2024届高三一轮复习联考(四)　全国卷

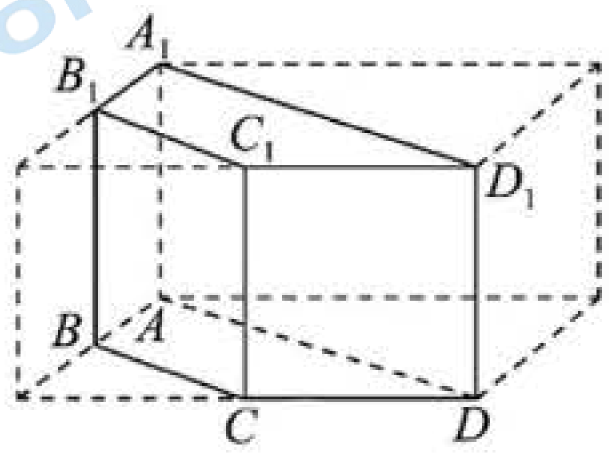
文科数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$z=\frac{i}{2+i}=\frac{i(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$.故选 A.

2.B 【解析】因为 M:$\frac{1}{6}$的所有奇数倍构成的集合,N:$\frac{1}{6}$的所有整数倍构成的集合.故选 B.

3.A 【解析】因为 $e^2+k^2=\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=3,a^2+b^2=c^2$,所以 $a^2=b^2$,所以渐近线方程为 $x\pm y=0$.故选 A.

4.C 【解析】该几何体为如图所示的四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,其高为 1,底面为等腰梯形 $ABCD$,该等腰梯形的上底为$\sqrt{2}$,下底为 $2\sqrt{2}$,腰长为 1,故梯形的高为$\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故该几何体表面积 $S=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2+1+1+\sqrt{2}\times 1+2\sqrt{2}\times 1=3\sqrt{2}+5$.故选 C.



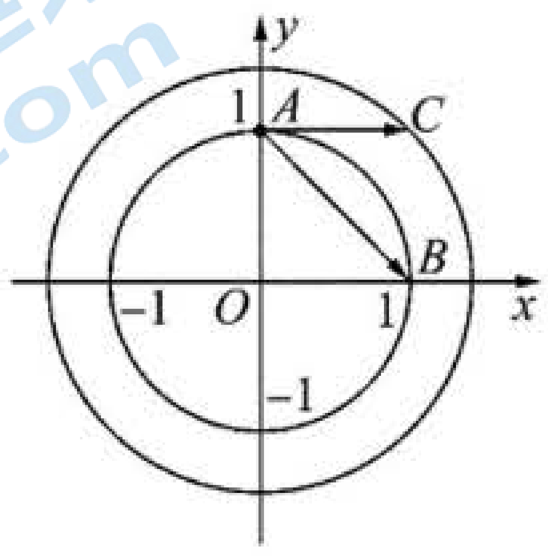
5.D 【解析】因为$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2,(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=5$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.故选 D.

6.C 【解析】因为 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\alpha-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha}=2-\sqrt{3}$,所以 $\tan\alpha=1$,故 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\alpha}=-2-\sqrt{3}$.故选 C.

7.A 【解析】函数 $y=\cos x$ 的图象上所有点横坐标变为原来的 2 倍,纵坐标不变,得到 $y=\cos\frac{1}{2}x$,再将所得图象向左平移 1 个单位长度,得到 $f(x)=\cos\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$.故选 A.

8.A 【解析】$a^6=8<b^6=9$,所以 $a<b$,$\ln b=\frac{\ln 3}{3}$,$\ln c=\frac{1}{e}=\frac{\ln e}{e}$.设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,令 $f'(x)>0$,得 $x\in(0,e)$;令 $f'(x)<0$,得 $x\in(e,+\infty)$,所以$f(x)$在$(0,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减,所以 $b<c$,所以$a<b<c$.故选 A.

