七校联合体 2022 届高三第一次联考考试（8 月）

数学科目

命题学校：中山一中　命题人：　审题人：

(满分 150 分．考试用时 120 分钟)

第一部分选择题（共 60 分）

一、单项选择题：本题共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x \mid x^2<4\}$， $B=\{x \mid x>0\}$，则 $A \cap B$ =(　　)

A. $\{x \mid 0<x<2\}$　B. $\{x \mid x>-2\}$　C. $\{x \mid -2<x \leq 0\}$　D. $\{x \mid 0<x<4\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=(1-i)$，则复数 z 的模 $|z|$=（　　）

A. 0　B. 1　C. $\sqrt{2}$　D. 2

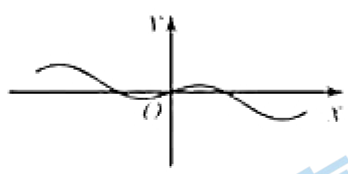
3. 做志愿者参与社区服务是学生参加社会公益活动的主要途径，某个星期日有 4 名学生志愿者随机平均分配到 A、B 两个社区进行垃圾分类宣传活动，则其中甲乙两人都被分配到 A 社区的概率是（　　）

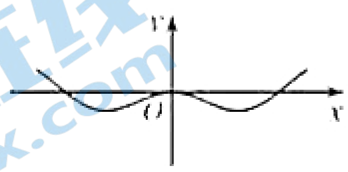
A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{1}{6}$　D. $\frac{1}{3}$

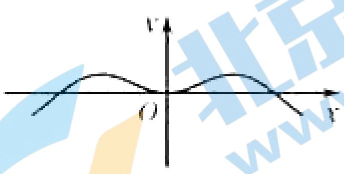
4. 二项式 $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^6$ 展开式中常数项是（　　）

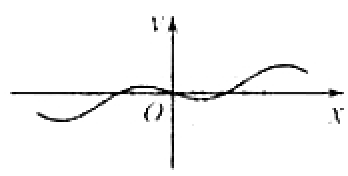
A. 20　B. -20　C. $40\sqrt{2}$　D. $-40\sqrt{2}$

5.函数 $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}\cdot\cos x$ 的图像的大致形状是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 已知实数 α， β，" $\alpha+\beta=2k\pi, k\in z$"是" $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$"的（　　）

A.充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件　　C.充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 故宫是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑群，故宫宫殿房檐设计恰好使北房在冬至前后阳光满屋，夏至前后屋檐遮荫，已知北京地区夏至前后正午太阳高度角为75^0C，冬至前后正午太阳高度角约为30^0C，图 1 是顶部近似为正四棱锥、底部近似为正四棱柱的宫殿，图 2 是其示意图，则其出檐 AB 的长度（单位：米）约为（　　）


图1

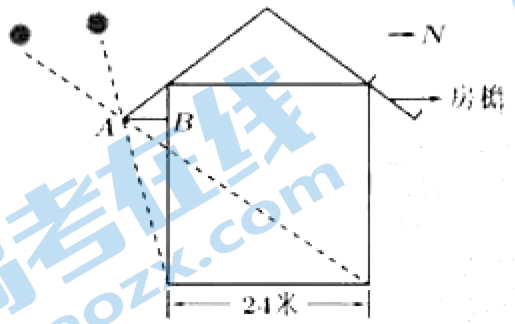


图2

A. 3　　B. 4　　C. $6(\sqrt{3}-1)$　　D. $3(\sqrt{3}+1)$

8. 已知点 P 在 $x+y=4$ 上，过点 P 做圆 O: $x^2+y^2=4$ 的两条切线，切点分别为 A,B．则点 M（3，2）到直线 AB 距离的最大值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的对 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})$，则（　　）

A. $f(x)$是周期为π的周期函数　　B. $f(x)$的值域是$[-1,1]$　　C. $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上单调递增

D. 将$f(x)$的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度后，可得一个奇函数的图像

10. 设F_1, F_2分别是双曲线 C: $\frac{x^2}{s+t}-\frac{y^2}{s-t}=1$ 的左、右焦点，且 $F_1F_2=8$，则下列结论正确的是（　　）

