海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案及评分标准

数　学（理科）

2018.5

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	C	D	B	A	C	C	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

（9）1　　（10）10

（11）1；$2\sqrt{3}$　　（12）$\frac{\sqrt{7}}{3}$

（13）答案不唯一，$a<0$ 或 $a>4$ 的任意实数　　（14）$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

注：第 11 题第一空 3 分，第二空 2 分。

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（15）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）$A=2$，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$．……………………………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．

因为 $f(\alpha)=1$，所以 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$．

因为 $\alpha\in(\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3})$，所以 $2\alpha-\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$．

所以 $2\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$，

所以 $2\alpha=\frac{7}{6}\pi$，

所以 $\cos 2\alpha=\cos\frac{7}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$．……………………………………13 分

16. （本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）这 10 名学生的考核成绩（单位：分）分别为：

93，89.5，89，88，90，88.5，91.5，91，90.5，91．

其中大于等于 90 分的有 1 号、5 号、7 号、8 号、9 号、10 号，共 6 人.

所以样本中学生考核成绩大于等于 90 分的频率为：

$$\frac{6}{10}=0.6，$$

从该校高二年级随机选取一名学生，估计这名学生考核成绩大于等于 90 分的概率为 0.6.

……………………………………4 分

（Ⅱ）设事件 A ：从上述考核成绩大于等于 90 分的学生中再随机抽取两名同学，这两名同学两轮测试成绩均大于等于 90 分.

由（Ⅰ）知，上述考核成绩大于等于 90 分的学生共 6 人，其中两轮测试成绩均大于等于 90 分的学生有 1 号，8 号，10 号，共 3 人.

所以，$P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$．……………………………………………… 9 分

（Ⅲ）$\overline{x_1}=\overline{x_2}$，$s_1^2>s_2^2$．……………………………………………………… 13 分

17. （本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB_1\perp$平面 ABC ，$AC\subset$平面 ABC ，

所以 $AB_1\perp AC$ ．

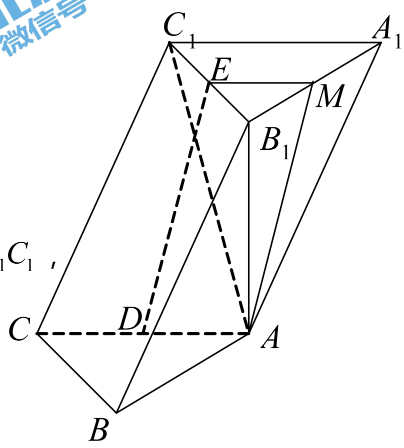
因为 $AC_1\perp AC$ ，$AB_1\cap AC_1=A$ ，AB_1 ，$AC_1\subset$平面 AB_1C_1 ，

所以 $AC\perp$平面 AB_1C_1 ．

因为 $B_1C_1\subset$平面 AB_1C_1 ，

所以 $AC\perp B_1C_1$ ．………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）取 A_1B_1 的中点 M ，连接 MA、 ME ．



因为 E、 M 分别是 B_1C_1、 A_1B_1 的中点，

所以 $ME\parallel A_1C_1$ ，且 $ME=\frac{1}{2}A_1C_1$ ．

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AD\ //\ A_1C_1$ ，且 $AD=\frac{1}{2}A_1C_1$ ，

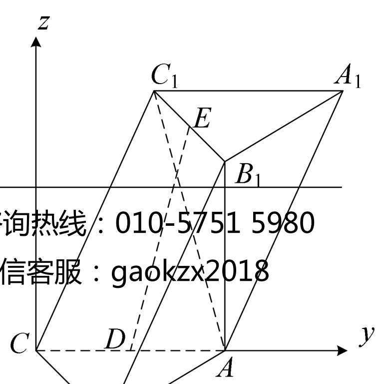
所以 $ME\parallel AD$，且 $ME=AD$，

所以四边形 $ADEM$ 是平行四边形，

所以 $DE\parallel AM$.

又 $AM\subset$平面 AA_1B_1B ，$DE\not\subset$平面 AA_1B_1B ，

所以 $DE//$平面 AA_1BB ．…………………………9 分



（Ⅲ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC // B_1C_1$，

因为 $AC \perp B_1C_1$，所以 $AC \perp BC$．

在平面 ACB_1 内，过点 C 作 $Cz // AB_1$，

因为，$AB_1 \perp$ 平面 ABC，

所以，$Cz \perp$ 平面 ABC．

建立空间直角坐标系 C-xyz，如图．则

$C(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$B_1(0,2,2)$，$C_1(-2,2,2)$，$D(0,1,0)$，$E(-1,2,2)$．

$\overrightarrow{DE}=(-1,1,2)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2)$．

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}，即\begin{cases}2x=0\\ 2y+2z=0\end{cases}，$$