9.D 【解析】不妨设 $C(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$,$0\leqslant\theta<2\pi$.因为 $A(0,1)$,$B(1,0)$,则$\overrightarrow{AB}=(1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta-1)$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta+1=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+1\leqslant 3$.故选 D.



10.B 【解析】解法一:设正三棱柱底面边长为 a,高为 h,则$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=1$,即$\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}=1$,三棱柱的侧面积 $S=3ah$,所以 $S^2=9a^2h^2=27(1-\frac{h^2}{4})h^2=\frac{27}{4}(-h^4+4h^2)=-\frac{27}{4}(h^2-2)^2+27\leqslant 27$,当 $h=\sqrt{2}$时等号成立,三棱

柱的侧面积 $S=3ah$ 最大值为 $3\sqrt{3}$.故选 B.

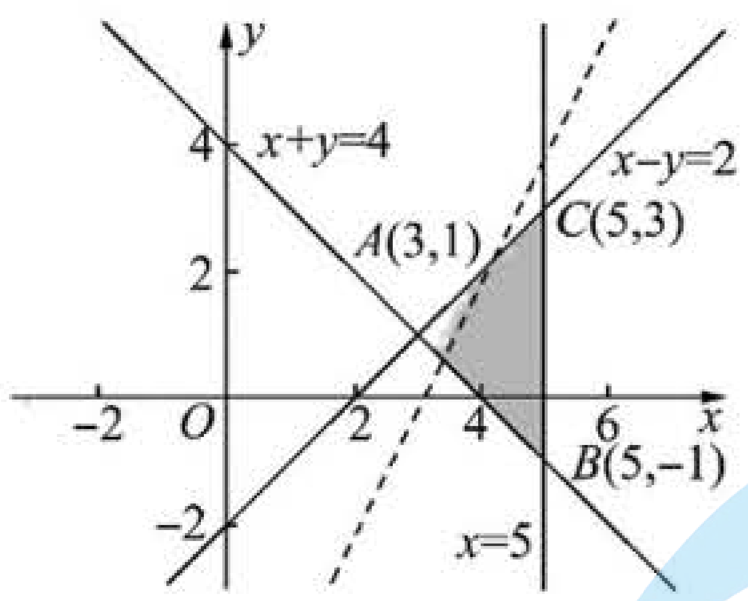
解法二:设正三棱柱底面边长为 a,高为 h,则 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=1$,因为 $\frac{a^2}{3}+\frac{h^2}{4}=1\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{3}\cdot\frac{h^2}{4}}=\frac{ah}{\sqrt{3}}$,所以 $ah\leqslant\sqrt{3}$,当且仅当 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$h=\sqrt{2}$ 时等号成立,三棱柱的侧面积 $S=3ah$ 最大值为 $3\sqrt{3}$,故选 B.

11.B 【解析】因为 $B(1,0)$ 为椭圆的右焦点,设椭圆左焦点为 F,则 $F(-1,0)$,由椭圆的定义得,$|PA|+|PB|=|PA|+2a-|PF|=4+|PA|-|PF|$,所以 P 为射线 FA 与椭圆交点时,$|PA|+|PB|$ 取最小值,此时 $|PA|+|PB|=4-|AF|=4-\sqrt{2}$.故选 B.

12.B 【解析】因为函数 $f(x)=m(x-1)e^x-x^2+x$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上有两个极值点,所以 $y=f'(x)$ 在 $x\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ 上有两个变号零点,$\because f'(x)=mxe^x-2x+1$,$\therefore mxe^x-2x+1=0$,$\therefore m=\frac{2x-1}{xe^x}$.令 $h(x)=\frac{2x-1}{xe^x}\left(x\in\left(\frac{1}{2},2\right)\right)$,$\therefore h'(x)=\frac{-(x-1)(2x+1)}{x^2e^x}$,令 $h'(x)>0$,得 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,令 $h'(x)<0$,得 $x\in(1,2)$,$\therefore h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上递增,在 $(1,2)$ 上递减.$\because h\left(\frac{1}{2}\right)=0$,$h(1)=\frac{1}{e}$,$h(2)=\frac{3}{2e^2}$,$\therefore m\in\left(\frac{3}{2e^2},\frac{1}{e}\right)$.故选 B.