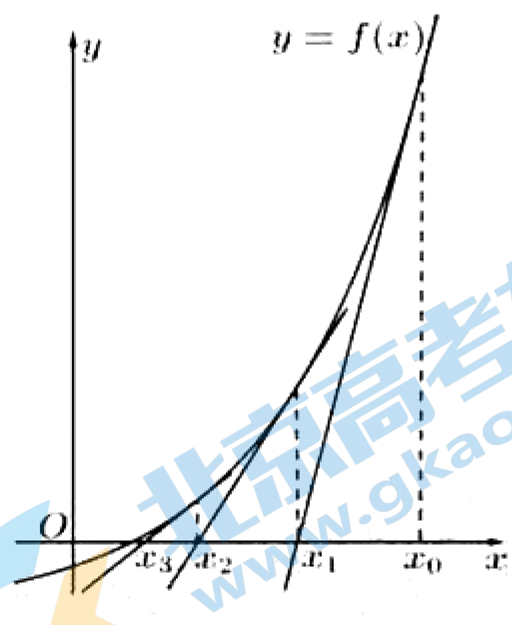
A. $s=8$　　B. t 的取值范围是（-8，8）

C. F_1 到渐近线的距离随着 t 的增大而减小　　D. 当$t=4$时，C 的实轴长是虚轴长的 3 倍

11. 已知两个不为零的实数 x,y 满足 x<y．则下列结论正确的是（　　）

A. $3^{|x-y|}>1$　　B. $xy<y^2$　　C. $x|x|<y|y|$　　D. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<e^x-e^y$

12. 英国数学家牛顿在 17 世纪给出了一种求方程近似根的方法—牛顿迭代法，做法如下：如图设 r 是 $f(x)=0$ 的根，选取 x_0 作为 r 的初始近似值，过点 $(x_0, f(x_0))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 $l: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，则 l 与 x 轴的交点的横坐标 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}(f'(x_0)\neq 0)$，称 x_1 是 r 的一次近似值；过点 $(x_1, f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，则该切线与 x 轴的交点的横坐标 x_2，称 x_2 是 r 的二次近似值；重复以上过程，得 r 的近似值序列，其中 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}(f'(x_n)\neq 0)$，称 x_{n+1} 是 r 的 n+1 近似值,这种求方程 $f(x)=0$ 近似解的方法称为牛顿迭代法.若使用该方法求方程 $x^2=2$ 的近似解，则（　　）



A. 若取初始近似值为 1，则该方程的二次近似值为 $\frac{17}{12}$

B. 若取初始近似值为 2，则该方程的二次近似值为 $\frac{17}{12}$

C. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

D. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}+\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

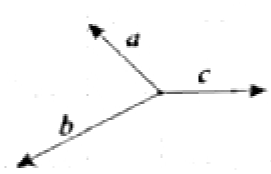
第二部分非选择题（共 90 分）

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

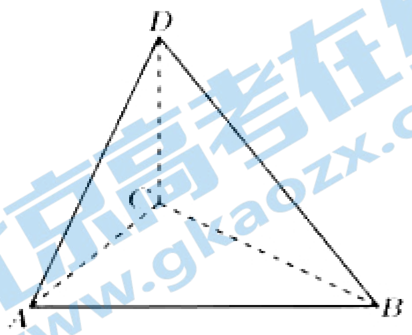
13. 函数 $f(x)=2x+\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积是________

14. 试写出一个离心率为 $\frac{1}{2}$，焦点在 y 轴上的椭圆的标准方程________．

15. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，若 $\vec{e}$ 为与 $\vec{c}$ 同方向的单位向量，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{e}=$________



