $f(\frac{5\pi}{12})=2$，所以 $\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=1$，

所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$. …… 2 分

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，…… 3 分

$f(0)=2\sin(-\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$. …… 4 分

(2) 由 $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，得 $-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$，…… 5 分

所以$-1\leqslant\sin(2x-\frac{\pi}{3})\leqslant\frac{1}{2}$，……………………………………………………………… 7 分

所以$-2\leqslant f(x)\leqslant 1$，

故当$x=-\frac{\pi}{12}$时，$f(x)$取得最小值-2；当$x=\frac{\pi}{4}$时，$f(x)$取得最大值 1. ……………………… 9 分

(3)先将$y=\sin x$的图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变)，得到$y=2\sin x$的图象；……………………………………………………………………………………………………… 10 分

再将$y=2\sin x$的图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到$y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$的图象；………… 11 分

最后将$y=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，得到$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象. …………………………………………………………………………………………………… 12 分

注：其他解法相应给分.

19. 解：(1)函数$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数. ………………………………………………………… 1 分

证明如下：

任取$x>0$，则$-x<0$，

所以$f(-x)=1-4^{x}=-(4^{x}-1)=-f(x)$；…………………………………………………………… 3 分

再任取$x<0$，则$-x>0$，

所以$f(-x)=4^{-x}-1=-(1-4^{-x})=-f(x)$；

又当$x=0$时，$-x=0$，

所以$f(-x)=0=-0=-f(x)$. ……………………………………………………………………………… 5 分

故$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)当$x>0$时，$f(x)=4^{x}-1$是增函数，

所以$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数. ……………………………………………………………………… 7 分

又$f(-\frac{1}{2})=-1$，$f(1)=3$，……………………………………………………………………………… 9 分

所以$-\frac{1}{2}<\log_4 x\leqslant 1$，所以$\frac{1}{2}<x\leqslant 4$，………………………………………………………………… 11 分

所以不等式$-1<f(\log_4 x)\leqslant 3$的解集为$(\frac{1}{2},4]$. ……………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=-\frac{1}{4}$，

所以$\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$. ……………………………………………………………………………… 2 分

因为角D与角B互补，

所以$\sin\angle ADC=\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\angle ADC=-\cos\angle ABC=\frac{1}{4}$. ………………………… 3 分

又$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}$，

所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\cos\angle ADC=\frac{3}{2}$，即$|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|=6$，………………………… 5 分

所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cdot\sin\angle ADC=\frac{3\sqrt{15}}{4}$. ……………………………………………… 6 分

(2)在$\triangle ACD$中，由余弦定理得$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos\angle ADC$，

所以$AD^2+CD^2=AC^2+2AD\cdot CD\cos\angle ADC=12$，………………………………………………… 8 分

所以$AD+CD=2\sqrt{6}$，……………………………………………………………………………………… 10 分

所以$\triangle ACD$的周长为$AD+CD+AC=2\sqrt{6}+3$. ……………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)由题意知，$f'(x)=x(x^2+4ax+1)$，显然 $x=0$ 不是方程 $x^2+4ax+1=0$ 的根.

为使 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值，必须 $x^2+4ax+1\geqslant 0$ 恒成立，即 $\Delta=4(4a^2-1)\leqslant 0$，

解不等式，得 $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$. 这时 $f(0)=1$ 是唯一极值，…… 3 分

因此满足条件的 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. …… 5 分

(2)当 p 是真命题时，记 $g(x)=x^3-ax$，则 $g'(x)=3x^2-a$.

当 $a>1$ 时，要使得 $y=\log_a(x^3-ax)$ 是增函数，则需有 $g'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 恒成立，

所以 $a\leqslant 0$，与 $a>1$ 矛盾； …… 7 分

当 $0<a<1$ 时，要使得 $y=\log_a(x^3-ax)$ 是增函数，则需有 $g'(x)\leqslant 0$ 对 $x\in(-\frac{1}{2},0)$ 恒成立，

所以 $a\geqslant 3\cdot(-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$，所以 $\frac{3}{4}\leqslant a<1$.

记当 p 是真命题时 a 的取值集合为 A，则 $A=\{a|\frac{3}{4}\leqslant a<1\}$； …… 9 分

记当 $\neg q$ 是真命题时 a 的取值集合为 B，则 $B=\{a|a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}\}$. …… 10 分

因为 $p\vee(\neg q)$ 是真命题，

所以 a 的取值范围是 $A\cup B=\{a|a<-\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{1}{2}\}$. …… 12 分

22. 解：(1)因为 $f(x)=e^x-ax$，所以 $f'(x)=e^x-a$. …… 2 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增； …… 3 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减. …… 5 分

(2)由(1)可知，当 $a\leqslant 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，因为 $f(x)<0$ 在区间 $[-1,+\infty)$ 上有解，所以 $f(-1)=\frac{1}{e}+a<0$，则 $a<-\frac{1}{e}$； …… 7 分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减. …… 8 分

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{e}$ 时，$\ln a\leqslant -1$，$f(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(-1)=\frac{1}{e}+a<0$，则 $a<-\frac{1}{e}$，不符合题意； …… 9 分

②当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$\ln a>-1$，$f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,\ln a)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a<0$，则 $a>e$. …… 11 分

综上，$a\in(-\infty,-\frac{1}{e})\cup(e,+\infty)$. …… 12 分