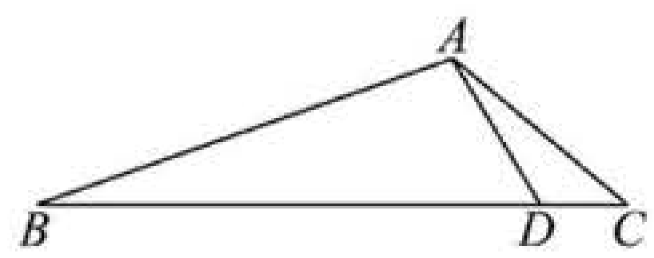
13.$\frac{12}{7}$ 【解析】由题知公比 $q\neq 1$,$S_3=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=3$①,$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=27$②,$\frac{②}{①}$得 $\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=9$,$\therefore q=2$,代入①得 $a_1=\frac{3}{7}$,所以 $a_3=\frac{3}{7}\cdot 2^{3-1}=\frac{12}{7}$.故答案为 $\frac{12}{7}$.

14.-5 【解析】由实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 4,\\x-y\geqslant 2,\\x\leqslant 5,\end{cases}$ 可得如图可行域,点 $A(3,1)$,$B(5,-1)$,$C(5,3)$,由图可得目标函数 $z=-2x+y$ 过可行域内的点 $A(3,1)$ 时取最大值,最大值为 -5.故答案为 -5.



15.$\frac{9}{2}$ 【解析】$2ab=2a+b$,$\therefore 2=\frac{2a+b}{ab}$,$\therefore \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=2$,$a+2b=\frac{1}{2}(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(1+4+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\right)\geqslant\frac{9}{2}$,当且仅当 $a=b=\frac{3}{2}$ 时等号成立.故答案为 $\frac{9}{2}$.

16.$\frac{7}{2}\sqrt{3}$ 【解析】由题意得 $\angle ACB=\angle DCA$,$\angle BAC=\angle ADC$,所以 $\triangle CAB\backsim\triangle CDA$,所以 $\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CA}$,所以 $CA=\sqrt{7}$.在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理得 $AC^2=AD^2+1^2-2\times 1\times AD\cdot\cos\frac{2}{3}\pi=7$,则 $AD^2+AD-6=0$,所以 $AD=2$,或 $AD=-3$(舍),所以 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}\times 7\times 2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{7}{2}\sqrt{3}$.故答案为 $\frac{7}{2}\sqrt{3}$.



17.解:(1)令 $m=1$ 得,$S_{n+1}=S_1+S_n+2n$,

因此 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2n+3$, …………………………………………………… 2 分

故 $a_n=2n+1$.

经检验，$n=1$ 时满足上式. ………………………………………… 4 分

当 m 为不等于 1 的正整数时，$a_n=2n+1$ 满足题设.

所以 $a_n=2n+1$. ………………………………………… 6 分

(2)由题意得 $b_n=\begin{cases}2n, n\text{ 为奇数},\\ n+\dfrac{1}{2}, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ ………………………………………… 8 分

$T_{20}=(2+6+10+\cdots+38)+\left(2+\dfrac{1}{2}+4+\dfrac{1}{2}+6+\dfrac{1}{2}+\cdots+20+\dfrac{1}{2}\right)=200+115=315$. ………… 12 分

18.**解**:(1)由题意，根据正弦定理得 $(2a+b)a+(2b+a)b=2c^2$，………………………………………… 1 分

即 $a^2+b^2-c^2=-ab$，………………………………………… 3 分

由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，………………………………………… 5 分

所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2)由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得 $\dfrac{a}{\sin A}\cdot\dfrac{b}{\sin B}=\left(\dfrac{c}{\sin C}\right)^2$，………………………………………… 8 分

即 $\sin A\sin B=\dfrac{ab(\sin C)^2}{c^2}$，………………………………………… 9 分

因为 $\sin A\sin B=2ab$，所以 $c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………………… 12 分

19.(1)**证明**:∵平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，

$\angle PBA=90^\circ$，$PB\subset$ 平面 PAB，

∴$PB\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………………………… 3 分

又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，∴$PB\perp AD$. ………………………………………… 4 分

(2)**解**:过点 D 作 BC 的平行线 DE，交 AB 于点 E，连接 PE.

由 $\angle ABC=90^\circ$，得 $AB\perp BC$，

由(1)的证明易知，$BC\perp$ 平面 PAB. ………………………………………… 6 分

又 $PE\subset$ 平面 PAB，∴$BC\perp PE$.

又 $DE/\!/BC$，

∴$DE\perp PE$. ………………………………………… 8 分

∵直线 PD 与 BC 所成角为 60°，$DE/\!/BC$，∴$\angle PDE=60^\circ$.

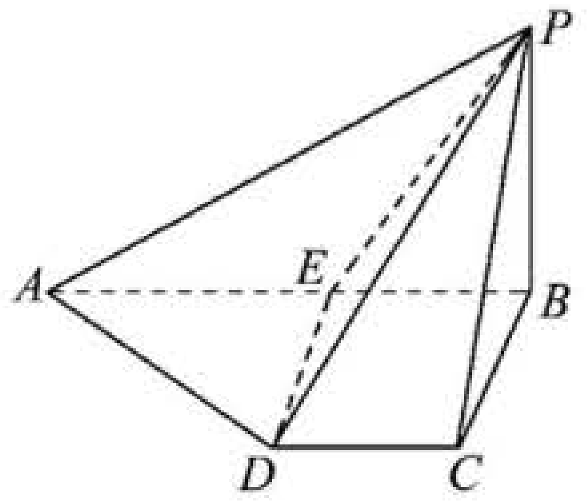
由 $AB=2CD=2$，$BE=CD=1$，$PB=1$，

得 $PE=\sqrt{2}$，$DE=BC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，………………………………………… 10 分

∴梯形 $ABCD$ 面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

又 $PB\perp$ 平面 $ABCD$，$PB=1$，

∴四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times1=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………… 12 分



20.(1)**解**:由题意得 l 的方程为 $x=2$,又 $|AB|=4\sqrt{2}$,不妨设 $A(2,2\sqrt{2})$,代入抛物线 C,解得 $p=2$. ……… 2 分

(2)**证明**:圆心 $Q(1,0)$.

①当直线 MQ,NQ 中有一条直线斜率不存在时,

不妨设直线 MQ 的斜率不存在,则 $M(1,-2)$,可得 $N(0,0)$,此时直线 NQ 的斜率为 0,

$l_{MQ}:x=1$,$l_{NQ}:y=0$,

所以 $|SQ|=|TQ|=2$. ……………………………………………………………………… 4 分

②当直线 MQ,NQ 的斜率均存在时,

设 $l_{MN}:y=k(x+1)+2$,显然 $k\neq0$.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=k(x+1)+2,\end{cases}$ 得 $\dfrac{k}{4}y^2-y+k+2=0$.

当 $\Delta>0$ 时,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则有 $y_1+y_2=\dfrac{4}{k}$,$y_1y_2=\dfrac{4(k+2)}{k}$. ………………………………………………………… 6 分

记直线 MQ 的斜率为 k_1,直线 NQ 的斜率为 k_2,则 $k_1=\dfrac{y_1}{x_1-1}$,$k_2=\dfrac{y_2}{x_2-1}$, ……………………………… 7 分

又 M,N 在抛物线上,所以

$$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{y_1y_2}{\frac{y_1^2y_2^2}{16}-\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right)+1}=\frac{16y_1y_2}{y_1^2y_2^2-4(y_1+y_2)^2+8y_1y_2+16}$$

$$=\frac{\frac{64(k+2)}{k}}{\frac{16(k+2)^2}{k^2}-\frac{64}{k^2}+\frac{32(k+2)}{k}+16}=\frac{4k(k+2)}{4k^2+8k}=1.$$ ……………………………………………… 9 分

记 P 到直线 MQ 的距离为 d_1,到直线 NQ 的距离为 d_2,

则 $d_1=\dfrac{2|k_1+1|}{\sqrt{1+k_1^2}}$,同理 $d_2=\dfrac{2|k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}$,

所以 $d_2=\dfrac{2|k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}=\dfrac{2\left|\frac{1}{k_1}+1\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{k_1^2}}}=\dfrac{2|1+k_1|}{\sqrt{1+k_1^2}}=d_1$,

即 $|SQ|=|TQ|$. ……………………………………………………………………………… 11 分

综上,原命题得证. ……………………………………………………………………………… 12 分

21.(1)**解**:$f'(x)=-e^{-x}-ae^{x}\leqslant0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立,即 $a\geqslant-e^{-2x}$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

因为 $-e^{-2x}<0$,则 $a\geqslant0$. ……………………………………………………………… 2 分

(2)**证明**:$g(x)=\ln x+m\left(\dfrac{1}{x}-x\right)\leqslant\ln x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-x\right)$,只需证明 $\ln x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-x\right)<0$. ………………… 3 分

令 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}-x\right)(x>1)$,$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-x^2+2x-1}{2x^2}=\dfrac{-(x-1)^2}{2x^2}<0$, …………… 4 分

则 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减,又 $h(1)=0$,则 $h(x)<0$ 成立,得证. ……………………………… 6 分

(3)**证明**:法一:由(2)知 $\ln x<\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)(x>1)$,令 $x=\dfrac{n+1}{n}$,则有 $\ln(n+1)-\ln n<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)$,………

……………………………………………………………………………………………… 8 分

$\ln(n+2)-\ln(n+1)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)$,…,$\ln(5n)-\ln(5n-1)<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5n-1}+\dfrac{1}{5n}\right)$, …………… 10 分

累加可得，$\ln 5<\frac{1}{2n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{5n-1}+\frac{1}{10n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{5n-1}+\frac{1}{5n}$. ………… 12 分

法二：$\ln 5=\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{5n}{5n-1}$，………… 8 分

由 $\ln x<x-1(x>1)$，则 $\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，………… 10 分

则 $\ln\frac{n+1}{n}+\ln\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\ln\frac{5n}{5n-1}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{5n-1}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{5n-1}+\frac{1}{5n}$. ………… 12 分

22.**解**：(1) $C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=1$，$C_2:x^2+y^2=1$. ………… 4 分

(2)当 $|AB|$ 最小时，A，B 在两圆圆心的连线上，此时 $|AB|$ 值为两圆圆心距减去两圆半径，即 $|AB|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}-1-1=3$. ………… 6 分

此时直线 AB 的直角坐标方程为 $y=\frac{4}{3}x$，点 P 的直角坐标为 $(2,2)$，

点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|4\times 2-3\times 2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}$，………… 8 分

所以$\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$. ………… 10 分

23.**解**：(1)当 $a=2$ 时 $f(x)=|x-2|+|x+2|=\begin{cases}-2x, x\leqslant -2,\\ 4, -2<x\leqslant 2,\\ 2x, x>2.\end{cases}$ ………… 3 分

由不等式 $f(x)\leqslant 10$，结合函数图象，解得 $-5\leqslant x\leqslant 5$.

即不等式 $f(x)\leqslant 10$ 的解集为 $[-5,5]$. ………… 5 分

(2)由题意 $f(x)>a+1$，即 $|x-a|+|x+a|>a+1$ 恒成立，

因为 $|x-a|+|x+a|=|a-x|+|x+a|\geqslant|2a|$，故 $|2a|>a+1$，………… 6 分

所以 $\begin{cases}2a>a+1,\\ a\geqslant 0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2a>a+1,\\ a<0,\end{cases}$ ………… 8 分

解得 $a>1$ 或 $a<-\frac{1}{3}$. ………… 9 分

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$. ………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！