16. 《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早一千多年，书中将四个面都为直角三角形的四面体称为鳖臑，在鳖臑 ABCD 的四个直角三角形中，BD 是 Rt▲BAD 和 Rt▲BCD 的斜边，且所有直角三角形斜边长分别为 $AD=\sqrt{5}, BC=\sqrt{13}, BD=\sqrt{14}$，它的所有顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的体积为________．



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （10 分）在① $a_4=2a_2$，② $b_3-b_2=4$，③ $T_3=6$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中正整数 k 存在，求 k 的值；若问题中的正整数 k 不存在，说明理由．

问题：已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，各项为正的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$T_1=2S_1=2, S_3=T_2$，且________，是否存在正整数 k 使 $T_5 \le 2S_k \le T_6$ 成立？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18. (12 分)在▲ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，$a=\sqrt{3}c\sin B+b\cos C$ 点 D 为 AB 边上的一点，$AD=2BD=2, CD=\sqrt{7}$．

（1）求 B；　（2）求▲ABC 的面积．

19. (12 分)某厂研制了一种生产高精产品的设备，为检验新设备生产产品的某项指标有无提高，用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品，得到各件产品该项指标数据如下：

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，样本方差分别记为 S_1^2 和 S_2^2．

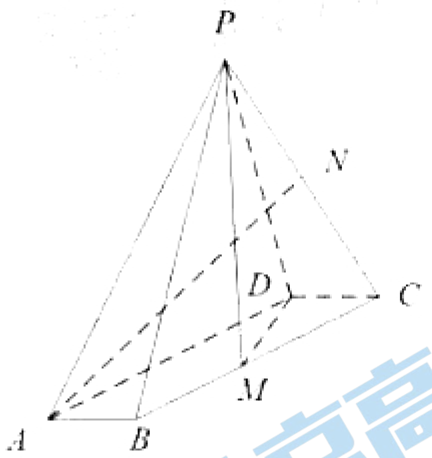
（1） 求 $\bar{x}$，$\bar{y}$，S_1^2，S_2^2；

（2） 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高（如果 $\bar{y}-\bar{x} \ge 2\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{10}}$ 则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高）．

20. (12 分) 如图，在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 是平行四边形，$\angle ABC=120^{0}, AB=1, BC=4, PA=\sqrt{15}$.M、N 分别是 BC,PC 的中点，$PD\perp DC, PM\perp MD$

（1）证明：$AB\perp PM$；

（2）求直线 AN 与平面 PDM 所成的角正弦值.



21. (12 分)已知函数 $f(x)=-\frac{4}{3}x^{3}+(a+1)x^{2}-ax$.

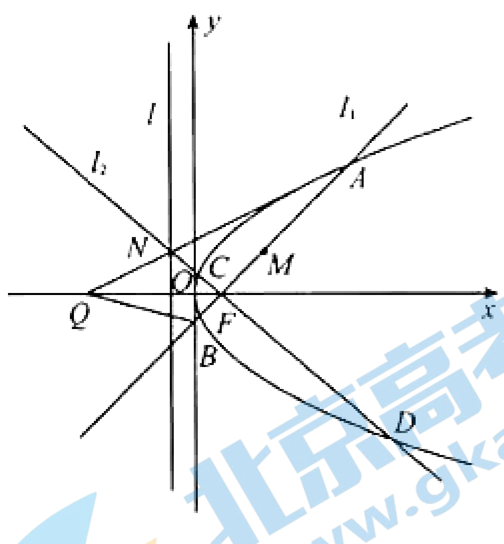
（1）若 $f(x)$在 $(2,+\infty)$ 上有极值，求 a 的取值范围；

（2）求证：当 $-1<a<2$ 时，过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图像相切.

22. (12 分)如图所示，过抛物线 $y^{2}=4x$ 的焦点 F 做互相垂直的直线 l_1, l_2，l_1 交抛物线与 A,B 两点（A 在 x 轴上方），l_2 交抛物线与 C,D 两点，交其准线于点 N.

（1）设 AB 的中点为 M，求证：MN 垂直于 y 轴；

（2）若直线 AN 与 x 轴交于 Q，求 $\triangle AQB$ 面积的最小值.



七校联合体2022届高三第一次联考试卷（8月）

数学科目参考答案

一、单项选择题

1.A　2.B　3. C　4.D　5. D　6.A　7.C　8. D

二、多项选择题

9.AD　10.ABC　11.AC　12.ABC

三、填空题

13. $\dfrac{\pi^2}{8}$　14. $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$（答案不唯一）　15. -3　16. $\dfrac{7\sqrt{14}\pi}{3}$

部分详解：

7.如图,根据题意得 $\angle ACB=15^\circ,\angle ACD=105^\circ,\angle ADC=30^\circ,CD=24$，

所以 $\angle CAD=45^\circ$，所以在 $\triangle ACD$，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ACD}$，即 $\dfrac{24}{\sin45^\circ}=\dfrac{AC}{\sin30^\circ}$，

解得 $AC=12\sqrt{2}$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\sin\angle ACB=\dfrac{AB}{AC}$，即 $\sin15^\circ=\dfrac{AB}{12\sqrt{2}}$，

解得 $AB=12\sqrt{2}\sin15^\circ=12\sqrt{2}\sin\left(60^\circ-45^\circ\right)=12\sqrt{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=12\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=6\sqrt{3}-6$．故选：C

8.设 $P(a,b)$，则 $a+b=4$，以OP为直径的圆的方程是 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)$，

与圆O的方程 $x^2+y^2=4$ 相减，得直线AB的方程为 $ax+by=4$，即 $ax+by-4=0$，

因为 $a+b=4$，所以 $b=4-a$，代入直线AB的方程，得 $ax+(4-a)y-4=0$，即 $a(x-y)+4y-4=0$，当 $x=y$

且 $4y-4=0$，即 $x=1$，$y=1$ 时该方程恒成立，所以直线AB过定点N(1，1)，点M到直线AB距离的最大值

即为点M，N之间的距离，$|MN|=\sqrt{5}$，所以点M(3，2)到直线AB距离的最大值为 $\sqrt{5}$.故选:D

12.构造函数 $f(x)=x^2-2$，则 $f'(x)=2x$，

取初始近似值 $x_0=1$，则 $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1-\dfrac{1-2}{2\times1}=\dfrac{3}{2}$，$x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\dfrac{17}{12}$，则A正确；

取初始近似值 $x_0=2$，则 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{4-2}{2\times2}=\frac{3}{2}$，$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12}$，则 B 正确；

根据题意，可知 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$，$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$，上述四式相加，

得 $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$，则 D 不正确，C 正确，故选：ABC.

四、解答题

17.**详解**： **方案一**：选① $a_4=2a_2$

$\because \{a_n\}$是等差数列，其前 n 项和为 S_n，设其公差为 d.

$\therefore a_1=S_1=1$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d$ $\because a_4=2a_2$ $\therefore 1+3d=2(1+d)$ $\therefore d=1$

$\therefore a_n=n$ $\therefore S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……………………………………………………4 分

$\because$ 等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，设其公比为 q

$\because T_1=2S_1=2$，$S_3=T_2$，$\therefore b_1=T_1=2, T_2=b_1+b_2=S_3=6$ $\therefore b_2=4$

$\therefore q=\frac{b_2}{b_1}=2$ $\therefore b_n=b_1q^{n-1}=2^n$，$T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^{n+1}-2$ ……………………………8 分

$T_5\le 2S_k\le T_6$ $\therefore 62\le k(k+1)\le 126$ $\therefore k=8,9,10$

所以存在正整数 k 使 $T_5\le 2S_k\le T_6$，$k=8,9,10$ ……………………………10 分

方案二：选② $b_3-b_2=4$

$\because$ 各项为正的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，设其公比为 $q, b_n>0, q>0$.

$\because T_1=2S_1=2$ $\therefore b_1=T_1=2$ $\therefore b_n=b_1q^{n-1}=2q^{n-1}$，$\because b_3-b_2=4$ $\therefore 2q^2-2q=4$ $\therefore q=2,\ q=-1$（舍去负的）

$\therefore b_n=2^n$ $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=2^{n+1}-2$ ……………………………………………4 分

$\because \{a_n\}$是等差数列，前 n 项和为 S_n，设其公差为 d $\therefore a_1=S_1=1$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d$

$\because S_3=T_2$ $\therefore S_3=a_1+a_2+a_3=3+3d=b_1+b_2=6$ $\therefore d=1$ $\therefore a_n=n$ $\therefore S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$ ……………8 分

$T_5\le 2S_k\le T_6$ $\therefore 62\le k(k+1)\le 126$ $\therefore k=8,9,10$

所以存在整数 k 使 $T_5\le 2S_k\le T_6$，$k=8,9,10$ ……………………10 分

方案三：选③ $T_3=6$

$\because$ 各项为正的等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，设其公比为 $q, b_n>0, q>0$.

$\because T_1=2S_1=2$ $\therefore b_1=T_1=2$ $\therefore b_n=b_1q^{n-1}=2q^{n-1}$

$\because T_3=b_1+b_2+b_3=6$ $\therefore 2+2q+2q^2=6$ $\therefore q=1,\ q=-2$（舍去负的）

$\therefore b_n=2$，$T_n=nb_1=2n$ ……………………………………4 分

$\because \{a_n\}$是等差数列，前n项和为S_n，设其公差为d $\therefore a_1=S_1=1$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d$

$\because S_3=T_2 \therefore S_3=a_1+a_2+a_3=3+3d=b_1+b_2=4 \therefore d=\frac{1}{3}$ $\therefore a_n=\frac{1}{3}(n+2) \therefore S_n=\frac{1}{6}n(n+5)$ ……8分

$T_5 \le 2S_k \le T_6 \Leftrightarrow 10 \le \frac{1}{3}k(k+5) \le 12 \Leftrightarrow 30 \le k(k+5) \le 36,$

$\because f(k)=k(k+5), k \in N^*$是单调递增的，且$\because f(3)=24, f(4)=36 \therefore k=4$

所以存在唯一的正整数$k=4$使$T_5 \le 2S_k \le T_6$ ……………………………10分

18. 详解：

（1）已知$a=\sqrt{3}c\sin B+b\cos C$，用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得：……………2分

$\sin A=\sqrt{3}\sin C\sin B+\sin B\cos C$……………………………3分

$\because \sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)$……………………………4分

$=\sin B\cos C+\cos B\sin C$……………………………5分

$\therefore \sqrt{3}\sin B\sin C=\cos B\sin C$

$\because \Delta ABC$中，$A,B,C\in(0,\pi), \sin C\neq 0 \therefore \sqrt{3}\sin B=\cos B$

$\therefore \tan B=\frac{\sqrt{3}}{3} \therefore B=\frac{\pi}{6}$……………………………6分

（2）在ΔBCD中用余弦定理得 $CD^2=BC^2+BD^2+2BC\cdot BD\cdot\cos B$ ……………8分

$\because AD=2BD=2, CD=\sqrt{7},$

$\therefore 7=BC^2+1-2BC\cdot\cos\frac{\pi}{6}$……………………………9分

$\therefore BC^2-\sqrt{3}BC-6=0 \because BC>0 \therefore BC=2\sqrt{3}$……………………………10分

又$AB=AD+DB=3$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AB\cdot\sin B$……………………………11分

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$……………………………12分

19. 详解：

（1）$\bar{x}=\frac{9.8+10.3+10+10.2+9.9+9.8+10+10.1+10.2+9.7}{10}=10$ ……………2分

$\bar{y}=\frac{10.1+10.4+10.1+10+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5}{10}=10.3$ ……………4分

$S_1^2=\frac{0.2^2+0.3^2+0+0.2^2+0.1^2+0.2^2+0+0.1^2+0.2^2+0.3^2}{10}=0.036$ ……………6分

$S_2^2=\frac{0.2^2+0.1^2+0.2^2+0.3^2+0.2^2+0+0.3^2+0.2^2+0.1^2+0.2^2}{10}=0.04$ ……………8分

(2) 依题意，$\bar{y}-\bar{x}=0.3=2\times 0.15=2\sqrt{0.15^2}=2\sqrt{0.025}$，$2\sqrt{\dfrac{0.036+0.04}{10}}=2\sqrt{0.0076}$，

$\bar{y}-\bar{x}\ge 2\sqrt{\dfrac{s_1^2+s_2^2}{10}}$ …………11 分

所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高…………12 分

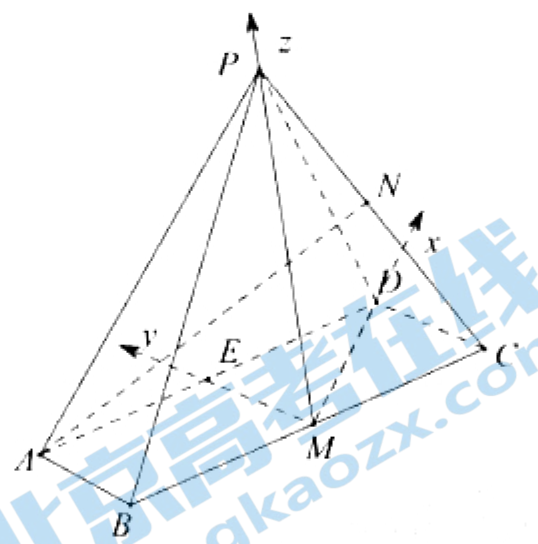
20.详解：

(1) 在 $\triangle DCM$ 中，$DC=1$，$CM=2$，$\angle DCM=60^\circ$，由余弦定理可得 $DM=\sqrt{3}$，………2 分

$\therefore DM^2+DC^2=CM^2$，$\therefore DM\perp DC$，由题意 $DC\perp PD$ 且 $PD\cap DM=D$，$\therefore DC\perp$ 平面 PDM ……4 分

而 $PM\subset$ 平面 PDM，所以 $DC\perp PM$，又 $AB//DC$，所以 $AB\perp PM$，………5 分

(2) 由 $PM\perp MD$，$AB\perp PM$，而 AB 与 DM 相交，所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$，因为 $AM=\sqrt{7}$，所以 $PM=2\sqrt{2}$，取 AD 中点 E，连接 ME，则 ME,DM,PM 两两垂直，以点 M 为坐标原点，如图所示，建立空间直角坐标系，………………………………7 分



则 $A(-\sqrt{3},2,0),P(0,0,2\sqrt{2}),D(\sqrt{3},0,0),M(0,0,0),C(\sqrt{3},-1,0)$

又 N 为 PC 中点，所以

$N\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{2}\right),\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{5}{2},\sqrt{2}\right)$ ………9 分

由 (1) 得 $CD\perp$ 平面 PDM，所以平面 PDM 的一个法向量

$\vec{n}=(0,1,0)$ …………10 分

从而直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AN}||\vec{n}|}=\dfrac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{6}$ ………12 分

21. 详解：(1) 由题意得：$f'(x)=-4x^2+2(a+1)x-a=-(2x-1)(2x-a)$，

由 $f'(x)=0$ 得：$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=\dfrac{a}{2}$，$\because f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上有极值，$\therefore \dfrac{a}{2}>2$，解得：$a>4$，

$\therefore a$ 的取值范围为 $(4,+\infty)$……………………………………4 分

(2) 设过点 $P(0,-1)$ 的直线与 $f(x)$ 的图象切于点 $\left(t,-\dfrac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at\right)$，

则切线斜率 $k=f'(t)=-4t^2+2(a+1)t-a=\dfrac{-\frac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at+1}{t-0}$，整理可得：$\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1=0$，

若过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切，则关于 t 的方程 $\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1=0$ 有且仅有1个实根，

设 $g(t)=\frac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1$，则 $g'(t)=8t^2-2(a+1)t$，由 $g'(t)=0$ 得：$t_1=0$，$t_2=\frac{a+1}{4}>0$，

$\therefore$ 当 $t\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a+1}{4},+\infty\right)$ 时，$g'(t)>0$；当 $t\in\left(0,\frac{a+1}{4}\right)$ 时，$g'(t)<0$；

$\therefore g(t)$ 在 $(-\infty,0)$，$\left(\frac{a+1}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{a+1}{4}\right)$ 上单调递减，

$\because g(0)=1$，$g\left(\frac{a+1}{4}\right)=\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{a+1}{4}\right)^3-\frac{(a+1)^3}{16}+1=-\frac{1}{48}(a+1)^3+1$，

$\because -1<a<2$，$\therefore 0<a+1<3$，$\therefore -\frac{1}{48}(a+1)^3+1>0$，即 $g\left(\frac{a+1}{4}\right)>0$，

$\therefore$ 当 $t>0$ 时，$g(t)>0$，$g(-1)=-\frac{8}{3}-(a+1)=-\frac{8}{3}-a<-\frac{5}{3}<0$，又 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

$\therefore g(t)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 上有唯一的实数根 $t_0\in(-1,0)$，

即当 $-1<a<2$ 时，过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切．……………12 分

22．详解：(I) 证明：设 $l_{AB}:x=my+1(m\neq0)$，代入 $y^2=4x$，

消 x 得 $y^2-4my-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，有 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，所以 M 的纵坐标 $y_M=2m$，

$l_{CD}:x=-\frac{1}{m}y+1$，解得 $N(-1,2m)$，所以 $y_M=y_N$，所以 MN 垂直于 y 轴．……………………4 分

(II) 解：可得 $l_{AN}:x+1=\frac{x_1+1}{y_1-2m}(y-2m)$，令 $y=0$，得 $x_Q=\frac{-2m(x_1+1)}{y_1-2m}-1=\frac{-2mx_1-y_1}{y_1-2m}$．

由 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，得 $m=\frac{y_1}{4}-\frac{1}{y_1}$，又 $x_1=\frac{1}{4}y_1^2$，

所以 $x_Q=\dfrac{-2mx_1-y_1}{y_1-2m}=\dfrac{-\frac{1}{4}y_1^2\left(\frac{y_1}{2}-\frac{2}{y_1}\right)-y_1}{y_1-\left(\frac{y_1}{2}-\frac{2}{y_1}\right)}=\dfrac{-\frac{1}{8}y_1^3-\frac{1}{2}y_1}{\frac{y_1}{2}+\frac{2}{y_1}}=\dfrac{-\frac{1}{4}y_1^2\left(\frac{1}{2}y_1+\frac{2}{y_1}\right)}{\frac{y_1}{2}+\frac{2}{y_1}}=-x_1$．

所以 $S_{\triangle AQB}=\frac{1}{2}|QF||y_1-y_2|=\frac{1}{2}(x_1+1)|y_1-y_2|$

$=\frac{1}{2}(x_1+1)\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2(x_1+1)\sqrt{m^2+1}$

$=2\left(\frac{1}{4}y_1^2+1\right)\left(\frac{y_1}{4}+\frac{1}{y_1}\right)=\frac{1}{8}\left(y_1^3+8y_1+\frac{16}{y_1}\right)$……………………………………10 分

记 $t=y_1^3+8y_1+\frac{16}{y_1}$，则 $t'=3y_1^2+8-\frac{16}{y_1^2}=\frac{3y_1^4+8y_1^2-16}{y_1^2}=\frac{(3y_1^2-4)(y_1^2+4)}{y_1^2}>0$，

解得 $y_1^2>\frac{4}{3}$，即 $y_1>\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $t=y_1^3+8y_1+\frac{16}{y_1}$ 在 $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上递增，

所以 $(S_{\triangle AQB})_{\min}=S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9}$.……………………………………12 分