得 $x=0$，令 $y=1$，得 $z=-1$，故 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$．

设直线 DE 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{DE},\boldsymbol{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以直线 DE 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．……………………14 分

18.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，$a=2$，$b=1$，

所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$，

故椭圆 C 的焦距为 $2c=2\sqrt{3}$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．……………………5 分

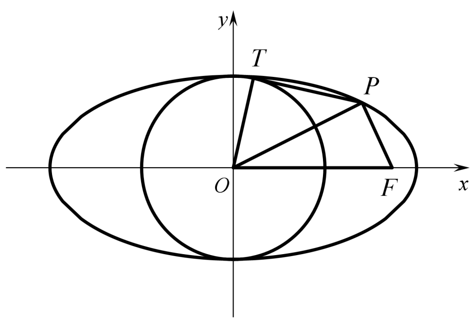
（Ⅱ）法一：设 $P(x_0,y_0)$（$x_0>0$，$y_0>0$），

则 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，故 $y_0^2=1-\dfrac{x_0^2}{4}$．

所以 $|TP|^2=|OP|^2-|OT|^2=x_0^2+y_0^2-1=\dfrac{3}{4}x_0^2$，

所以 $|TP|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0$，

$S_{\Delta OTP}=\dfrac{1}{2}|OT|\cdot|TP|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x_0$．



又 $O(0,0)$，$F(\sqrt{3},0)$，故 $S_{\Delta OFP}=\frac{1}{2}|OF|\cdot y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}y_0$.

因此 $S_{四边形OFPT}=S_{\Delta OFP}+S_{\Delta OTP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{x_0}{2}+y_0)$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{x_0^2}{4}+x_0y_0+y_0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\ .$$

由 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，得 $2\sqrt{\frac{x_0^2}{4}\cdot y_0^2}\le 1$，即 $x_0\cdot y_0\le 1$，

所以 $S_{四边形OFPT}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1+x_0y_0}\le\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当且仅当 $\frac{x_0^2}{4}=y_0^2=\frac{1}{2}$，即 $x_0=\sqrt{2}$，$y_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.……………… 14 分

19. （本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=a\cdot e^{ax}-a=a\cdot(e^{ax}-1)\ (a\ne 0,x\in\mathbf{R})$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$.

①当 $a>0$ 时，$f'(x)$ 与 $e^{ax}-1$ 符号相同，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

②当 $a<0$ 时，$f'(x)$ 与 $e^{ax}-1$ 符号相反，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

综上，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)=-2$.……………………………… 7 分

（Ⅱ）$g'(x)=e^{ax}-ax-3=f(x)\ (a>0,x\in\mathbf{R})$，

故 $g'(x)=-1\Leftrightarrow f(x)=-1$.

注意到 $f(0)=-2<-1$，$f(\frac{2}{a})=e^2-5>-1$，$f(-\frac{2}{a})=e^{-2}-1>-1$，

所以，$\exists x_1\in(-\frac{2}{a},0)$，$x_2\in(0,\frac{2}{a})$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=-1$.

因此，曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_1(x_1,f(x_1))$，$P_2(x_2,f(x_2))$ 处的切线斜率均为 -1.

下面，只需证明曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_1(x_1,f(x_1))$ ， $P_2(x_2,f(x_2))$ 处的切线不重合.

曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$ （ $i=1,2$ ）处的切线方程为 $y-g(x_i)=-(x-x_i)$ ，即 $y=-x+g(x_i)+x_i$ ．假设曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$ （ $i=1,2$ ）处的切线重合，则 $g(x_2)+x_2=g(x_1)+x_1$ ．

令 $G(x)=g(x)+x$ ，则 $G(x_1)=G(x_2)$ ，且 $G'(x)=g'(x)+1=f(x)+1$.

由（Ⅰ）知，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时， $f(x)<-1$ ，故 $G'(x)<0$ ．

所以， $G(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上单调递减，于是有 $G(x_1)>G(x_2)$ ，矛盾！

因此，曲线 $y=g(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$ $(i=1,2)$处的切线不重合．……… 13 分

20. （本小题 13 分）

解：（Ⅰ）若 $a_1=2$，公差 $d=3$，则数列 $\{a_n\}$ 不具有性质 P．

理由如下：

由题知 $a_n=3n-1$，对于 a_1 和 a_2，假设存在正整数 k，使得 $a_k=a_1a_2$，则有 $3k-1=2\times5=10$，解得 $k=\frac{11}{3}$，矛盾！所以对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，$a_k\neq a_1a_2$．　　......3 分

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”，则

①假设 $a_1<0$，$d\le0$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=a_1+(n-1)\cdot d<0$．

设 $a_k=a_1\times a_2$，则 $a_k>0$，矛盾！

②假设 $a_1<0$，$d>0$，则存在正整数 t，使得

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_t\le0<a_{t+1}<a_{t+2}<\cdots$$

设 $a_1\cdot a_{t+1}=a_{k_1}$，$a_1\cdot a_{t+2}=a_{k_2}$，$a_1\cdot a_{t+3}=a_{k_3}$，…，$a_1\cdot a_{2t+1}=a_{k_{t+1}}$，$k_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,t+1$，则 $0>a_{k_1}>a_{k_2}>a_{k_3}>\cdots>a_{k_{t+1}}$，但数列 $\{a_n\}$ 中仅有 t 项小于等于 0，矛盾！

③假设 $a_1\ge0$，$d<0$，则存在正整数 t，使得

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_t\ge0>a_{t+1}>a_{t+2}>\cdots$$

设 $a_{t+1}\cdot a_{t+2}=a_{k_1}$，$a_{t+1}\cdot a_{t+3}=a_{k_2}$，$a_{t+1}\cdot a_{t+4}=a_{k_3}$，…，$a_{t+1}\cdot a_{2t+2}=a_{k_{t+1}}$，$k_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,t+1$，则 $0<a_{k_1}<a_{k_2}<a_{k_3}<\cdots<a_{k_{t+1}}$，但数列 $\{a_n\}$ 中仅有 t 项大于等于 0，矛盾！

综上，$a_1\ge0$，$d\ge0$．…………………………………………………… 8 分

（Ⅲ）设公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”，且存在正整数 k，使得 $a_k=2018$．

若 $d=0$，则 $\{a_n\}$ 为常数数列，此时 $a_n=2018$ 恒成立，故对任意的正整数 k，

$$a_k=2018\neq2018^2=a_1\cdot a_2,$$

这与数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 P”矛盾，故 $d\neq0$．

设 x 是数列 $\{a_n\}$ 中的任意一项，则 $x+d$，$x+2d$ 均是数列 $\{a_n\}$ 中的项，设

$$a_{k_1}=x(x+d),\ a_{k_2}=x(x+2d)$$

则 $a_{k_2}-a_{k_1}=xd=(k_2-k_1)\cdot d$

因为 $d\neq0$，所以 $x=k_2-k_1\in\mathbf{Z}$，即数列 $\{a_n\}$ 的每一项均是整数．

由（Ⅱ）知，$a_1\ge0$，$d\ge0$，故数列 $\{a_n\}$ 的每一项均是自然数，且 d 是正整数．

由题意知，$2018+d$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的项，故 $2018\cdot(2018+d)$ 是数列中的项，设 $a_m=2018\cdot(2018+d)$，则

$$a_m-a_k=2018\cdot(2018+d)-2018=2018\times2017+2018d=(m-k)\cdot d,$$

即 $(m-k-2018)\cdot d=2018\times2017$．

因为 $m-k-2018\in\mathbf{Z}$，$d\in\mathbf{N}^*$，故 d 是 2018×2017 的约数．

所以，$d=1,2,1009,2017,2\times1009,2\times2017,1009\times2017,2\times1009\times2017$．

当 $d=1$ 时，$a_1=2018-(k-1)\ge0$，得 $k=1,2,...,2018,2019$，故

$a_1=2018,2017,...,2,1,0$，共 2019 种可能；

当 $d=2$ 时，$a_1=2018-2(k-1)\ge0$，得 $k=1,2,...,1008,1009,1010$，故

$a_1=2018,2016,2014,\ldots,4,2,0$，共 1010 种可能；

当 $d=1009$ 时，$a_1=2018-1009\times(k-1)\geq 0$，得 $k=1,2,3$，故

$a_1=2018,1009,0$，共 3 种可能；

当 $d=2017$ 时，$a_1=2018-2017(k-1)\geq 0$，得 $k=1,2$，故

$a_1=2018,1$，共 2 种可能；

当 $d=2\times1009$ 时，$a_1=2018-2018\times(k-1)\geq 0$，得 $k=1,2$，故

$a_1=2018,0$，共 2 种可能；

当 $d=2\times2017$ 时，$a_1=2018-2\times2017\times(k-1)\geq 0$，得 $k=1$，故

$a_1=2018$，共 1 种可能；

当 $d=1009\times2017$ 时，$a_1=2018-1009\times2017\times(k-1)\geq 0$，得 $k=1$，故

$a_1=2018$，共 1 种可能；

当 $d=2\times1009\times2017$ 时，$a_1=2018-2\times1009\times2017\times(k-1)\geq 0$，得 $k=1$，故

$a_1=2018$，共 1 种可能．

综上，满足题意的数列 $\{a_n\}$ 共有 $2019+1010+3+2+2+1+1+1=3039$（种）．

经检验，这些数列均符合题意．…………………………………………………… 13 分

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao